UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

FORMAS GENERALIZADAS DE CONTINUIDAD Y DE FUNCIONES ABIERTAS A TRAVÉS DE OPERACIONES E IDEALES

DARWING YOEL CARVAJAL MENDOZA

TESIS DE GRADO PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

CUMANÁ, 2012

FORMAS GENERALIZADAS DE CONTINUIDAD Y DE FUNCIONES ABIERTAS A TRAVÉS DE OPERACIONES E IDEALES

APROBADO POR:

Carlos R. Carpintero F.

Dr. Carlos Carpintero

ASESOR

Dr. Ennis Rosas

JURADO PRINCIPAL

Margot Salas Brown

Dra. Margot Salas

JURADO PRINCIPAL

Agradecimiento

A Dios y la Virgen del Valle, por siempre recordarme que están presentes en cada uno de mis pasos.

A mis padres Neri y Dorina, por su apoyo incondicional y valiosa fortaleza.

Al profesor Carlos Carpintero, por su dedicación y asesoría brindada.

A todas aquellas personas que me brindaron su ayuda y apoyo para lograr este éxito.

Dedicatoria

A mis padres Neri y Dorina por su ayuda, apoyo y fortaleza tan valiosa.

Índice general

Resumen

En este trabajo, se estudia una generalización de algunos tipos de funciones b-abiertas y b-cerradas, usando la noción de operadores asociados a una topología. Luego, utilizando las nociones de operaciones, ideal y colecciones cualesquiera de subconjuntos de un conjunto X no vacío, se estudia una nueva clase de funciones que generalizan las nociones antes mencionadas.

Introducción

En topología general, básicamente se estudia la estructura de los espacios topológicos y las funciones continuas entre estos. En la formulación y estudio de las propiedades asociadas a un espacio topológico abstracto, así como también de las funciones continuas, juegan un papel preponderante los conjuntos abiertos. También entran en juego los conjuntos cerrados, pero estos pueden verse como los duales de los conjuntos abiertos con respecto a las operaciones conjuntistas de complementación, unión e intersección. En el año 1979, Kasahara [16] introduce el concepto de operador asociado a una topología, lo que permite definir nuevas clases aún más abstractas de conjuntos e introducir propiedades topológicas generalizadas, derivadas de las nociones clásicas. En esta misma dirección, Ogata [21] introduce la noción de conjuntos γ-abiertos para un operador γ asociado a una topología τ sobre un conjunto X. Posteriormente, Császár [10, 12] también propone para ciertas clases de operadores γ, una variante de la noción de conjunto γ-abierto que engloba la noción de conjunto γ-abierto dada por Ogata. En el año 1993, Raychaudhuri et al. [24] introducen los conjuntos δ-preabiertos que son una clase más amplia que la de los conjuntos abiertos de un espacio. En el año 1996, Andrijevic [1] presenta una nueva clase de conjuntos abiertos generalizados denominados conjuntos b-abiertos, los cuales permitieron obtener nociones generalizadas de ciertas propiedades topológicas y diversas formas de continuidad.

Este trabajo consta de tres capítulos, los cuales se encuentran estructurados como se muestra a continuación. En el primer capítulo, se encuentran algunas nociones de conjuntos y conceptos topológicos de la topología clásica, así como también nociones de continuidad y funciones abiertas vía conjuntos b-abiertos y δ-preabiertos tratadas en [4, 7, 15]. En el segundo capítulo, se extenderán los resultados obtenidos en [4, 7, 15], tratados en el capítulo 1, empleando los nociones de operador asociado y una variante generalizada de la noción de conjunto γ-abierto dada por Császár [10]. En el último capítulo, utilizando las nociones de operaciones [14] e ideal topológico

[20], y colecciones μ, μ' cualesquiera de subconjuntos de un conjunto X no vacío, se introducen y estudian nuevas nociones de continuidad y funciones abiertas, las cuales permiten exhibir que todos los resultados de continuidad y funciones abiertas tratados en los capítulos anteriores son casos particulares de estas nuevas nociones topológicas. Además, se obtienen algunos resultados de los cuales se presentan algunas aplicaciones usando estructuras minimales y topologías generalizadas.

Capítulo 1
PRELIMINARES

En este capítulo se describe en forma general los elementos básicos estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo, se presentan además algunos hechos relevantes relativos a las distintas relaciones existentes entre estos, que serán empleados a lo largo de los capítulos venideros. En su debida oportunidad, se dan ciertas citas respecto a las referencias bibliográficas en donde se puede ahondar en mayores detalles sobre las nociones y resultados aquí tratados.

1.1. Preliminares sobre espacios topológicos

En esta sección se introduce la noción clásica de espacios topológicos y ciertas nociones de funciones y conjuntos asociados a la misma. Para mas detalles de las definiciones y propiedades presentadas en esta sección se puede consultar [4, 7].

Definición 1.1 *Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

- *$\emptyset$ y X están en τ.*
- *La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.*
- *La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.*

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico y se denota (X, τ).

Si (X, τ) es un espacio topológico y U es un subconjunto de X, se dice que U es:

- Un conjunto abierto si $U \in \tau$.

- Un conjunto cerrado si $X \setminus U \in \tau$.
- Un conjunto clopen si $U \in \tau$ y $X \setminus U \in \tau$.

Definición 1.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define el interior de A denotado por $int(A)$ como:*

$$int(A) = \bigcup \{U : U \subseteq A \text{ y } U \in \tau\}$$

Teorema 1.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in int(A)$ si y sólo si existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq A$.*

Definición 1.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define la clausura de A denotada por $cl(A)$ como:*

$$cl(A) = \bigcap \{F : A \subseteq F \text{ y } X \setminus F \in \tau\}$$

Teorema 1.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in cl(A)$ si y sólo si para todo conjunto abierto U tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definición 1.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ se llama un punto θ-clausura de A si $cl(U) \cap A \neq \emptyset$ para cada conjunto abierto U tal que $x \in U$.*

El conjunto de todos los puntos θ-clausura de A se denomina la θ-clausura de A y se denota por $cl_\theta(A)$. Si $A = cl_\theta(A)$, entonces A se denomina un conjunto θ-cerrado. El complemento de un conjunto θ-cerrado se denomina θ-abierto.

Definición 1.5 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ se llama un punto θ-interior de A si existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq cl(U) \subseteq A$.*

El conjunto de todos los puntos θ-interior de A se denomina el θ-interior de A y se denota por $int_\theta(A)$.

Lema 1.1 *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ), entonces:*

(1) $X \setminus int_\theta(A) = cl_\theta(X \setminus A)$.

(2) $X \setminus cl_\theta(A) = int_\theta(X \setminus A)$.

(3) *A es θ-abierto si y sólo si $A = int_\theta(A)$.*

(4) *$cl_\theta(A)$ es un conjunto cerrado pero no necesariamente un conjunto θ-cerrado.*

Definición 1.6 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es un espacio regular si para cada conjunto cerrado B y cada $x \notin B$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $B \subseteq V$.*

Definición 1.7 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice:*

(1) *b-abierto si $A \subseteq cl(int(A)) \cup int(cl(A))$.*

(2) *regular abierto si $A = int(cl(A))$.*

(3) *α-abierto si $A \subseteq int(cl(int(A)))$.*

(4) *pre-abierto si $A \subseteq int(cl(A))$.*

(5) *δ-abierto si es unión de conjuntos regular abiertos en X.s*

(6) *δ-pre-abierto si $A \subseteq int(\delta\text{-}cl(A))$.*

Definición 1.8 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice:*

(1) *b-cerrado si $X \setminus A$ es b-abierto.*

(2) *regular cerrado si $X \setminus A$ es regular abierto.*

(3) *α-cerrado si $X \setminus A$ es α-abierto.*

(4) *pre-cerrado si $X \setminus A$ es pre-abierto.*

(5) *δ-cerrado si $X \setminus A$ es δ-abierto.*

(6) δ-pre-cerrado si $X \setminus A$ es δ-pre-abierto.

(7) δ-pre-clopen si A es δ-pre-abierto y δ-pre-cerrado.

Definición 1.9 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define la δ-clausura de A denotada por δ-cl(A) como:*

$$\delta\text{-}cl(A) = \bigcap \{F : A \subseteq F \text{ y } X \setminus F \text{ es } \delta\text{-abierto}\}$$

Teorema 1.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in \delta$-cl(A) si y sólo si para todo conjunto δ-abierto U tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definición 1.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define el δ-interior de A denotado por δ-int(A) como:*

$$\delta\text{-}int(A) = \bigcup \{U : U \subseteq A \text{ y } U \text{ es regular abierto}\}$$

Teorema 1.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in \delta$-int(A) si y sólo si existe un conjunto regular abierto U tal que $x \in U \subseteq A$.*

Definición 1.11 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define el b-interior de A denotado por b-int(A) como:*

$$b\text{-}int(A) = \bigcup \{U : U \subseteq A \text{ y } U \text{ es } b\text{-abierto}\}$$

Teorema 1.5 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in b$-int(A) si y sólo si existe un conjunto b-abierto U tal que $x \in U \subseteq A$.*

Definición 1.12 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define la b-clausura de A denotada por b-cl(A) como:*

$$b\text{-}cl(A) = \bigcap \{F : A \subseteq F \text{ y } X \setminus F \text{ es } b\text{-abierto}\}$$

Teorema 1.6 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in b\text{-}cl(A)$ si y sólo si para todo conjunto b-abierto U tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.*

1.2. Funciones b-abiertas y b-cerradas débiles

En esta sección se introduce la noción de funciones b-abiertas y b-cerradas débiles y se exhiben caracterizaciones de las mismas. También se encuentran otras nociones de funciones basadas en los conjuntos b-abiertos y δ-pre-abiertos y algunas de sus relaciones con las funciones antes mencionadas.

Cada una de las siguientes nociones de continuidad y funciones abiertas se pueden consultar en [4], [7] y [15].

Definición 1.13 *Una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ se dice:*

(1) b-irresoluta si $f^{-1}(U)$ es b-cerrado en X para cada b-cerrado U en Y.

(2) b-continua si $f^{-1}(U)$ es b-cerrado en X para cada cerrado U en Y.

(3) b-abierta si $f(U)$ es b-abierto en Y para cada abierto U en X.

(4) b-cerrada si $f(U)$ es b-cerrado en Y para cada cerrado U en X.

(5) continua fuerte si $f^{-1}(U)$ es clopen en X para cada subconjunto U en Y.

(6) abierta débil si $f(U) \subseteq int(f(cl(U)))$ para cada abierto U en X.

(7) casi abierta si $f(U)$ es abierto en Y para cada regular abierto U en X.

(8) pre-abierta si $f(U)$ es pre-abierto en Y para cada abierto U en X.

(9) contra-abierta si $f(U)$ es cerrado en Y para cada abierto U en X.

(10) contra-cerrada si $f(U)$ es abierto en Y para cada cerrado U en X.

(11) contra-b-abierta si $f(U)$ es b-cerrado en Y para cada b-abierto U en X.

(12) contra-b-cerrada si $f(U)$ es b-abierto en Y para cada b-cerrado U en X.

(13) casi contra-b-abierta si $f(U)$ es b-cerrado en Y para cada regular abierto U en X.

(14) casi contra-b-cerrada si $f(U)$ es b-abierto en Y para cada regular cerrado U en X.

(15) δ-pre-continua si $f^{-1}(U)$ es δ-pre-abierto en X para cada abierto U en Y.

(16) continua total si $f^{-1}(U)$ es clopen en X para cada abierto U en Y.

(17) δ-pre-continua total si $f^{-1}(U)$ es δ-pre-clopen en X para cada abierto U en Y.

(18) δ-preirresoluta total si $f^{-1}(U)$ es δ-pre-clopen en X para cada δ-pre-clopen U en Y.

(19) pre-δ-preclopen total si $f(U)$ es δ-pre-clopen en Y para cada δ-pre-clopen U en X.

(20) b-abierta débil si $f(U) \subseteq b\text{-}int(f(cl(U)))$ para cada abierto U en X.

(21) b-cerrada débil si $b\text{-}cl(f(int(U))) \subseteq f(U)$ para cada cerrado U en X.

(22) satisface la condición b-abierta débil interior si $b\text{-}int(f(cl(U))) \subseteq f(U)$ para cada abierto U en X.

(23) continua escasa si $f^{-1}(U)$ es abierto en X para cada clopen U en Y.

Las demostraciones de los siguientes resultados sobre funciones b-abiertas, b-abiertas débiles, b-cerradas débiles y δ-pre-continuas total pueden ser consultadas en [4] y [7].

Teorema 1.7 *Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es b-abierta débil.

(2) Para cada punto $x \in X$ y cada abierto U que contiene a x, existe un conjunto b-abierto F que contiene a $f(x)$ tal que $F \subseteq f(cl(U))$.

Teorema 1.8 *Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función biyectiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es b-abierta débil.

(2) b-$cl(f(U)) \subseteq f(cl(U))$ para cada abierto U en X.

(3) b-$cl(f(int(F))) \subseteq f(F)$ para cada cerrado F en X.

Teorema 1.9 *Para una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es b-abierta débil.

(2) $f(int(F)) \subseteq$ b-$int(f(F))$ para cada cerrado F en X.

(3) $f(int(cl(U))) \subseteq$ b-$int(f(cl(U)))$ para cada abierto U en X.

(4) $f(U) \subseteq$ b-$int(f(cl(U)))$ para cada regular abierto U en X.

(5) $f(U) \subseteq$ b-$int(f(cl(U)))$ para cada pre-abierto U en X.

(6) $f(U) \subseteq$ b-$int(f(cl(U)))$ para cada α-abierto U en X.

Teorema 1.10 *Si una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es b-abierta débil y satisface la condición b-abierta débil interior, entonces f es b-abierta.*

Teorema 1.11 *Cada función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ casi contra b-cerrada es b-abierta débil.*

Corolario 1.1 *Si una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es contra b-cerrada, entonces es b-abierta débil.*

Teorema 1.12 *Cada función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ casi contra b-abierta es b-cerrada débil.*

Corolario 1.2 *Si una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es contra b-abierta, entonces es b-cerrada débil.*

Teorema 1.13 *Sea X un espacio regular. Entonces la función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ es b-abierta débil si y sólo si f es b-abierta.*

Teorema 1.14 *Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es b-cerrada débil.*

(2) $b\text{-}cl(f(U)) \subseteq f(cl(U))$ *para cada abierto U en X.*

(3) $b\text{-}cl(f(U)) \subseteq f(cl(U))$ *para cada regular abierto U en X.*

(4) Para cada subconjunto $G \subseteq Y$ y cada abierto U en X con $f^{-1}(G) \subseteq U$, existe un b-abierto V en Y tal que $G \subseteq V$ y $f^{-1}(V) \subseteq cl(U)$.

(5) Para cada $y \in Y$ y cada subconjunto abierto U en X con $f^{-1}(y) \subseteq U$, existe un b-abierto V en Y tal que $y \in V$ y $f^{-1}(V) \subseteq cl(U)$.

(6) $b\text{-}cl(f(int(cl(U)))) \subseteq f(cl(U))$ *para cada subconjunto U en X.*

(7) $b\text{-}cl(f(int(cl_\theta(U)))) \subseteq f(cl_\theta(U))$ *para cada subconjunto U en X.*

(8) $b\text{-}cl(f(U)) \subseteq f(cl(U))$ *para cada b-abierto U en X.*

Teorema 1.15 *Para una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es b-cerrada débil.*

(2) $b\text{-}cl(f(int(U))) \subseteq f(U)$ *para cada pre-cerrado U en X.*

(3) $b\text{-}cl(f(int(U))) \subseteq f(U)$ *para cada* α*-cerrado* U *en* X*.*

Teorema 1.16 *Para una función* $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es* δ*-pre-continua total.*

(2) $f^{-1}(U)$ *es* δ*-pre-clopen en* X *para cada cerrado* U *en* Y*.*

(3) $f^{-1}(U)$ *es* δ*-pre-clopen en* X *para cada clopen* U *en* Y*.*

Capítulo 2

ALGUNAS FORMAS GENERALIZADAS DE CONTINUIDAD A TRAVÉS DE OPERADORES ASOCIADOS

En este capítulo se estudia la noción de operador asociado a una topología y algunas formas generalizadas de continuidad derivadas de esta noción. Se generaliza aqui, en este nuevo contexto, los resultados estudiados en el capítulo anterior. Cabe señalar que en este capítulo se emplean algunas nociones tratadas por Carpintero et al en [5].

2.1. Operadores asociados a una topología

En esta sección se estudia la noción de operador asociado a una topología y algunos conjuntos asociados a dicha noción, destacando algunas características básicas de estos subconjuntos que serán de utilidad en las secciones siguientes.

Definición 2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una aplicación $\gamma : 2^X \to 2^X$ se dice un operador asociado a la topología τ si $U \subseteq \gamma(U)$ para cada $U \in \tau$.*

Ejemplo 2.1 *Considere (X, τ) un espacio topológico y $U \in \tau$. Los siguientes son operadores asociados a τ:*

(a) El operador clausura $\gamma(U) = cl(U)$.

(b) El operador interior $\gamma(U) = int(U)$.

(c) El operador identidad $\gamma(U) = U$.

(d) El operador interior clausura $\gamma(U) = int(cl(U))$.

(e) El operador clausura interior $\gamma(U) = cl(int(U))$.

Definición 2.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y γ un operador asociado a τ. Si para todo $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$, se cumple que $\gamma(A) \subseteq \gamma(B)$, entonces se dice que γ es un operador monótono asociado a τ.*

Ejemplo 2.2 *Los operadores del Ejemplo 2.1 son monótonos asociados a τ. El operador complemento frontera definido $\gamma(U) = X \setminus fr(U)$ no es asociado a τ_u ni es monótono.*

Definición 2.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico y γ un operador asociado a τ, se dice que γ es un operador regular si dado dos abiertos U y V tales $x \in U \cap V$, existe un abierto W tal que,*

$$x \in W \ , \ \gamma(W) \subseteq \gamma(U) \cap \gamma(V)$$

Todo operador γ monótono es regular, en efecto, sean U y V dos abiertos tales que $x \in U \cap V$, entonces $W = U \cap V$ es un abierto tal que $x \in W$. Observe que $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$. Puesto que γ es monótono, entonces $\gamma(W) \subseteq \gamma(U)$ y $\gamma(W) \subseteq \gamma(V)$, de donde se obtiene que $\gamma(W) \subseteq \gamma(U) \cap \gamma(V)$.

Ejemplo 2.3 *De un operador regular que no es monótono. Sea (X, τ) un espacio topológico y considere el operador $\gamma : 2^X \to 2^X$*

$$\gamma(U) = \begin{cases} U & si \quad U \in \tau \\ X \setminus U & si \quad U \notin \tau \end{cases}$$

Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$ y $A, B \notin \tau$, entonces $\gamma(A) \nsubseteq \gamma(B)$, esto implica que γ no es monótono. Por otra parte, si U, V son abiertos $x \in U \cap V$, entonces $W = U \cap V$ es un abierto tal que $x \in W$ y $\gamma(W) \subseteq \gamma(U) \cap \gamma(V)$, lo cual significa que γ es un operador regular.

Para un operador γ asociado a τ, Ogata [21] define la noción de conjunto γ-abierto como sigue: Un subconjunto $A \subseteq X$ es γ-abierto si para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq \gamma(U) \subseteq A$. Observe que todo conjunto γ-abierto en el sentido de Ogata es abierto.

Császár [10, 12] considera aplicaciones $\gamma : 2^X \to 2^X$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A) \subseteq \gamma(B) \tag{2.1}$$

$$\gamma(\emptyset) = \emptyset \ y \ \gamma(X) = X \tag{2.2}$$

$$U \cap \gamma(A) \subseteq \gamma(U \cap A) \tag{2.3}$$

Para cada $A, B \subseteq X$ y $U \in \tau$, introduce la noción de conjunto γ-abierto para estas clases de aplicaciones como sigue: Un subconjunto $A \subseteq X$ es γ-abierto si $A \subseteq \gamma(A)$. Observe que toda aplicación que satisface las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3) es un operador asociado a τ, pues si $U \in \tau$;

$$U = U \cap X = U \cap \gamma(X) \subseteq \gamma(U \cap X) = \gamma(U)$$

Así todo conjunto abierto es γ-abierto en el sentido de Császár, y en consecuencia todo γ-abierto en el sentido de Ogata es γ-abierto en el sentido de Császár. Estas aplicaciones son menores que el operador clausura en el sentido que $\gamma(A) \subseteq cl(A)$ para todo $A \subseteq X$. Esto es,

$$(X \setminus cl(A)) \cap \gamma(A) \subseteq \gamma((X \setminus cl(A)) \cap A) = \gamma(\emptyset) = \emptyset$$

El siguiente ejemplo muestra que, en general, no todo conjunto γ-abierto en el sentido de Császár, es γ-abierto en el sentido de Ogata.

Ejemplo 2.4 *Considere* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y* $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$, $\gamma(A) = cl(A)$. *Observe que* γ *satisface las condiciones (2.1), (2.2) y (2.3). Además, para todo* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq cl(A)$, *lo que implica que la colección de* γ*-abiertos en el sentido de Császár es* $2^{\mathbb{R}}$. *Por otra parte, si* $B = \mathbb{Z}^+$ *y* $x \in B$, *entonces para todo abierto* U *tal que* $x \in U$, *se tiene que* $U \subseteq \gamma(U) \nsubseteq B$, *lo que implica que* B *no es* γ*-abierto en el sentido de Ogata. Así,* B *es* γ*-abierto en el sentido de Császár pero no es* γ*-abierto en el sentido de Ogata.*

La siguiente definición es una extensión de la definición dada por Császár en [12, 10] de conjuntos γ-abiertos.

Definición 2.4 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice γ-abierto si $A \subseteq \gamma(A)$.*

El complemento de un conjunto γ-abierto se denomina γ-cerrado. Un subconjunto $A \subseteq X$ se denomina γ-clopen si A es a la vez γ-abierto y γ-cerrado. Se denota por τ^γ la colección de todos los conjuntos γ-abiertos en el sentido de la Definición 2.4.

El siguiente ejemplo muestra que existen operadores monótonos asociados a τ que no satisfacen la condición (2.3).

Ejemplo 2.5 *Sea $(\mathbb{R}, \tau_u)$ y considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$ definido:*

$$\gamma(A) = f^{-1}(f(A)), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

Entonces $A \subseteq \gamma(A)$, así γ es un operador monótono asociado a τ_u. Observe que γ satisface las condiciones (2.1) y (2.2) pero no la (2.3), pues si $U = (0, 2)$ y $A = [3, 4]$, entonces tenemos:

$$U \cap \gamma(A) = U \cap f^{-1}(f(A)) = (0, 2) \cap \mathbb{R} = (0, 2)$$

$$\gamma(U \cap A) = f^{-1}(f(U \cap A)) = f^{-1}(f(\emptyset)) = \emptyset$$

Observación 2.1 *Puesto que el operador que se define en el Ejemplo 2.5, no satisface la condición (2.3) de Császár, entonces la colección de γ-abiertos en el sentido de Császár es vacía. Por otra parte, dicho operador es monótono asociado a τ_u y $\tau_u^\gamma = 2^{\mathbb{R}}$. Esto muestra que todo conjunto γ-abierto en el sentido de Császár es γ-abierto en el sentido de la Definición 2.4, pero lo contrario no es cierto. Además, si $\gamma = int$, entonces $\tau = \tau^\gamma$. Pues si $U \in \tau^\gamma$, entonces $U \subseteq int(U)$ lo cual implica que $U \in \tau$.*

El siguiente ejemplo muestra que en general $\tau^\gamma \nsubseteq \tau$.

Ejemplo 2.6 *Considere* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y*

$$\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$$

$$\gamma(A) = cl(A)$$

Sea $A = (0, 1]$*, entonces* $\gamma(A) = [0, 1]$*, así* A *es un conjunto* γ*-abierto, pero* $A \notin \tau_u$.

En lo que resta del trabajo se menciona, exclusivamente, a los conjuntos γ-abiertos en el sentido de la Definición 2.4. Cuando sea necesario se resalta si es γ-abierto en los otros sentidos antes mencionados.

Lema 2.1 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $\gamma : 2^X \to 2^X$ *un operador monótono asociado a la topología* τ*. Si* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *es una colección arbitraria de conjuntos* γ*-abiertos en* X*, entonces* $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ *es un conjunto* γ*-abierto en* X*.*

Demostración: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una colección arbitraria de conjuntos γ-abiertos en X, entonces para cada $\alpha \in J$, $A_\alpha \subseteq \gamma(A_\alpha)$. Así,

$$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} \gamma(A_\alpha)$$

Dado que el operador γ es monótono y

$$A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

para cada $\alpha \in J$, entonces

$$\gamma(A_\alpha) \subseteq \gamma(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha)$$

para cada $\alpha \in J$, en consecuencia

$$\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} \gamma(A_\alpha) \subseteq \gamma(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha)$$

así

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \subseteq \gamma(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha)$$

y por tanto $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ es un conjunto γ-abierto en X. ■

Si γ es un operador regular, entonces la intersección finita de conjuntos γ-abiertos en el sentido de Ogata, es un conjunto γ-abierto en el sentido de Ogata. En efecto, si A, B son conjuntos γ-abiertos en el sentido de Ogata y $x \in A \cap B$, entonces existen abiertos U, V tales que

$$x \in U \ y \ \gamma(U) \subseteq A$$

$$x \in V \ y \ \gamma(V) \subseteq B$$

Dado que U, V son abiertos y $x \in U \cap V$, por la regularidad de γ existe un abierto W tal que $x \in W$ y $\gamma(W) \subseteq \gamma(U) \cap \gamma(V)$, así $\gamma(W) \subseteq A \cap B$, por lo que $A \cap B$ es γ-abierto en el sentido de Ogata. Esto muestra que si γ es un operador regular, entonces la colección de γ-abiertos en el sentido de Ogata coincide con la colección de abiertos.

Corolario 2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una colección arbitraria de conjuntos γ-cerrados en X, entonces $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ es un conjunto γ-cerrado en X.*

Demostración: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección arbitraria de conjuntos γ-cerrados en X, entonces para cada $\alpha \in J$, $X \setminus A_\alpha$ es un conjunto γ-abierto en X. Por el Lema 2.1, se tiene que $\bigcup_{\alpha \in J}(X \setminus A_\alpha)$ es un conjunto γ-abierto en X. Pero por las leyes de De Morgan se tiene que,

$$\bigcup_{\alpha \in J}(X \setminus A_\alpha) = X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$$

de donde se obtiene tomando complemento que $\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha$ es un conjunto γ-cerrado en X. ∎

Definición 2.5 *Sea (X,τ) un espacio topológico, $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ y $A \subseteq X$. Se define el γ-interior de A denotado por $int^\gamma(A)$ como:*

$$int^\gamma(A) = \bigcup\{U : U \subseteq A \text{ y } U \text{ es } \gamma\text{-abierto}\}$$

Observación 2.2 *Ogata en [21], define la noción de τ_γ-interior de $A \subseteq X$, denotado por τ_γ-int(A) como la unión de todos los conjuntos γ-abiertos(sentido de Ogata) contenidos en A.*

El siguiente teorema es una generalización de los Teoremas 1.1, 1.4 y 1.5, para definiciones particulares del operador γ.

Teorema 2.1 *Sea (X,τ) un espacio topológico, $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in int^\gamma(A)$ si y sólo si existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq A$.*

Demostración: (Suficiencia) Sea $x \in int^\gamma(A)$, entonces por definición de γ-interior,

$$x \in \bigcup\{U : U \subseteq A \text{ y } U \text{ es } \gamma\text{-abierto}\}$$

por tanto existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq A$.

(Necesidad) Suponga que existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq A$, entonces

$$x \in U \subseteq \bigcup\{U : U \subseteq A \text{ y } U \text{ es } \gamma\text{-abierto}\} = int^\gamma(A)$$

por tanto $x \in int^\gamma(A)$. ∎

Observación 2.3 *Para casos particulares de γ:*

- $\gamma(A) = cl(int(A)) \cup int(cl(A))$, *se obtiene que* $int^{\gamma}(A) = bint(A)$.
- $\gamma(A) = int(cl(A))$ *y si considera la colección de* γ*-abiertos tales que* $A = \gamma(A)$, *se obtiene que* $int^{\gamma}(A) = \delta int(A)$.
- $\gamma(A) = int(A)$, *se obtiene que* $int^{\gamma}(A) = int(A)$.

Teorema 2.2 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico,* $\gamma : 2^X \to 2^X$ *un operador monótono asociado a la topología* τ. *Para cualesquiera subconjuntos* A, B *de* X *se tienen las siguientes propiedades de* γ*-interior:*

(1) $int^{\gamma}(A) \subseteq A$.

(2) $int^{\gamma}(A)$ *es un conjunto* γ*-abierto.*

(3) $int^{\gamma}(A)$ *es el* γ*-abierto más grande contenido en* A.

(4) A *es* γ*-abierto si y sólo si* $A = int^{\gamma}(A)$.

(5) Si $A \subseteq B$, *entonces* $int^{\gamma}(A) \subseteq int^{\gamma}(B)$.

(6) $int^{\gamma}(A) \cup int^{\gamma}(B) \subseteq int^{\gamma}(A \cup B)$.

(7) $int^{\gamma}(A \cap B) \subseteq int^{\gamma}(A) \cap int^{\gamma}(B)$.

(8) τ_{γ}*-*$int(A) \subseteq int(A) \subseteq int^{\gamma}(A)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in int^{\gamma}(A)$, entonces existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq A$, de donde se obtiene que $x \in A$ y por tanto $int^{\gamma}(A) \subseteq A$.

(2) Por definición,

$$int^{\gamma}(A) = \bigcup \{U : U \subseteq A \textit{ y } U \textit{ es } \gamma\textit{-abierto}\}$$

y puesto que unión arbitraria de conjuntos γ-abiertos es un conjunto γ-abierto, se obtiene que $int^{\gamma}(A)$ es un conjunto γ-abierto.

(3) Suponga que existe un conjunto γ-abierto V tal que $int^{\gamma}(A) \subseteq V \subseteq A$. Como V es γ-abierto y $V \subseteq A$, entonces $V \subseteq int^{\gamma}(A)$, así se tiene que $V = int^{\gamma}(A)$ y por tanto $int^{\gamma}(A)$ es el conjunto γ-abierto más grande contenido en A.

(4) Suponga que A es γ-abierto y sea $x \in A$, entonces

$$x \in A \subseteq \bigcup \{U : U \subseteq A \ y \ U \ es \ \gamma\text{-}abierto\} = int^{\gamma}(A)$$

en consecuencia, $x \in int^{\gamma}(A)$. Así, $A \subseteq int^{\gamma}(A)$ y puesto que siempre $int^{\gamma}(A) \subseteq A$ se concluye que $A = int^{\gamma}(A)$.

Recíprocamente, si $A = int^{\gamma}(A)$, entonces como $int^{\gamma}(A)$ es un conjunto γ-abierto, se concluye que A es un conjunto γ-abierto.

(5) Sea $x \in int^{\gamma}(A)$, entonces existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq A$. Dado que $A \subseteq B$ se obtiene que existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq B$, lo cual implica que $x \in int^{\gamma}(B)$.

(6) Puesto que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, entonces de la propiedad (5), se obtiene que $int^{\gamma}(A) \subseteq int^{\gamma}(A \cup B)$ y $int^{\gamma}(B) \subseteq int^{\gamma}(A \cup B)$. Por tanto , $int^{\gamma}(A) \cup int^{\gamma}(B) \subseteq int^{\gamma}(A \cup B)$.

(7) Puesto que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, entonces de la propiedad (5), se obtiene que $int^{\gamma}(A \cap B) \subseteq int^{\gamma}(A)$ y $int^{\gamma}(A \cap B) \subseteq int^{\gamma}(B)$. Por tanto , $int^{\gamma}(A \cap B) \subseteq int^{\gamma}(A) \cap int^{\gamma}(B)$.

(8) Sea $x \in \tau_{\gamma}\text{-}int(A)$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $U \subseteq \gamma(U) \subseteq A$, de donde se obtiene que existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq A$, lo cual implica que $x \in int^{\gamma}(A)$. Por tanto $\tau_{\gamma}\text{-}int(A) \subseteq int(A)$.

Sea $x \in int(A)$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq A$. Como γ es un operador asociado a τ, entonces $U \subseteq \gamma(U)$. Así, U es un conjunto γ-abierto contenido en A, por la propiedad (3) tenemos que $x \in U \subseteq int^{\gamma}(A)$. En consecuencia, $x \in int^{\gamma}(A)$ lo cual implica que, $int(A) \subseteq int^{\gamma}(A)$. ∎

En general, no ocurre la igualdad en las propiedades (1), (6), (7) y (8) del Teorema 2.2, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.7 *Considere* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y* $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definido por* $\gamma(A) = int(A)$*, entonces* $\tau_u^\gamma = \tau_u$.

- *Si* $A = (0,1]$ *se tiene que,*

$$A = (0,1] \nsubseteq (0,1) = int(A) = int^\gamma(A)$$

- *Si* $A = \mathbb{Q}$ *y* $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, entonces* $int^\gamma(A) = int^\gamma(B) = \emptyset$*,* $int^\gamma(A \cup B) = int^\gamma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*, así se tiene que,* $int^\gamma(A \cup B) = \mathbb{R} \nsubseteq int^\gamma(A) \cup int^\gamma(B) = \emptyset$.

Ejemplo 2.8 *Considere* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y* $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definido por* $\gamma(A) = cl(int(A))$*. Sea* $A = (0,1]$*,* $B = [1,2]$*; entonces* $A, B \in \tau_u^\gamma$ *y* $A \cap B = \{1\} \notin \tau_u^\gamma$*, luego*

$$\{1\} = (0,1] \cap [1,2] = int^\gamma(A) \cap int^\gamma(B) \nsubseteq int^\gamma(A \cap B) = int^\gamma(\{1\}) = \emptyset$$

Ejemplo 2.9 *Sea* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y considere la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Se define* $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$ *como sigue:*

$$\gamma(A) = f^{-1}(f(A)), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$$

Observe que $A = [0,1] \in \tau_u^\gamma$*, por lo que*

$$[0,1] = A = int^\gamma(A) \nsubseteq int(A) = (0,1)$$

Por otra parte, observe que τ_γ*-int(A)=*$\emptyset$*, pues en caso contrario, si* $x \in \tau_\gamma$*-int(A), entonces existe un conjunto abierto* U *tal que* $x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq [0,1]$*, lo cual es falso ya que* $f^{-1}(f(U)) = \mathbb{R} \nsubseteq [0,1]$*. Por tanto* $(0,1) = int(A) \nsubseteq \tau_\gamma$*-int*$(A) = \emptyset$.

Definición 2.6 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico,* $\gamma : 2^X \to 2^X$ *un operador monótono asociado a la topología* τ *y* $A \subseteq X$*. Se define la* γ*-clausura de* A *denotada por*

$cl^{\gamma}(A)$ *como:*

$$cl^{\gamma}(A) = \bigcap\{F : F \supseteq A \text{ y } F \text{ es } \gamma\text{-cerrado}\}$$

Observación 2.4 *Ogata en [21], define la noción de τ_{γ}-clausura de $A \subseteq X$, denotado por τ_{γ}-cl(A) como la intersección de todos los conjuntos γ-cerrados que contienen a A.*

El siguiente teorema es una generalización de los Teoremas 1.2, 1.3 y 1.6.

Teorema 2.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico, $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ y $A \subseteq X$. Entonces para cualquier $x \in X$, $x \in cl^{\gamma}(A)$ si y sólo si para cada conjunto γ-abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración: (Suficiencia) Suponga que existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Entonces $X \setminus U$ es un conjunto γ-cerrado y $A \subseteq (X \setminus U)$. Observe que,

$$cl^{\gamma}(A) = \bigcap\{F : F \supseteq A \text{ y } F \text{ es } \gamma\text{-cerrado}\} \subseteq (X \setminus U)$$

como $x \in U$ entonces $x \notin X \setminus U$, lo cual implica que $x \notin cl^{\gamma}(A)$.

(Necesidad) Suponga que $x \notin cl^{\gamma}(A)$, entonces

$$x \notin \bigcap\{F : F \supseteq A \text{ y } F \text{ es } \gamma\text{-cerrado}\}$$

esto implica que existe un conjunto γ-cerrado F' tal que $A \subseteq F'$ y $x \notin F'$. Luego $U = X \setminus F'$ es un conjunto γ-abierto tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. ■

Observación 2.5 *Para casos particulares de γ:*

- $\gamma(A) = cl(int(A)) \cup int(cl(A))$, *se obtiene que* $cl^{\gamma}(A) = b\text{-}cl(A)$.
- $\gamma(A) = int(cl(A))$ *y si considera la colección de γ-abiertos tales que* $A = \gamma(A)$, *se obtiene que* $cl^{\gamma}(A) = \delta cl(A)$.

- $\gamma(A) = int(A)$, *se obtiene que* $cl^{\gamma}(A) = cl(A)$.

Teorema 2.4 *Sea* (X, τ) *un espacio topológico,* $\gamma : 2^X \to 2^X$ *un operador monótono asociado a la topología* τ. *Para cualesquiera subconjuntos* A, B *de* X *se tienen las siguientes propiedades de* γ*-clausura:*

(1) $A \subseteq cl^{\gamma}(A)$.

(2) $cl^{\gamma}(A)$ *es un conjunto* γ*-cerrado.*

(3) $cl^{\gamma}(A)$ *es el* γ*-cerrado más pequeño que contiene a* A.

(4) A *es* γ*-cerrado si y sólo si* $A = cl^{\gamma}(A)$.

(5) Si $A \subseteq B$, *entonces* $cl^{\gamma}(A) \subseteq cl^{\gamma}(B)$.

(6) $cl^{\gamma}(A) \cup cl^{\gamma}(B) \subseteq cl^{\gamma}(A \cup B)$.

(7) $cl^{\gamma}(A \cap B) \subseteq cl^{\gamma}(A) \cap cl^{\gamma}(B)$.

(8) $cl^{\gamma}(A) \subseteq cl(A) \subseteq \tau_{\gamma} - cl(A)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in A$ y U cualquier conjunto γ-abierto tal que $x \in U$, entonces $x \in U \cap A$ y por tanto $U \cap A \neq \emptyset$. Esto implica que $x \in cl^{\gamma}(A)$.

(2) Por definición,

$$cl^{\gamma}(A) = \bigcap \{F : F \supseteq A \text{ } y \text{ } F \text{ } es \text{ } \gamma\text{-}cerrado\}$$

y puesto que la intersección arbitraria de conjuntos γ-cerrados es un conjunto γ-cerrado, se obtiene que $cl^{\gamma}(A)$ es un conjunto γ-cerrado.

(3) Suponga que existe un conjunto γ-cerrado W tal que $A \subseteq W \subseteq cl^{\gamma}(A)$. Como W es γ-cerrado y $A \subseteq W$, observe que

$$cl^{\gamma}(A) = \bigcap \{F : F \supseteq A \text{ } y \text{ } F \text{ } es \text{ } \gamma\text{-}cerrado\} \subseteq W$$

así $cl^\gamma(A) \subseteq W$ y en consecuencia, $W = cl^\gamma(A)$. Por tanto, $cl^\gamma(A)$ es el γ-cerrado más pequeño que contiene a A.

(4) (Suficiencia) Suponga que A es un conjunto γ-cerrado. Por la propiedad (1), $A \subseteq cl^\gamma(A)$. Sea $x \in cl^\gamma(A)$, entonces

$$x \in \bigcap \{F : F \supseteq A \textit{ y } F \textit{ es } \gamma\textit{-cerrado}\}$$

como A es γ-cerrado, entonces

$$x \in \bigcap \{F : F \supseteq A \textit{ y } F \textit{ es } \gamma\textit{-cerrado}\} \subseteq A$$

en consecuencia $x \in A$ y por tanto $A = cl^\gamma(A)$.

(Necesidad) Suponga que $A = cl^\gamma(A)$. Por la propiedad (2), $cl^\gamma(A)$ es un conjunto γ-cerrado y por tanto A es un conjunto γ-cerrado.

(5) Sea $x \in cl^\gamma(A)$, entonces para todo γ-abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$, como $A \subseteq B$ se tiene que $\emptyset \neq U \cap A \subseteq U \cap B$ en consecuencia para todo γ-abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap B \neq \emptyset$, esto implica que $x \in cl^\gamma(B)$.

(6) Puesto que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, entonces de la propiedad (5), se obtiene que $cl^\gamma(A) \subseteq cl^\gamma(A \cup B)$ y $cl^\gamma(B) \subseteq cl^\gamma(A \cup B)$. Así, $cl^\gamma(A) \cup cl^\gamma(B) \subseteq cl^\gamma(A \cup B)$.

(7) Puesto que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, entonces de la propiedad (5), se obtiene que $cl^\gamma(A \cap B) \subseteq cl^\gamma(A)$ y $cl^\gamma(A \cap B) \subseteq cl^\gamma(B)$. En consecuencia, $cl^\gamma(A \cap B) \subseteq cl^\gamma(A) \cap cl^\gamma(B)$.

(8) Sea $x \in cl^\gamma(A)$, entonces para todo γ-abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$. Como γ es un operador asociado a la topología τ, entonces todo conjunto abierto es γ-abierto. Así, para todo conjunto abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$, lo cual implica que $x \in cl(A)$.

Sea $x \in cl(A)$, entonces para todo conjunto abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$. Como U es abierto y γ es un operador asociado a la topología τ, entonces $U \subseteq \gamma(U)$, así

$$\gamma(U) \cap A \supseteq U \cap A \neq \emptyset.$$

En consecuencia, para todo conjunto abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $\gamma(U) \cap A \neq \emptyset$, lo cual implica que $x \in \tau_\gamma\text{-}cl(A)$. ■

En general, no ocurre la igualdad en las propiedades (1), (6), (7) y (8) del Teorema 2.4, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.10 *Considere* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y* $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definido por* $\gamma(A) = int(A)$, *entonces* $\tau_u^\gamma = \tau_u$.

- *Si* $A = (0, 1]$ *se tiene que,*

$$cl^\gamma(A) = cl(A) = [0, 1] \nsubseteq (0, 1] = A$$

- *Si* $A = (0, 1)$ *y* $B = (1, 2]$ *se tiene que,*

$$\{1\} = [0, 1] \cap [1, 2] = cl(A) \cap cl(B) = cl^\gamma(A) \cap cl^\gamma(B) \nsubseteq cl^\gamma(A \cap B) = \emptyset$$

Ejemplo 2.11 *Considere* $(\mathbb{R}, \tau_u)$ *y* $\gamma : 2^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definido por* $\gamma(A) = cl(int(A))$. *Sea* $A = (0, 1)$ *y* $B = (1, 2)$, *entonces* A *y* B *son conjuntos* γ*-cerrados, ya que* $int(cl(A)) \subseteq A$ *e* $int(cl(B)) \subseteq B$, *en consecuencia,* $cl^\gamma(A) = A$ *y* $cl^\gamma(B) = B$. *Observe que* $A \cup B$ *no es* γ*-cerrado, pues* $int(cl(A \cup B)) = (0, 2) \nsubseteq (0, 1) \cup (1, 2) = A \cup B$. *Por tanto,*

$$cl^\gamma(A \cup B) \nsubseteq A \cup B = cl^\gamma(A) \cup cl^\gamma(B)$$

Teorema 2.5 *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ. Para cualquier subconjunto A de X se cumple:*

(1) $cl^\gamma(X \setminus A) = X \setminus int^\gamma(A)$.

(2) $int^\gamma(X \setminus A) = X \setminus cl^\gamma(A)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in cl^\gamma(X \setminus A)$, entonces para cada γ-abierto U tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Observe que $U \nsubseteq A$, pues en caso contrario, es decir, si $U \subseteq A$ entonces $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, lo cual no es cierto. En consecuencia, para todo γ-abierto U tal que $x \in U$, se tiene que $U \nsubseteq A$, esto implica que $x \notin int^\gamma(A)$ y por tanto $x \in X \setminus int^\gamma(A)$.

Recíprocamente, si $x \in X \setminus int^\gamma(A)$, entonces $x \notin int^\gamma(A)$, lo cual implica que para todo γ-abierto U tal que $x \in U$ se cumple que $U \nsubseteq A$. Observe que $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, pues en caso contrario, es decir, si $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, entonces $U \subseteq A$ lo cual no es cierto. En consecuencia, para todo γ-abierto U tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, lo cual implica que $x \in cl^\gamma(X \setminus A)$.

(2) En la propiedad anterior, si se sustituye A por $X \setminus A$ se obtiene que $cl^\gamma(A) = X \setminus int^\gamma(X \setminus A)$, luego al tomar complemento en ambos miembros de la igualdad anterior se obtiene que $int^\gamma(X \setminus A) = X \setminus cl^\gamma(A)$. ■

Definición 2.7 *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice γ-cerrado generalizado, abreviado γ-g cerrado, si $cl^\gamma(A) \subseteq U$ siempre que $A \subseteq U$ y U es γ-abierto en X.*

El complemento de un conjunto γ-cerrado generalizado se denomina γ-abierto generalizado, abreviado γ-g abierto.

Observación 2.6 *Si A es un conjunto γ-cerrado, entonces A es γ-cerrado generalizado. Pues si U es un conjunto γ-abierto tal que $A \subseteq U$, como $A = cl^\gamma(A)$ se* *tiene que $cl^{\gamma}(A) \subseteq U$, por tanto A es γ-cerrado generalizado. Como consecuencia se obtiene que todo conjunto γ-abierto es γ-abierto generalizado.*

Lema 2.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\gamma : 2^X \to 2^X$ un operador monótono asociado a la topología τ. Un subconjunto $A \subseteq X$ es γ-abierto generalizado si y sólo si $F \subseteq int^{\gamma}(A)$ siempre que $F \subseteq A$ y F es γ-cerrado en X.*

Demostración: (Suficiencia) Suponga que A es un conjunto γ-abierto generalizado y F es γ-cerrado tal que $F \subseteq A$. Entonces $X \setminus A$ es γ-cerrado generalizado y $X \setminus F$ es γ-abierto tal que $X \setminus A \subseteq X \setminus F$, en consecuencia

$$\begin{aligned} cl^{\gamma}(X \setminus A) &\subseteq X \setminus F \\ X \setminus int^{\gamma}(A) &\subseteq X \setminus F \\ F &\subseteq int^{\gamma}(A) \end{aligned}$$

(Necesidad) Suponga que U es un conjunto γ-abierto tal que $X \setminus A \subseteq U$. Entonces, $X \setminus U \subseteq A$ y $X \setminus U$ es γ-cerrado. Por hipótesis, $X \setminus U \subseteq int^{\gamma}(A)$ en consecuencia, $cl^{\gamma}(X \setminus A) = X \setminus int^{\gamma}(A) \subseteq U$, de donde se obtiene que $cl^{\gamma}(X \setminus A) \subseteq U$, lo cual implica que $X \setminus A$ es un conjunto γ-cerrado generalizado y en consecuencia, A es γ-abierto generalizado. ■

Definición 2.8 *[15] Una función $f : X \to Y$ se dice:*

- *γ-continua si $f^{-1}(U)$ es γ-abierto en X para cada abierto U en Y.*
- *γ-continua escasa si $f^{-1}(U)$ es γ-abierto en X para cada conjunto clopen U en Y.*

Teorema 2.6 *[15] Para una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ y γ un operador monótono asociado a τ, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es γ-continua escasa.

(2) $f^{-1}(U)$ *es* γ*-cerrado en* X *para cada conjunto clopen* U *en* Y*.*

(3) $f^{-1}(U)$ *es* γ*-clopen en* X *para cada conjunto clopen* U *en* Y*.*

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Sea U un conjunto clopen en Y, entonces $Y \setminus U$ es clopen en Y, por hipótesis tenemos que $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ es γ-abierto en X. Tomando complemento se obtiene que $f^{-1}(U)$ es γ-cerrado en X.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea U un conjunto clopen en Y, entonces $Y \setminus U$ es clopen en Y, por hipótesis, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(Y \setminus U)$ son γ-cerrados en X. Como $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$, se concluye que $f^{-1}(U)$ es γ-abierto en X, por tanto $f^{-1}(U)$ γ-clopen en X.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea U un conjunto clopen en Y, por hipótesis $f^{-1}(U)$ γ-clopen en X, en consecuencia, $f^{-1}(U)$ γ-abierto en X, y por tanto f es γ-continua escasa. ∎

2.2. (γ, γ')-continuidad

En esta sección se introducen nociones de continuidad bajo la noción de operador asociado a una topología. Se estudian las relaciones entre las funciones y caracterizaciones de algunas de ellas. Se presenta un nuevo marco conceptual de continuidad y funcion abierta y cerrada que enmarcan muchas de las existentes en la literatura clásica.

Definición 2.9 *Sean* (X, τ) *y* (Y, σ) *espacios topológicos,* γ*,* γ' *operadores monótonos asociados a las topologías* τ *y* σ*, respectivamente. Una función* $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *se dice:*

(1) (γ, γ')*-continua si* $f^{-1}(U)$ *es* γ*-abierto en* X *para cada* γ'*-abierto* U *en* Y*.*

(2) (γ, γ')*-abierta si* $f(U)$ *es* γ'*-abierto en* Y *para cada* γ*-abierto* U *en* X*.*

(3) (γ, γ')*-cerrada si* $f(U)$ *es* γ'*-cerrado en* Y *para cada* γ*-cerrado* U *en* X*.*

(4) (γ, γ')*-continua fuerte si* $f^{-1}(U)$ *es* γ*-clopen en* X *para cada* γ'*-abierto* U *en* Y*.*

(5) (γ,γ')*-clopen si* $f(U)$ *es* γ'*-clopen en* Y *para cada* γ*-clopen* U *en* X*.*

(6) (γ,γ')*-abierta débil si* $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$ *para cada* γ*-abierto* U *en* X*.*

(7) (γ,γ')*-contra abierta si* $f(U)$ *es* γ'*-cerrado en* Y *para cada* γ*-abierto* U *en* X*.*

(8) (γ,γ')*-contra cerrada si* $f(U)$ *es* γ'*-abierto en* Y *para cada* γ*-cerrado* U *en* X*.*

(9) (γ,γ')*-cerrada débil si* $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) \subseteq f(U)$ *para cada* γ*-cerrado* U *en* X*.*

(10) Satisface la condición (γ,γ')*-abierta débil interior si* $int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U))) \subseteq f(U)$ *para cada* γ*-abierto* U *en* X*.*

(11) (γ,γ')*-continua escasa si* $f^{-1}(U)$ *es* γ*-abierto en* X *para cada* γ'*-clopen* U *en* Y*.*

El siguiente ejemplo exhibe la existencia de funciones (γ,γ')-continuas.

Ejemplo 2.12 *Sea* $X = \{x,y,z\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z\}\}$, $Y = \{a,b,c\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.
Considere $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ *definida por:* $f(x) = a$, $f(y) = b$ *y* $f(z) = c$.
$2^X = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}\}$.
Los cerrados en X*:* $\emptyset, X, \{y,z\}, \{x,z\}, \{z\}, \{x\}$.
Los regulares abiertos en X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y,z\}$.
Los δ*-abiertos en* X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y,z\}$.
Los δ*-cerrados en X:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y,z\}$.
Los δ*-pre-abiertos en* X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}$.
Observe que para todo $U \in \sigma$, $f^{-1}(U)$ *es* δ*-pre-abierto, por tanto* f *es una función* δ*-pre-continua.*
Sea $\gamma : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int(\delta cl(A))$ *y* $\gamma' : 2^Y \to 2^Y$, $\gamma'(A) = int(A)$*, entonces* f *es una función* (γ,γ')*-continua.*

El siguiente ejemplo muestra la existencia de funciones (γ,γ')-abiertas.

Ejemplo 2.13 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$ *y* $\sigma = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$. *Considere* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *la función identidad. Observe que si* $U \in \tau$, $f(U) = U \in \sigma$, *como todo conjunto abierto es b-abierto se concluye que* f *es b-abierta.*
Sea $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$ *y* $\gamma'(A) = cl_\sigma(int_\sigma(A)) \cup int_\sigma(cl_\sigma(A))$, *entonces* f *es* (γ, γ')*-abierta.*

El siguiente ejemplo presenta la existencia de funciones (γ, γ')-cerradas.

Ejemplo 2.14 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$ *y* $\sigma = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$. *Considere* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *la función identidad. Los cerrados en* (X, τ) *son:* $\emptyset$, X, $\{a, c\}$
y $\{a\}$ *y los cerrados en* (X, σ) *son:* $\emptyset$, X, $\{a, c\}$, $\{a, b\} y \{a\}$. *Observe que si* F *es cerrado en* (X, τ), $f(F) = F$ *el cual es cerrado* (X, σ). *Como todo conjunto cerrado es b-cerrado, se concluye que* f *es b-cerrada.*
Sea $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$, $\gamma'(A) = cl_\sigma(int_\sigma(A)) \cup int_\sigma(cl_\sigma(A))$ *se obtiene que* f *es* (γ, γ')*-cerrada.*

El siguiente ejemplo exhibe la existencia de funciones (γ, γ')-continuas fuerte.

Ejemplo 2.15 *Sea* $X = \{a, b\}$, $\tau = 2^X$, $Y = \{x, y, z\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ *y* $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *una función definida por:* $f(a) = y$, $f(b) = x$. *Como* $\tau = 2^X$, *entonces los siguientes conjuntos son clopen en* X*;*

$$\begin{array}{llll} f^{-1}(\emptyset) = \emptyset & f^{-1}(\{x\}) = b & f^{-1}(\{y\}) = a & f^{-1}(\{z\}) = \emptyset \\ f^{-1}(\{x, y\}) = X & f^{-1}(\{x, z\}) = b & f^{-1}(\{y, z\}) = a & f^{-1}(Y) = X \end{array}$$

Por tanto f *es continua fuerte.*
Si se define $\gamma : 2^X \to 2^X$ *como* $\gamma(A) = int(A)$ *y* $\gamma' : 2^Y \to 2^Y$ *por* $\gamma'(A) = A$ *se obtiene que* f *es una función* (γ, γ')*-continua fuerte.*

El siguiente ejemplo muestra la existencia de funciones (γ, γ')-clopen.

Ejemplo 2.16 *Sea* $X = \{x, y, z\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}\}$.
$Y = \{a, b, c\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}\}$.
Considere $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *definida por:* $f(x) = a$, $f(y) = b$ *y* $f(z) = c$.
Los cerrados en X*:* $\emptyset, X, \{y, z\}, \{x, z\}, \{z\}, \{x\}$.
Los cerrados en Y*:* $\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}$.
Regulares abiertos en X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y, z\}$.
Regulares abiertos en Y*:* $\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}$.
δ*-abiertos en* X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y, z\}$.
δ*-abiertos en* Y*:* $\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}$.
δ*-cerrados en* X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y, z\}$.
δ*-cerrados en* Y*:* $\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}$.
δ*-pre-abiertos en* X*:* $\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$.
δ*-pre-abiertos en* Y*:* $\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.
Observe que para todo conjunto U δ*-pre-clopen en* X, $f(U)$ *es* δ*-pre-clopen en* Y, *por tanto* f *es una función pre-*δ*-pre-clopen total.*
Si se define $\gamma : 2^X \to 2^X$ *tal que* $\gamma(A) = int(\delta cl(A))$ *y* $\gamma' : 2^Y \to 2^Y$ *por* $\gamma'(A) = int(\delta cl(A))$ *se obtiene que* f *es una función* (γ, γ')*-clopen.*

El siguiente ejemplo presenta la existencia de funciones (γ, γ')-abiertas débiles.

Ejemplo 2.17 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$ *y* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *la función identidad.*
Los cerrados en (X, τ) *son:* $\emptyset$, X, $\{b, c\}$, $\{a, b\}$ *y* $\{b\}$.
Los cerrados en (X, σ) *son:* $\emptyset$, X, $\{a, c\}$ *y* $\{a\}$.
Puesto que todo conjunto abierto es b-abierto y además $\{a, b\} \subseteq int_\sigma(cl_\sigma(\{a, b\})) \cup cl_\sigma(int_\sigma(\{a, b\})) = X$, *se tiene que los siguientes conjuntos son b-abiertos en* (X, σ)*;*

$$f(cl_\tau(\emptyset)) = \emptyset \qquad f(cl_\tau(X)) = X \qquad f(cl_\tau(\{a\})) = \{a, b\}$$
$$f(cl_\tau(\{c\})) = \{b, c\} \qquad f(cl_\tau(\{a, c\})) = X$$

En consecuencia, $f(U) \subseteq bint_\sigma(f(cl_\tau(U)))$ *para cada* $U \in \tau$ *y por tanto* f *es b-abierta débil.*
Si se define $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$ *como* $\gamma(A) = int_\tau(A)$ *y* $\gamma'(A) = int_\sigma(cl_\sigma(A)) \cup cl_\sigma(int_\sigma(A))$*, se obtiene que* f *es una función* (γ, γ')*-abierta débil.*

El siguiente ejemplo exhibe la existencia de funciones (γ, γ')-contra abiertas y (γ, γ')-contra cerradas.

Ejemplo 2.18 *Sea* $X = \{x, y, z\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}\}$.
$Y = \{a, b, c\}$, $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b, c\}\}$.
Considere $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ *definida por* $f(t) = a$ *para todo* $t \in X$*. Observe* $\{a\}$ *es un conjunto clopen, en consecuencia, si* $U \in \tau$, $f(U)$ *es cerrado y si* F *es un conjunto cerrado en* X, $f(F) \in \sigma$*. Por tanto* f *es una función contra-abierta y contra-cerrada.*
Si se define $\gamma : 2^X \to 2^X$ *como* $\gamma(A) = int(A)$ *y* $\gamma' : 2^Y \to 2^Y$, $\gamma'(A) = int(A)$*, se obtiene que* f *es una función* (γ, γ')*-contra abierta y* (γ, γ')*-contra cerrada.*

El siguiente ejemplo presenta la existencia de funciones (γ, γ')-cerradas débiles.

Ejemplo 2.19 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b, c\}\}$ *y* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *la función identidad.*
Los cerrados en (X, τ) *son:* $\emptyset$, X, $\{b, c\}$, $\{a, b\}$ *y* $\{b\}$.
Los cerrados en (X, σ) *son:* $\emptyset$, X, $\{a, c\}$ *y* $\{a\}$*. Observe que para cada cerrado en* X *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
\emptyset = bcl(f(int(\emptyset))) &\subseteq f(\emptyset) = \emptyset \\
X = bcl(f(int(X))) &\subseteq f(X) = X \\
\{c\} = bcl(f(int(\{b, c\}))) &\subseteq f(\{b, c\}) = \{b, c\} \\
\{a\} = bcl(f(int(\{a, b\}))) &\subseteq f(\{a, b\}) = \{a, b\} \\
\emptyset = bcl(f(int(\{b\}))) &\subseteq f(\{b\}) = \{b\}
\end{aligned}$$

Por tanto f es una función b-cerrada débil. Si se define $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$ como $\gamma(A) = int_\tau(A)$ y $\gamma'(A) = int_\sigma(cl_\sigma(A)) \cup cl_\sigma(int_\sigma(A))$, se obtiene que f es una función (γ, γ')-cerrada débil.

El siguiente ejemplo muestra la existencia de funciones que satisfacen la condición (γ, γ')-abierta débil interior.

Ejemplo 2.20 *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y considere $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ definida $f(a) = a$, $f(b) = f(c) = c$. Observe que para todo $U \in \tau$, $bint(f(cl(U))) \subseteq f(U)$ por lo que f satisface la condición b-abierta débil interior. Si se define $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$ y $\gamma'(A) = int_\sigma(cl_\sigma(A)) \cup cl_\sigma(int_\sigma(A))$, se obtiene que f satisface la condición (γ, γ')-abierta débil interior.*

El siguiente ejemplo exhibe la existencia de funciones (γ, γ')-continuas escasa.

Ejemplo 2.21 *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ y considere $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ definida $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Observe que para todo $U \in \sigma$, U es clopen y $f^{-1}(U) \in \tau$ lo cual dice que f es una función continua escasa. Si se define $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$ como $\gamma(A) = int_\tau(A)$ y $\gamma'(A) = int_\sigma(A)$, se obtiene que f es (γ, γ')-continua escasa.*

El siguiente teorema es una generalización de los Teoremas 1.10, 1.11, 1.12 y los Corolarios 1.1 y 1.2, para definiciones particulares de los operadores γ y γ'. También se obtiene [15, Teorema 2.8].

Teorema 2.7 *Sea (X, τ), (Y, σ) y (Z, ω) espacios topológicos, γ, γ' y γ'' operadores monótonos asociados a las topologías τ, σ y ω, respectivamente. Para las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ se tiene que:*

(1) Si f es (γ, γ')-continua fuerte, entonces es (γ, γ')-continua.

(2) Si f es (γ, γ')-contra cerrada, entonces es (γ, γ')-abierta débil.

(3) *Si f es (γ,γ')-abierta, entonces es (γ,γ')-abierta débil.*

(4) *Si f es (γ,γ')-contra abierta, entonces es (γ,γ')-cerrada débil.*

(5) *Si f es (γ,γ')-cerrada, entonces es (γ,γ')-cerrada débil*

(6) *Si f es (γ,γ')-abierta débil y satisface la condición (γ,γ')-abierta débil interior, entonces es (γ,γ')-abierta.*

(7) *Si f es (γ,γ')-continua, entonces es (γ,γ')-continua escasa.*

(8) *Si f es (γ,γ')-continua y g es (γ',γ'')-continua escasa, entonces $g\circ f : X \to Z$ es (γ,γ'')-continua escasa.*

Demostración:

(1) Sea U un conjunto γ'-abierto en Y, entonces como f es (γ,γ')-continua fuerte se tiene que $f^{-1}(U)$ es γ-clopen en X. Así, $f^{-1}(U)$ es γ-abierto en X y en consecuencia, f es (γ,γ')-continua.

(2) Sea U un conjunto γ-abierto en X, entonces $cl^{\gamma}(U)$ es un conjunto γ-cerrado en X, como f es (γ,γ')-contra cerrada se tiene que $f(cl^{\gamma}(U))$ es γ'-abierto en Y. Además, como $U \subseteq cl^{\gamma}(U)$ se tiene que,

$$f(U) \subseteq f(cl^{\gamma}(U)) = int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$$

De donde se obtiene que, $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$ y en consecuencia f es (γ,γ')-abierta débil.

(3) Sea U un conjunto γ-abierto en X, como f es (γ,γ')-abierta se tiene que $f(U)$ es γ'-abierto en Y. Puesto que $U \subseteq cl^{\gamma}(U)$ se tiene que,

$$f(U) = int^{\gamma'}(f(U)) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$$

De donde se obtiene que, $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$ y en consecuencia, f es (γ,γ')-abierta débil.

(4) Sea U un conjunto γ-cerrado en X, entonces $int^{\gamma}(U)$ es un conjunto γ-abierto en X, como f es (γ,γ')-contra abierta se tiene que $f(int^{\gamma}(U))$ es γ'-cerrado en Y. Así,

$$cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) = f(int^{\gamma}(U)) \subseteq f(U)$$

Así, $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) \subseteq f(U)$ lo cual implica que, f es (γ,γ')-cerrada débil.

(5) Sea U un conjunto γ-cerrado en X, entonces como f es (γ,γ')-cerrada se tiene que $f(U)$ es γ'-cerrado en Y. Puesto que $int^{\gamma}(U) \subseteq U$ se tiene que,

$$cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) \subseteq cl^{\gamma'}(f(U)) = f(U)$$

En consecuencia, $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) \subseteq f(U)$ lo cual implica que, f es (γ,γ')-cerrada débil.

(6) Sea U un conjunto γ-abierto en X, entonces como f es (γ,γ')-abierta débil y satisface la condición (γ,γ')-abierta débil interior, se tiene que $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U))) \subseteq f(U)$. Así, $f(U) = int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$, como $int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$ es un conjunto γ'-abierto se concluye que, $f(U)$ es γ'-abierto y en consecuencia, f es (γ,γ')-abierta.

(7) Sea U un conjunto γ'-clopen en Y, entonces U es γ'-abierto en Y. Como f es (γ,γ')-continua se tiene que $f^{-1}(U)$ es γ-abierto en X, en consecuencia, f es (γ,γ')-continua escasa.

(8) Sea U en conjunto γ''-clopen en Z, como g es (γ',γ'')-continua escasa, entonces $g^{-1}(U)$ es γ'-abierto en Y, y dado que f es (γ,γ')-continua, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g\circ f)^{-1}(U)$ es γ-abierto en X, en consecuencia, $g\circ f : X \to Z$ es (γ,γ'')-continua escasa. ∎

El siguiente ejemplo muestra una función (γ,γ')-continua que no es (γ,γ')-continua fuerte.

Ejemplo 2.22 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}$ *y* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *la función identidad. Si se define* $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$ *y* $\gamma'(A) = int_\sigma(A)$. *Observe que para todo* $U \in \sigma = \sigma^{\gamma'}$, $f^{-1}(U) = U \in \tau = \tau^\gamma$, *por tanto* f *es* (γ, γ')*-continua. Pero* $\{a\} \in \sigma^{\gamma'}$, $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ *no es un conjunto* γ*-clopen, por tanto* f *no es* (γ, γ')*-continua fuerte.*

El siguiente ejemplo muestra una función (γ, γ')-abierta débil que no es (γ, γ')-contra cerrada.

Ejemplo 2.23 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\sigma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ *y* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *definida* $f(c) = b$ *y* $f(a) = f(b) = c$. *Si se define* $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$ *y* $\gamma'(A) = int_\sigma(A)$. *Observe que para todo* $U \in \tau = \tau^\gamma$, $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^\gamma(U)))$ *por lo que* f *es* (γ, γ')*-abierta débil. Además,* $\{c\}$ *es* γ*-cerrado y* $f(\{c\}) = \{b\} \notin \sigma^{\gamma'}$, *por lo que* f *no es* (γ, γ')*-contra cerrada.*

El siguiente ejemplo exhibe una función (γ, γ')-abierta débil que no es (γ, γ')-abierta.

Ejemplo 2.24 *Sea* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset,\ X,\ \{c\},\ \{a\},\ \{a, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset,\ X,\ \{b\},\ \{a, b\},\ \{b, c\}\}$ *y* $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ *la función identidad. Si se define* $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$ *y* $\gamma'(A) = cl_\sigma(int_\sigma(A)) \cup int_\sigma(cl_\sigma(A))$. *Los siguientes conjuntos son* γ'*-abiertos:*

$$\begin{array}{lll} f(cl_\tau(\emptyset)) = \emptyset, & f(cl_\tau(X)) = X, & f(cl_\tau(\{c\})) = \{b, c\}, \\ f(cl_\tau(\{a\})) = \{a, b\}, & f(cl_\tau(\{a, c\})) = X. & \end{array}$$

Observe que para todo $U \in \tau = \tau^\gamma$, $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^\gamma(U)))$ *por lo que* f *es* (γ, γ')*-abierta débil. Por otra parte, observe que* $\{a\} \in \tau^\gamma$ *y* $f(\{a\}) = \{a\}$ *no es* γ'*-abierto, pues*

$$\{a\} \nsubseteq cl_\sigma(int_\sigma(\{a\})) \cup int_\sigma(cl_\sigma(\{a\})) = \emptyset$$

Por tanto f no es (γ, γ')-abierta.

El siguiente ejemplo exhibe una función (γ, γ')-cerrada débil que no es (γ, γ')-contra abierta.

Ejemplo 2.25 *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset,\ X,\ \{c\},\ \{a, c\}\}$, $\sigma = \{\emptyset,\ X,\ \{b\},\ \{b, c\}\}$ y $f : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ la función identidad. Si se define $\gamma, \gamma' : 2^X \to 2^X$, $\gamma(A) = int_\tau(A)$ y $\gamma'(A) = int_\sigma(A)$, entonces para cada conjunto γ-cerrado se tiene:*

$$\begin{aligned}
\emptyset = cl(f(int(\emptyset))) &\subseteq f(\emptyset) = \emptyset \\
X = cl(f(int(X))) &\subseteq f(X) = X \\
\emptyset = cl(f(int(\{a, b\}))) &\subseteq f(\{a, b\}) = \{a, b\} \\
\emptyset = bcl(f(int(\{b\}))) &\subseteq f(\{b\}) = \{b\}
\end{aligned}$$

Por tanto f es una función (γ, γ')-cerrada débil. Por otra parte, observe que $\{c\}$ es γ-abierto y $f(\{c\}) = \{c\}$ no es γ'-cerrado, por tanto f no es (γ, γ')-contra abierta.

El siguiente ejemplo muestra una función (γ, γ')-cerrada débil que no es (γ, γ')-cerrada.

Ejemplo 2.26 *Considere el Ejemplo 2.25, f es una función (γ, γ')-cerrada débil. Por otra parte, observe que $\{b\}$ es γ-cerrado y $f(\{b\}) = \{b\}$ no es γ'-cerrado, así f no es (γ, γ')-cerrada.*

El siguiente ejemplo exhibe una función (γ, γ')-abierta que no satisface la condición (γ, γ')-abierta débil interior.

Ejemplo 2.27 *Considere el Ejemplo 2.13, f es una función (γ, γ')-abierta. Pero*

$\{b\} \in \tau^\gamma$ *y*

$$\begin{aligned} int^{\gamma'}(f(cl^\gamma(\{b\}))) &= bint(f(cl(\{b\}))) \\ &= bint(f(X)) \\ &= bint(X) \\ &= X \\ &\not\subseteq \{b\} \\ &= f(\{b\}) \end{aligned}$$

Así, f no satisface la condición (γ, γ')-abierta débil interior.

El siguiente teorema es una generalización de los Teoremas 1.7 y 1.9.

Teorema 2.8 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función, γ y γ' operadores monótonos asociados a las topologías τ y σ respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) f es (γ, γ')-abierta débil.

(2) Para cada $x \in X$ y cada conjunto γ-abierto U tal que $x \in U$, existe un conjunto γ'-abierto V tal que $f(x) \in V \subseteq f(cl^\gamma(U))$.

(3) $f(int^\gamma(cl^\gamma(U))) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^\gamma(U)))$ para cada γ-abierto U en X.

(4) $f(int^\gamma(F)) \subseteq int^{\gamma'}(f(F))$ para cada γ-cerrado F en X.

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Sea $x \in X$ y U un conjunto γ-abierto tal que $x \in U$. Como f es (γ, γ')-abierta débil, entonces $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^\gamma(U)))$. Como $x \in U$, entonces $f(x) \in int^{\gamma'}(f(cl^\gamma(U)))$, esto implica que existe un conjunto γ'-abierto V tal que $f(x) \in V \subseteq f(cl^\gamma(U))$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea U un conjunto γ-abierto y $z \in f(int^\gamma(cl^\gamma(U)))$, entonces $z = f(x)$ para algún $x \in int^\gamma(cl^\gamma(U))$. Por hipótesis existe un conjunto γ'-abierto V tal que

$$z = f(x) \in V \subseteq f(cl^\gamma(int^\gamma(cl^\gamma(U))))$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} z \in V &= int^{\gamma'}(V) \\ &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U))))) \\ &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)). \end{aligned}$$

($3 \Rightarrow 4$) Sea F un conjunto γ-cerrado, entonces $cl^{\gamma}(F) = F$ e $int^{\gamma}(F)$ es γ-abierto, luego por hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} f(int^{\gamma}(F)) &\subseteq f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(int^{\gamma}(F)))) \\ &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(int^{\gamma}(F)))) \\ &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(F))) \\ &= int^{\gamma'}(f(F)). \end{aligned}$$

($4 \Rightarrow 1$) Sea U un conjunto γ-abierto, entonces $U = int^{\gamma}(U)$ y $cl^{\gamma}(U)$ es un conjunto γ-cerrado, luego por hipótesis se tiene que,

$$\begin{aligned} f(U) &= f(int^{\gamma}(U)) \\ &\subseteq f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U))) \\ &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U))) \end{aligned}$$

En consecuencia, $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$ y por tanto f es (γ, γ')-abierta débil. ∎

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 1.8.

Teorema 2.9 *Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función biyectiva, γ y γ' operadores monótonos asociados a las topologías τ y σ, respectivamente. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) f es (γ, γ')-abierta débil.

(2) $cl^{\gamma'}(f(U)) \subseteq f(cl^{\gamma}(U))$ para cada γ-abierto U en X.

(3) $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(F))) \subseteq f(F)$ *para cada* γ*-cerrado* F *en* X*.*

Demostración: $(1 \Rightarrow 3)$ Sea F un conjunto γ-cerrado en X, entonces $X \setminus F$ es γ-abierto en X, luego por hipótesis se tiene que,

$$\begin{aligned} f(X \setminus F) &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(X \setminus F))) \\ f(X \setminus F) &\subseteq int^{\gamma'}(f(X \setminus int^{\gamma}(F))) \\ f(X) \setminus f(F) &\subseteq int^{\gamma'}(f(X) \setminus f(int^{\gamma}(F))) \\ Y \setminus f(F) &\subseteq int^{\gamma'}(Y \setminus f(int^{\gamma}(F))) \\ Y \setminus f(F) &\subseteq Y \setminus cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(F))) \\ cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(F))) &\subseteq f(F). \end{aligned}$$

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea U un conjunto γ-abierto en X, entonces $X \setminus U$ es un conjunto γ-cerrado en X, luego por hipótesis se tiene que,

$$\begin{aligned} cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(X \setminus U))) &\subseteq f(X \setminus U) \\ cl^{\gamma'}(f(X \setminus cl^{\gamma}(U))) &\subseteq f(X \setminus U) \\ cl^{\gamma'}(f(X) \setminus f(cl^{\gamma}(U))) &\subseteq f(X) \setminus f(U) \\ cl^{\gamma'}(Y \setminus f(cl^{\gamma}(U))) &\subseteq Y \setminus f(U) \\ Y \setminus int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U))) &\subseteq Y \setminus f(U) \\ f(U) &\subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U))). \end{aligned}$$

En consecuencia $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(U)))$ y por tanto f es (γ, γ')-abierta débil.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea F un conjunto γ-cerrado en X, entonces $F = cl^{\gamma}(F)$ y puesto que $int^{\gamma}(F)$ es un conjunto γ-abierto en X se tiene por hipótesis que,

$$\begin{aligned} cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(F))) &\subseteq f(cl^{\gamma}(int^{\gamma}(F))) \\ &\subseteq f(cl^{\gamma}(F)) \\ &= f(F). \end{aligned}$$

($3 \Rightarrow 2$) Sea U un conjunto γ-abierto en X, entonces $U \subseteq int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U))$. Además, puesto que $cl^{\gamma}(U)$ es un conjunto γ-cerrado en X, por hipótesis se tiene que, $cl^{\gamma}(f(U)) \subseteq cl^{\gamma}(f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) \subseteq f(cl^{\gamma}(U))$. ∎

Teorema 2.10 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función biyectiva, γ y γ' operadores monótonos asociados a las topologías τ y σ, respectivamente. Entonces, f es (γ, γ')-abierta si y sólo si f es (γ, γ')-cerrada.*

Demostración: (Suficiencia) Sea f una función (γ, γ')-abierta y F un conjunto γ-cerrado en X, entonces $X \setminus F$ es γ-abierto en X. Como f es (γ, γ')-abierta, entonces

$$f(X \setminus F) = int^{\gamma'}(f(X \setminus F))$$

Puesto que f es inyectiva, se tiene que

$$f(X \setminus F) = f(X) \setminus f(F)$$

Además, como f es sobreyectiva, se obtiene que

$$f(X \setminus F) = Y \setminus f(F)$$

En consecuencia,

$$Y \setminus f(F) = int^{\gamma'}(Y \setminus f(F))$$

De donde se obtiene por dualidad que

$$Y \setminus f(F) = Y \setminus cl^{\gamma'}(f(F))$$

Tomando complemento, se concluye que $f(F) = cl^{\gamma'}(f(F))$. Así, $f(F)$ es γ'-cerrado y por tanto f es (γ, γ')-cerrada.

(Necesidad) Sea f una función (γ, γ')-cerrada y U un conjunto γ-abierto en X, entonces $X \setminus U$ es γ-cerrado en X. Como f es (γ, γ')-cerrada, entonces

$$f(X \setminus U) = cl^{\gamma'}(f(X \setminus U))$$

Puesto que f es inyectiva, se tiene que

$$f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U)$$

Además, como f es sobreyectiva, se obtiene que

$$f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$$

En consecuencia,

$$Y \setminus f(U) = cl^{\gamma'}(Y \setminus f(U))$$

De donde se obtiene por dualidad que

$$Y \setminus f(U) = Y \setminus int^{\gamma'}(f(U))$$

Tomando complemento, se concluye que $f(U) = int^{\gamma'}(f(U))$. Así, $f(U)$ es γ'-abierto y por tanto f es (γ, γ')-abierta. ∎

El siguiente teorema es una generalización de los Teoremas 1.14 y 1.16.

Teorema 2.11 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función, γ y γ' operadores monótonos asociados a las topologías τ y σ, respectivamente. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) f es (γ, γ')-cerrada débil.

(2) $cl^{\gamma'}(f(U)) \subseteq f(cl^{\gamma}(U))$ para cada γ-abierto U en X.

(3) $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) \subseteq f(cl^{\gamma}(U))$ para cada subconjunto U de X.

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Sea U un conjunto γ-abierto en X, entonces $cl^{\gamma}(U)$ es un conjunto γ-cerrado en X. Como f es (γ,γ')-cerrada débil, entonces

$$\begin{aligned} cl^{\gamma'}(f(U)) &= cl^{\gamma'}(f(int(U))) \\ &\subseteq cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) \\ &\subseteq f(cl^{\gamma}(U)). \end{aligned}$$

Por tanto $cl^{\gamma'}(f(U)) \subseteq f(cl^{\gamma}(U))$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea U cualquier subconjunto de X, entonces $int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U))$ es un conjunto γ-abierto en X, así por hipótesis se tiene que,

$$\begin{aligned} cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) &\subseteq f(cl^{\gamma}(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) \\ &\subseteq f(cl^{\gamma}(cl^{\gamma}(U))) \\ &= f(cl^{\gamma}(U)). \end{aligned}$$

Por tanto $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) \subseteq f(cl^{\gamma}(U))$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea U un subconjunto γ-cerrado en X, entonces $U = cl^{\gamma}(U)$. Por hipótesis se tiene que,

$$\begin{aligned} cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) &\subseteq cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(cl^{\gamma}(U)))) \\ &\subseteq f(cl^{\gamma}(U)) \\ &= f(U). \end{aligned}$$

Así, $cl^{\gamma'}(f(int^{\gamma}(U))) \subseteq f(U)$ lo cual implica que, f es (γ,γ')-cerrada débil. ∎

Definición 2.10 *Sea (X,τ) un espacio topológico y γ un operador monótono asociado a la topología τ. Se dice que X es un espacio γ-regular si para cada conjunto γ-cerrado F y cada $x \notin F$, existen conjuntos γ-abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$.*

El siguiente teorema caracteriza los espacios γ-regulares.

Teorema 2.12 *Sea (X, τ) un espacio topológico y γ un operador monótono asociado a la topología τ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) X es un espacio γ-regular.

(2) Para cada $x \in X$ y cada conjunto γ-abierto U, tal que $x \in U$, existe un conjunto γ-abierto V tal que $x \in V \subseteq cl^{\gamma}(V) \subseteq U$.

(3) Cada conjunto γ-cerrado F,

$$F = \bigcap \{cl^{\gamma}(V) : F \subseteq V \text{ y } V \text{ es } \gamma\text{-abierto}\}$$

(4) Si $A \cap U \neq \emptyset$ y U es un conjunto γ-abierto, existe un conjunto γ-abierto V tal que $A \cap V \neq \emptyset$ y $cl^{\gamma}(V) \subseteq U$.

(5) Si $A \cap F \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$ y F es un conjunto γ-cerrado, existen conjuntos γ-abiertos V, W tales que $A \cap V \neq \emptyset$, $F \subseteq W$ y $W \cap V = \emptyset$.

(6) Para cada conjunto γ-cerrado F y $x \notin F$, existen conjuntos U y V tales que, U es γ-abierto, V es γ-g abierto, $x \in U$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$.

(7) Si $A \cap F = \emptyset$ y F es un conjunto γ-cerrado, existen conjuntos U y V tales que, U es γ-abierto, V es γ-g abierto, $A \cap U \neq \emptyset$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$.

(8) Para cada conjunto γ-cerrado F,

$$F = \bigcap \{cl^{\gamma}(V) : F \subseteq V \text{ y } V \text{ es } \gamma\text{-g abierto}\}$$

.

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Suponga que $x \in U$ y U es un conjunto γ-abierto, entonces $X \setminus U$ es un conjunto γ-cerrado tal que $x \notin X \setminus U$. Por hipótesis, existen conjuntos γ-abiertos disjuntos V y W tales que $x \in V$ y $X \setminus U \subseteq W$. Observe que $V \subseteq X \setminus W \subseteq U$, como $X \setminus W$ es un conjunto γ-cerrado se tiene que $V \subseteq cl^{\gamma}(V) \subseteq X \setminus W \subseteq U$, por tanto $x \in V \subseteq cl^{\gamma}(V) \subseteq U$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Si F es un conjunto γ-cerrado y $x \notin F$, entonces $X \setminus F$ es un conjunto γ-abierto tal que $x \in X \setminus F$. Por hipótesis, existe un conjunto γ-abierto U tal que $x \in U \subseteq cl^{\gamma}(U) \subseteq X \setminus F$, así $F \subseteq X \setminus cl^{\gamma}(U)$. Sea $V = X \setminus cl^{\gamma}(U)$, entonces V es un conjunto γ-abierto y $F \subseteq V$, luego

$$F \subseteq \bigcap \{cl^{\gamma}V : F \subseteq V \ y \ V \ es \ \gamma\text{-}abierto\}.$$

Por otra parte, observe que $x \in U$, U es γ-abierto y $U \cap V = \emptyset$, lo cual implica que $x \notin cl^{\gamma}(V)$ de donde se obtiene que $cl^{\gamma}(V) \subseteq F$, en consecuencia,

$$\bigcap \{cl^{\gamma}V : F \subseteq V \ y \ V \ es \ \gamma\text{-}abierto\} \subseteq F$$

Por tanto,

$$\bigcap \{cl^{\gamma}V : F \subseteq V \ y \ V \ es \ \gamma\text{-}abierto\} = F$$

$(3 \Rightarrow 4)$ Suponga que U es un conjunto γ-abierto y $x \in A \cap U$, entonces $X \setminus U$ es un conjunto γ-cerrado y $x \notin X \setminus U$. Por hipótesis, existe un conjunto γ-abierto W tal que $X \setminus U \subseteq W$ y $x \notin cl^{\gamma}(W)$. Sea $V = X \setminus cl^{\gamma}(W)$, entonces V es un conjunto γ-abierto, $x \in V$ y $V \cap A \neq \emptyset$. Además, como $W \subseteq cl^{\gamma}(W)$ se tiene que, $V = X \setminus cl^{\gamma}(W) \subseteq X \setminus W \subseteq U$, luego $cl^{\gamma}(V) \subseteq cl^{\gamma}(X \setminus W) = X \setminus W \subseteq U$, en consecuencia, $cl^{\gamma}(V) \subseteq U$.

$(4 \Rightarrow 5)$ Suponga que $A \cap F \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$ y F es un conjunto γ-cerrado. Entonces $X \setminus F$ es un conjunto γ-abierto y $(X \setminus F) \cap A \neq \emptyset$. Por hipótesis, existe un conjunto γ-abierto V tal que $A \cap V \neq \emptyset$ y $cl^{\gamma}(V) \subseteq X \setminus F$. Sea $W = X \setminus cl^{\gamma}(V)$, entonces W es un conjunto γ-abierto, $F \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$.

$(5 \Rightarrow 6)$ Si F es un conjunto γ-cerrado y $x \notin F$, entonces para $y \in F$ se tiene que $\{x, y\} \cap F \neq \emptyset$ y $\{x, y\} \neq \emptyset$. Por hipótesis, existen conjuntos U y V γ-abiertos tales que $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$. Observe que $x \in U$, pues en caso contrario se tendría que $y \in U$, $y \in F \subseteq V$, lo que implica que $V \cap U \neq \emptyset$, lo cual no es cierto. Además, como todo conjunto γ-abierto es γ-g abierto, se tiene que existen conjuntos U y V tales que U es γ-abierto, V es γ-g abierto, $x \in U$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$.

($6 \Rightarrow 7$) Suponga que $A \cap F = \emptyset$ y F es un conjunto γ-cerrado, entonces si $x \in A$ se tiene que $x \notin F$. Por hipótesis, existen conjuntos U y V tales que U es γ-abierto, V es γ-g abierto, $x \in U$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$. Como $x \in A$ y $x \in U$, entonces $A \cap U \neq \emptyset$.

($7 \Rightarrow 8$) Si F es un conjunto γ-cerrado y $x \notin F$, entonces $\{x\} \cap F = \emptyset$. Por hipótesis, existen conjuntos U y V tales que U es γ-abierto, V es γ-g abierto, $\{x\} \cap U \neq \emptyset$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$. Observe que,

$$F \subseteq \bigcap \{cl^{\gamma}(V) : F \subseteq V \ y \ V \ es \ \gamma\text{-}g \ abierto\}$$

Por otra parte, como $x \cap U \neq \emptyset$, entonces $x \in U$ y puesto que U es γ-abierto y $V \cap U = \emptyset$ se concluye que $x \notin cl^{\gamma}(V)$, esto implica que $cl^{\gamma}(V) \subseteq F$, de donde se obtiene que

$$\bigcap \{cl^{\gamma}(V) : F \subseteq V \ y \ V \ es \ \gamma\text{-}g \ abierto\} \subseteq F$$

Por tanto,

$$F = \bigcap \{cl^{\gamma}(V) : F \subseteq V \ y \ V \ es \ \gamma\text{-}g \ abierto\}$$

($8 \Rightarrow 1$) Sea F un conjunto γ-cerrado y $x \notin F$. Entonces por hipótesis, existe un conjunto γ-g abierto W tal que $F \subseteq W$ y $x \notin cl^{\gamma}(W)$. Puesto que F es γ-cerrado y W es γ-g abierto tal que $F \subseteq W$, entonces $F \subseteq int^{\gamma}(W)$. Sea $U = X \setminus cl^{\gamma}(W)$ y $V = int^{\gamma}(W)$, entonces U y V son conjuntos γ-abiertos tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$, lo cual implica que X es un espacio γ-regular. ∎

El siguiente teorema es una generalización del Teorema 1.13.

Teorema 2.13 *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función, X un espacio γ-regular y γ, γ' operadores monótonos asociados a las topologías τ y σ, respectivamente. La función*

f es (γ, γ')-abierta débil si y sólo si f es (γ, γ')-abierta.

Demostración: Solo se muestra el sentido directo, pues el recíproco ya está demostrado en el Teorema 2.7 (3).

(Suficiencia) Suponga que f es (γ, γ')-abierta débil y sea U un subconjunto γ-abierto no vacío en X, entonces como X es un espacio γ-regular se tiene que para cada $x \in U$ existe un subconjunto γ-abierto G_x en X tal que

$$x \in G_x \subseteq cl^{\gamma}(G_x) \subseteq U.$$

Luego, $U = \bigcup\{G_x : x \in U\} \subseteq \bigcup\{cl^{\gamma}(G_x) : x \in U\}$, así

$$\begin{aligned} f(U) &= f(\bigcup\{G_x : x \in U\}) \\ &= \bigcup\{f(G_x) : x \in U\} \\ &\subseteq \bigcup\{int^{\gamma'}(f(cl^{\gamma}(G_x))) : x \in U\} \\ &\subseteq int^{\gamma'}(\bigcup\{f(cl^{\gamma}(G_x)) : x \in U\}) \\ &= int^{\gamma'}(f(\bigcup\{cl^{\gamma}(G_x) : x \in U\})) \\ &\subseteq int^{\gamma'}(f(U)) \end{aligned}$$

Así, $f(U) \subseteq int^{\gamma'}(f(U))$ lo cual implica que $f(U) = int^{\gamma'}(f(U))$ y por tanto f es (γ, γ')-abierta. ■

Capítulo 3

FUNCIONES $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-CONTINUAS, $\mu\mu'$-CONTINUAS, $\mu\mu'$-ABIERTAS Y ALGUNAS APLICACIONES

Muchas formas generalizadas de continuidad descansan en el hecho que la imagen inversa de un subconjunto por una función satisfaga cierta propiedad en el dominio cuando dicho subconjunto posea cierta propiedad en el codominio de la función. De manera similar, se tiene que diversas formas generalizadas de la noción de función abierta vienen expresadas por el comportamiento de las imágenes directas de una función con respecto a ciertas propiedades consideradas sobre el dominio y codominio, respectivamente. Estas propiedades a las que se hacen mención, pueden estar determinadas por ciertas estructuras, tales como una topología (caso más clásico y básico) o, como se mostró en el capítulo anterior, un operador asociado a una topología. También pueden venir determinadas por otras nociones tales como, una m-estructura ([6], [18], [26], [27], [25], [22], [23] [30])) o una topología generalizada ([2], [14], [13]), que si bien no se introdujeron en los capítulos anteriores puede consultarse las referencias dadas para ahondar en mayores detalles. En este capítulo, se introduce en forma abstracta nociones que engloban muchas de las formas generalizadas de continuidad y funciones abiertas. Se estudian éstas, a través de generalizaciones de los resultados obtenidos en [31] y daremos algunas aplicaciones en el caso de topologías generalizadas o estructuras minimales, exhibiendose así que no sólo podemos generalizar los resultados del capítulo anterior ([4],[7],[5],[15]), si no también que el estudio de muchas formas generalizadas de continuidad introducidas recientemente ([2], [6], [14], [13],[19], [26], [27], [25],[30]), puede reducirse a un sólo marco conceptual.

3.1. Funciones $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua

Considerando la noción de operaciones e ideal, en esta sección se introduce una noción de funciones continuas que permite reducir muchas formas generalizadas de continuidad.

Se comienza introduciendo una versión más general que la noción de $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continuidad introducida por Vielma y Rosas en [31]. En este caso, se consideran conjuntos no vacíos X e Y, un *ideal propio* $\mathcal{I}$ de X, y aplicaciones $\alpha, \beta : 2^X \to 2^X$ y $\theta, \partial : 2^Y \to 2^Y$ conocidas como *operaciones* ([14]), en lugar de operadores asociados, donde 2^X y 2^Y denotan partes de X y partes de Y, respectivamente. Recuerde que un *ideal* $\mathcal{I}$ en X ([17], [29]), no es más que una colección no vacía $\mathcal{I} \subseteq 2^X$ que satisface las dos condiciones siguientes:

(1) $A \in \mathcal{I}$ y $B \subseteq A$ implica que $B \in \mathcal{I}$;

(2) $A \in \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{I}$ implica que $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Además, se dice que el ideal es propio si $X \notin \mathcal{I}$.

Definición 3.1 *Una función $f : X \to Y$ se dice $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua, si $\alpha(f^{-1}(\partial(V)) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)) \in \mathcal{I}$ para todo $V \subseteq Y$.*

El orden parcial sobre 2^X dado por la inclusión conjuntista, induce un orden parcial $\leq$, sobre las operaciones en X, según lo siguiente:

$$\beta \leq \beta^* \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \subseteq X; \quad \beta(A) \subseteq \beta^*(A).$$

De manera similar, de las operaciones conjuntistas y funcionales, se derivan nuevas operaciones, dadas $\beta, \beta^* : 2^X \to 2^X$. Así, se definen:

$$(\beta \wedge \beta^*)(A) = \beta(A) \cap \beta^*(A),$$

$$(\beta \vee \beta^*)(A) = \beta(A) \cup \beta^*(A),$$

$$(\beta\beta^*)(A) = \beta(\beta^*(A)),$$

$$(X \setminus \beta)(A) = X \setminus \beta(A).$$

β y β^* se dicen *mutuamente duales* ([9]), si $\beta \wedge \beta^* = i_X$, donde $i_X(A) = A$ para todo $A \subseteq X$ denota la *operación identidad* sobre X.

Si bien en la Definición 3.1, no figuran las nociones de espacio topológico ni operador asociado, se tienen los siguientes resultados cuyas pruebas son similares a las dadas en [31].

Teorema 3.1 *Sean* $\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^* : 2^X \to 2^X$, $\theta, \theta^*, \partial : 2^Y \to 2^Y$ *operaciones,* $\mathcal{I}$ *un ideal en* X *y* $f : X \to Y$ *una función. Entonces:*

i) para β *monótona y* $\theta \leq \theta^*$*,* f $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$*-continua implica* f $(\alpha, \beta, \theta^*, \partial, \mathcal{I})$*-continua;*

ii) para $\alpha^* \leq \alpha$*,* f $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$*-continua implica* f $(\alpha^*, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$*-continua;*

iii) para $\beta \leq \beta^*$*,* f $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$*-continua implica* f $(\alpha, \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$*-continua.*

Demostración:

(i) Puesto que f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua, entonces para cada $V \subseteq Y$ se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

ahora como $\theta \leq \theta^*$, entonces $\theta(V) \subseteq \theta^*(V)$, así $f^{-1}(\theta(V)) \subseteq f^{-1}(\theta^*(V))$. Como β es monótona, se tiene que $\beta(f^{-1}(\theta(V))) \subseteq \beta(f^{-1}(\theta^*(V)))$ por tanto,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V))) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

en consecuencia, $\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V))) \in \mathcal{I}$ y por tanto f es $(\alpha, \beta, \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua.

(ii) Sea $V \subseteq Y$, como $\alpha^* \leq \alpha$ se tiene que,

$$\alpha^*(f^{-1}(\partial(V))) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial(V))),$$

de donde se obtiene que,

$$\alpha^*(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))$$

como f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

y dado que $\mathcal{I}$ es un ideal en X se concluye que,

$$\alpha^*(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

lo cual implica que, f es $(\alpha^*, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua.

(iii) Sea $V \subseteq Y$, como f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua se tiene que

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

como $\beta \leq \beta^*$, entonces

$$\beta(f^{-1}(\theta(V))) \subseteq \beta^*(f^{-1}(\theta(V))),$$

de donde se obtiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V))) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

en consecuencia,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

así se obtiene que f es $(\alpha, \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua. ∎

Teorema 3.2 *Sean $\alpha, \beta, \beta^* : 2^X \to 2^X$, $\theta, \theta^*, \partial : 2^Y \to 2^Y$ operaciones, $\mathcal{I}$ un ideal en X y $f : X \to Y$ una función. Entonces:*

i) f es $(\alpha, \beta, \theta \wedge \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua si y sólo si f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua y $(\alpha, \beta, \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua; siempre que β satisfaga $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$, cualesquiera sean $A, B \subseteq X$.

ii) f es $(\alpha, \beta \wedge \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua si y sólo si f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua y $(\alpha, \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua.

Demostración:

(i) (Necesidad) Si f es a la vez $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$ y $(\alpha, \beta, \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua, entonces para cada $V \subseteq Y$ se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I} \ \ y$$

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V))) \in \mathcal{I},$$

entonces,

$$[\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))] \cup [\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V)))] \in \mathcal{I}.$$

Pero,

$$\begin{aligned}
[\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))] \cup [\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V)))] &= \\
\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus [\beta(f^{-1}(\theta(V))) \cap \beta(f^{-1}(\theta^*(V)))] &= \\
\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta[f^{-1}(\theta(V)) \cap f^{-1}(\theta^*(V))] &= \\
\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta[f^{-1}(\theta(V) \cap \theta^*(V))] &= \\
\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta[f^{-1}(\theta \wedge \theta^*(V))],&
\end{aligned}$$

en consecuencia, f es $(\alpha, \beta, \theta \wedge \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua.

(Suficiencia) Si f es $(\alpha, \beta, \theta \wedge \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua, entonces para cada $V \subseteq Y$ se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta[f^{-1}(\theta \wedge \theta^*(V))] \in \mathcal{I},$$

de la implicación anterior se obtiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta[f^{-1}(\theta \wedge \theta^*(V))] =$$

$$[\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))] \cup [\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V)))] \in \mathcal{I},$$

lo cual implica que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I} \;\; y$$

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V))) \in \mathcal{I},$$

en consecuencia, f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua y $(\alpha, \beta, \theta^*, \partial, \mathcal{I})$-continua.

(ii) (Necesidad) Si f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua y $(\alpha, \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua, entonces para cada $V \subseteq Y$ se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I} \;\; y$$

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I}$$

entonces,

$$[\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))] \cup [\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V)))] \in \mathcal{I}$$

pero,

$$\begin{aligned}
[\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))] \cup [\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V)))] &= \\
\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus [\beta(f^{-1}(\theta(V))) \cap \beta^*(f^{-1}(\theta(V)))] &= \\
\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus (\beta \wedge \beta^*)(f^{-1}(\theta(V))),&
\end{aligned}$$

lo cual implica que, f es $(\alpha, \beta \wedge \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua.

(Suficiencia) Si f es $(\alpha, \beta \wedge \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua, entonces para cada $V \subseteq Y$ se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus (\beta \wedge \beta^*)(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I}$$

de la implicación anterior, se obtiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus (\beta \wedge \beta^*)(f^{-1}(\theta(V))) =$$

$$[\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))] \cup [\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V)))] \in \mathcal{I},$$

lo cual implica que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I} \quad y$$

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta^*(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

en consecuencia, f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua y $(\alpha, \beta^*, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua. ∎

Teorema 3.3 *Sean $\alpha, \beta : 2^X \to 2^X$, $\theta, \theta^*, \partial : 2^Y \to 2^Y$ operaciones e $\mathcal{I}$ un ideal en X. Si $f : X \to Y$ es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua y $\beta(f^{-1}(B)) \subseteq \beta f^{-1}(\theta^*(B))$, para todo $B \subseteq Y$, entonces f es $(\alpha, \beta, \theta^*\theta, \partial, \mathcal{I})$-continua.*

Demostración: Sea $V \subseteq Y$, entonces como f es $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continua se tiene que,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

considerando $B = \theta(V)$, por hipótesis se tiene que,

$$\beta(f^{-1}(\theta(V))) \subseteq \beta(f^{-1}(\theta^*(\theta(V)))) = \beta(f^{-1}(\theta^*\theta(V))),$$

así,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*\theta(V))) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

en consecuencia,

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*\theta(V))) \in \mathcal{I},$$

lo cual implica que, f es $(\alpha, \beta, \theta^*\theta, \partial, \mathcal{I})$-continua. ∎

3.2. $\mu\mu'$-continuidad

En esta sección se introducen dos nociones que permiten reducir muchas formas generalizadas de continuidad y de funciones abiertas a un sólo marco conceptual.

Sean X, Y conjuntos no vacíos y $\mu \subseteq 2^X$, $\mu' \subseteq 2^Y$ colecciones cualesquiera.

Definición 3.2 *Una función $f : X \to Y$ se dice $\mu\mu'$-continua si $f^{-1}(V) \in \mu$ siempre que $V \in \mu'$.*

Definición 3.3 *Una función $f : X \to Y$ se dice $\mu\mu'$-abierta, si $f(U) \in \mu'$ siempre que $U \in \mu$.*

Observación 3.1 *Una* topología generalizada *sobre un conjunto X ([13]), es una colección μ de subconjuntos de X, tal que $\emptyset \in \mu$ y μ es cerrada bajo uniones arbitrarias. Así, si en la Definición 3.2, μ y μ' son topologias generalizadas sobre X e Y, respectivamente, se tiene justamente la noción de* función (μ, μ')-continua *introducida en [13]. Mientras que, si en la Definición 3.3, μ y μ' son topologias generalizadas* *sobre X e Y, respectivamente, se tiene la noción de* función (μ, μ')-abierta *introducida en [19]. En [18], se introduce la noción de* estructura minimal *sobre un conjunto X, como una colección m_X de subconjuntos de X, tal que $\emptyset \in m_X$ y $X \in m_X$. Además, se dice que m_X tiene la propiedad de Maki si es cerrada bajo uniones arbitrarias. Luego, si en la Definición 3.2, $\mu = m_X$ y $\mu' = m_Y$ son estructuras minimales, se tiene la noción de* función (m_X, m_Y)-continua *([22]). Mientras que, si en la Definición 3.3, $\mu = m_X$ y $\mu' = m_Y$ se tiene la noción de* función (m_X, m_Y)-abierta *([23]). Por otra parte, también son casos particulares de la Definición 3.2, las formas generalizadas de continuidad introducidas en [27, Definición 2.6(vii)], [30, Definición 3.1], [30, Definición 3.13], [27, Definición 3.1], [27, Definición 3.2], y [6, Definición 4.1]. Así como también son caso particulares de la Definición 3.3, las nociones introducidas en [27, Definición 2.6(iii)-(vi)], [27, Definición 3.14], [25, Definición 3.3], [25, Definición 3.6], [25, Definición 3.7]. Otros casos particulares de la Definición 3.2, son los items: (1), (2), (5), (15)-(18), (23) de la Definición 1.13 y (1), (4), (11) de la Definición 2.9. Así como también otros casos particulares de la Definición 3.3, son los items: (3), (4), (6)-(14), (19)-(22) de la Definición 1.13 y (2), (3), (5)-(10) de la Definición 2.9.*

Cualquier colección μ de subconjuntos de un conjunto X, determina de manera natural una operación $\theta_\mu : 2^X \to 2^X$

$$\theta_\mu(A) = \begin{cases} A & \text{, si } A \text{ es un miembro de } \mu \\ \\ X & \text{, caso contrario} \end{cases}$$

En el caso que μ sea una topología generalizada, se tienen otras operaciones importantes por sus aplicaciones. Así, tenemos ([13]):

$$i_\mu(A) = \bigcup \{U : U \subseteq A \text{ y } U \in \mu\},$$

$$c_\mu(A) = \bigcap \{V : A \subseteq V \text{ y } X - V \in \mu\}.$$

Note que, siempre $i_\mu \leq i_X \leq \theta_\mu$. Similarmente, en el caso de una estructura minimal m_X en X, tenemos ([8]):

$$m_X\text{-}Int(A) = \bigcup\{U : U \subseteq A \text{ y } U \in m_X\},$$

$$m_X\text{-}Cl(A) = \bigcap\{V : A \subseteq V \text{ y } X - V \in m_X\}.$$

Note que, m_X-$Int \leq i_X \leq \theta_{m_X}$. Además m_X-$Int(A) = A$, si $A \in m_X$. Mientras que m_X-$Int(A) \in m_X$, siempre que m_X sea una estructura minimal con la propiedad de Maki ([8]).

Observación 3.2 *Toda estructura minimal con la propiedad de Maki es una topología generalizada. Pero no toda topología generalizada es una estructura minimal, salvo en el caso particular de una topología generalizada fuerte ([11]).*

Los siguientes resultados relacionan la noción $\mu\mu'$-continuidad, con la noción de $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$-continuidad, lo cual permitirá obtener en forma más expedita algunas propiedades de las funciones $\mu\mu'$-continuas.

Teorema 3.4 *Sean X, Y conjuntos no vacíos y sean $\mu \subseteq 2^X$, $\mu' \subseteq 2^Y$ colecciones arbitrarias. Si $X \in \mu$, entonces $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua si y sólo si $f : X \to Y$ es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua.*

Demostración:

(Suficiencia) Suponga que $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua. Sea V un subconjunto de Y perteneciente a μ'. Entonces, $\theta_{\mu'}(V) = V$ y $\theta_\mu(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$. Según esto, se tiene que

$$\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) = f^{-1}(V) = i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))).$$

Lo que trivialmente implica,

$$\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \subseteq i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))).$$

En el caso que V no pertenezca a μ', $\theta_{\mu'}(V) = Y$, entonces

$$\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \subseteq X = f^{-1}(Y) = i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))).$$

Así

$$\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) = \emptyset,$$

para todo subconjunto $V \subseteq Y$. En consecuencia, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua.

(Necesidad) Suponga ahora que $f : X \to Y$ es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Entonces $\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) = \emptyset$, para todo $V \subseteq Y$. Lo que implica que $\theta_\mu(f^{-1}(V)) \subseteq f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))$. Según esto, si para algún V_0 ocurre que V_0 pertenece a μ' y $f^{-1}(V_0)$ no está en μ, se tendría que $X \subseteq f^{-1}(V_0)$. Así $f^{-1}(V_0) = X$, que por hipótesis, implica que $f^{-1}(V_0)$ está en μ, lo cual es una contradicción. Así, $f^{-1}(V)$ está en μ siempre que V está en μ'. Es decir, f es $\mu\mu'$-continua. ∎

Inmediatas consecuencias del Teorema 3.4, de la Observación 3.1, y el hecho que $\emptyset \in \mathcal{I}$ para cada ideal $\mathcal{I}$ en X, son las siguientes.

Corolario 3.1 *Para una función $f : X \to Y$ y cualquier ideal $\mathcal{I}$, se tiene que:*

i) si $X \in \mu$ y f es (μ, μ')-continua, entonces f es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \mathcal{I})$-continua,

ii) si f es (m_X, m_Y)-continua, entonces f es $(\theta_{m_X}, i_X, \theta_{m_Y}, i_Y, \mathcal{I})$-continua.

Demostración:

i) Como $X \in \mu$ y f es $\mu\mu'$-continua, el Teorema 3.4, implica que, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Así, $\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) = \emptyset$, para todo $V \subseteq Y$. Puesto que, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, cualquiera sea el ideal $\mathcal{I}$, se concluye que, $\theta_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_X(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) \in \mathcal{I}$, lo cual implica que, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \mathcal{I})$-continua.

ii) Si f es (m_X, m_Y)-continua, entonces por el Teorema 3.4, f es $(\theta_{m_X}, i_X, \theta_{m_Y}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Así, $\theta_{m_X}(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_X(f^{-1}(\theta_{m_Y}(V))) = \emptyset$ para cada $V \subseteq Y$. Puesto que para cualquier ideal $\mathcal{I}$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, se concluye que, $\theta_{m_X}(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_X(f^{-1}(\theta_{m_Y}(V))) \in \mathcal{I}$, lo cual implica que, f es $(\theta_{m_X}, i_X, \theta_{m_Y}, i_Y, \mathcal{I})$-continua. ∎

En el caso que μ sea una topología generalizada, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.5 *Si μ es una topología generalizada tal que $X \in \mu$, y μ' es cualquier colección de subconjuntos de Y, entonces $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua si y sólo si $f : X \to Y$ es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua*

Demostración:

(Suficiencia) Suponga que $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua. Sea V un subconjunto de Y perteneciente a μ'. Entonces $\theta_{\mu'}(V) = V$ y $i_X(f^{-1}(V)) = i_\mu(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$. Según esto, se tiene que

$$i_X(f^{-1}(i_Y(V))) = f^{-1}(V) = i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))).$$

Lo que trivialmente implica,

$$i_X(f^{-1}(i_Y(V))) \subseteq i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))).$$

En el caso que V no pertenezca a μ', $\theta_{\mu'}(V) = Y$, y como $X \in \mu$, entonces

$$i_X(f^{-1}(i_Y(V))) \subseteq X = i_\mu(X) = i_\mu(f^{-1}(Y)) = i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))).$$

Así,

$$i_X(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) = \emptyset,$$

para todo subconjunto $V \subseteq Y$. En consecuencia, f es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua.

(Necesidad) Suponga ahora que $f: X \to Y$ es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Entonces $i_X(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) = \emptyset$, para todo $V \subseteq Y$. Lo que implica que $f^{-1}(V) \subseteq i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V)))$. Según esto, si para algún V_0 ocurre que V_0 pertenece a μ' y $f^{-1}(V_0)$ no está en μ, se tendría que $f^{-1}(V_0) \subseteq i_\mu(f^{-1}(V_0))$. Así $f^{-1}(V_0) = i_\mu(f^{-1}(V_0))$, que por hipótesis, implica que $f^{-1}(V_0)$ está en μ, lo cual es una contradicción. Así, $f^{-1}(V)$ está en μ siempre que V está en μ'. Es decir, f es $\mu\mu'$-continua. ∎

Observación 3.3 *De acuerdo a lo señalado en la Observación 3.2, la hipótesis del teorema anterior es satisfecha por cualquier topología generalizada fuerte μ sobre X, así como también por cualquier estructura minimal m_X con la propiedad de Maki. También se obtienen como casos particulares [15, Teorema 2.1] y [7, Teorema 3.2].*

Inmediatas consecuencias del Teorema 3.5, de las Observaciones 3.1 y 3.2, y el hecho que $\emptyset \in \mathcal{I}$ para cada ideal $\mathcal{I}$ en X, son las siguientes.

Corolario 3.2 *Para una función $f: X \to Y$ y cualquier ideal $\mathcal{I}$, se tiene que:*

i) si $X \in \mu$ y f es (μ, μ')-continua, entonces f es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \mathcal{I})$-continua,

ii) si f es (m_X, m_Y)-continua, entonces f es $(i_X, m_X\text{-}Int, \theta_{m_Y}, i_Y, \mathcal{I})$-continua, siempre que m_X tenga la propiedad de Maki.

Demostración:

i) Si f es (μ, μ')-continua, por el Teorema 3.5, f es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Así, $i_X(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_\mu(f^{-1}(\theta_{\mu'}(V))) = \emptyset$ para cada $V \subseteq Y$. Puesto que para cualquier ideal $\mathcal{I}$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, se concluye que f es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \mathcal{I})$-continua.

ii) Si f es (m_X, m_Y)-continua, como m_X tiene la propiedad de Maki, entonces por el Teorema 3.5, f es $(i_X, m_X\text{-}Int, \theta_{m_Y}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Así, $i_X(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus m_X\text{-}Int(f^{-1}(\theta_{m_Y}(V))) = \emptyset$ para cada $V \subseteq Y$. Puesto que para cualquier ideal $\mathcal{I}$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, se concluye que f es $(i_X, m_X\text{-}Int, \theta_{m_Y}, i_Y, \mathcal{I})$-continua. ∎

El Teorema 3.5, también generaliza el resultado obtenido por Vielma y Rosas en [31, Teorema 2.1], el cual se obtiene considerando $\mu = \tau$ y μ' es la intersección de los subconjuntos que poseen la propiedad P con la topología σ.

De manera similar al Teorema 3.5, también se tiene la siguiente caracterización para las funciones $\mu\mu'$-abiertas.

Teorema 3.6 *Una función $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-abierta si y sólo si $f : X \to Y$ es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua.*

Demostración:

(Suficiencia) Sea $B \subseteq Y$ y suponga que $x \in i_\mu(f^{-1}(B))$, por la definición de i_μ, existe un $U \in \mu$ tal que $x \in U \subseteq f^{-1}(B)$. De la inclusión $U \subseteq f^{-1}(B)$, se sigue que para cada $u \in U$ se tiene que $f(u) \in f(U) \subseteq f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Así, $f(u) \in f(U) \subseteq B$, por hipótesis, $f(U) \in \mu'$ lo cual implica que, $f(u) \in i_{\mu'}(B)$. En consecuencia, $u \in f^{-1}(i_{\mu'}(B))$. Esto nos dice que $x \in U \subseteq f^{-1}(i_{\mu'}(B))$, en consecuencia $x \in i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(B))$, resultando la inclusión, $i_\mu(f^{-1}(B)) \subseteq i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(B))$. Luego, $i_\mu(f^{-1}(i_Y(B))) \setminus i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(B)) \in \{\emptyset\}$, y así f es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua.

(Necesidad) Suponga ahora que $f : X \to Y$ es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Entonces $i_\mu(f^{-1}(B)) \setminus i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(B)) = \emptyset$, para todo $B \subseteq Y$. Lo que implica que $i_\mu(f^{-1}(B)) \subseteq i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(B))$. Según esto, dado cualquier U perteneciente a μ, si $B = f(U)$, se tiene que

$$U = i_\mu(U) \subseteq i_\mu(f^{-1}(f(U))) \subseteq i_\mu f^{-1}(i_{\mu'}(f(U))) \subseteq f^{-1}(i_{\mu'}(f(U)).$$

Así $f(U) \subseteq i_{\mu'}(f(U)$ y entonces $f(U) = i_{\mu'}(f(U))$, que por hipótesis implica que $f(U)$ pertenece a μ', en consecuencia $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-abierta. ∎

Corolario 3.3 *Para una función $f : X \to Y$ y cualquier ideal $\mathcal{I}$, se tiene que:*

i) si f es (μ, μ')-abierta, entonces f es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \mathcal{I})$-continua,

ii) si f es (m_X, m_Y)-abierta, entonces f es $(m_X\text{-}Int, m_X\text{-}Int, m_Y\text{-}Int, i_Y, \mathcal{I})$-continua, siempre que m_Y tenga la propiedad de Maki.

Demostración:

i) Si f es (μ, μ')-abierta, por el Teorema 3.6, f es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y esto es, $i_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(V))) = \emptyset$ para cada $V \subseteq Y$. Puesto que para cualquier ideal $\mathcal{I}$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, se concluye que f es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \mathcal{I})$-continua.

ii) Si f es (m_X, m_Y)-abierta y m_Y tiene la propiedad de Maki, por el Teorema 3.6, f es $(m_X\text{-}Int, m_X\text{-}Int, m_Y\text{-}Int, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y esto es, $m_X\text{-}Int(f^{-1}(i_Y(V))) \setminus m_X\text{-}Int(f^{-1}(m_Y\text{-}Int(V))) = \emptyset$ para cada $V \subseteq Y$. Puesto que para cualquier ideal $\mathcal{I}$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, se concluye que f es $(m_X\text{-}Int, m_X\text{-}Int, m_Y\text{-}Int, i_Y, \mathcal{I})$-continua. ■

3.3. Algunas aplicaciones

En esta sección se emplean los resultados obtenidos en las secciones anteriores para obtener propiedades adicionales de las funciones $\mu\mu'$-continuas, y se muestran aplicaciones de éstas reemplazando μ y μ' por topologías generalizadas o estructuras minimales, en algunas situaciones particulares.

Observemos que si μ es una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, entonces $\theta_\mu(V) \in \mu$ para todo $V \subseteq X$. Así, $\theta_\mu(V) = i_\mu(\theta_\mu(V))$ cualquiera sea $V \subseteq X$. De donde se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.1 *Sea μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$. Entonces, f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua si y sólo si f es $(\theta_\mu, i_X, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua.*

Demostración: (Suficiencia) Sigue del Teorema 3.1, pues $i_\mu \leq i_X$.
(Necesidad) Si f es $(\theta_\mu, i_X, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua, entonces

$$\theta_\mu(f^{-1}(\partial(V))) \subseteq f^{-1}(\theta(V))$$

Luego,

$$\theta_\mu(f^{-1}(\partial(V))) = i_\mu(\theta_\mu(f^{-1}(\partial(V)))) \subseteq i_\mu(f^{-1}(\theta(V)))$$

En consecuencia,

$$\theta_\mu(f^{-1}(\partial(V))) \subseteq i_\mu(f^{-1}(\theta(V)))$$

Lo que dice que f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua. ∎

Como consecuencia inmediata del lema anterior y el Teorema 3.2, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.4 *Sea μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$. Entonces, f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta \wedge \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua si y sólo si f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_\mu, \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua.*

Demostración: (Suficiencia) Suponga que f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta \wedge \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua, entonces por el Lema 3.1, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta \wedge \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua. Luego, por el Teorema 3.2, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_X, \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua. Nuevamente, por el Lema 3.1, f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_\mu, \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua.

(Necesidad) Suponga que f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_\mu, \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua. Por el Lema 3.1, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_X, \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua, y por el Teorema 3.2, f es $(\theta_\mu, i_X, \theta \wedge \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua. Nuevamente, por el Lema 3.1, f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta \wedge \theta^*, \partial, \{\emptyset\})$-continua. ∎

Corolario 3.5 *Sean μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, y μ' una topología generalizada sobre Y. Si f es $(\theta_\mu, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_\mu, \Lambda, i_Y, \{\emptyset\})$-continua, entonces f es $\mu\mu'$-continua, donde $\Lambda = i_Y \vee (Y \setminus i_{\mu'}c_{\mu'})$.*

Demostración: Sea f una función que es $(\theta_\mu, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y $(\theta_\mu, i_\mu, \Lambda, i_Y, \{\emptyset\})$-continua, entonces por Corolario 3.4, f es $(\theta_\mu, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'} \wedge (i_Y \vee (Y \setminus i_{\mu'}c_{\mu'})), i_Y, \{\emptyset\})$-continua de donde se obtiene que f es $(\theta_\mu, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'} \wedge i_Y, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Puesto que $i_Y \leq \theta_{\mu'}$, del Teorema 3.1, f es $(\theta_\mu, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'} \wedge \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Nuevamente, por el Corolario 3.4, f es $(\theta_\mu, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y del Lema 3.1, se obtiene que f es $(\theta_\mu, i_X, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Ahora, el Teorema 3.4 permite concluir que f es $\mu\mu'$-continua. ∎

Observación 3.4 *Observe que según lo mostrado por Vielma y Rosas en [31, Teorema 2.1], la noción de continuidad es equivalente a la casi-continuidad más una condición de expansión ([9]). El resultado anterior, no sólo generaliza lo mostrado por Vielma y Rosas en [31, Teorema 2.1], sino que también permite concluir que todas las formas generalizadas de continuidad comentadas en la Observación 3.1, también son equivalentes a un tipo de casi-continuidad más un tipo de expansión.*

Corolario 3.6 *Sean μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, y μ' una topología generalizada sobre Y. Si f es $(i_X, i_\mu, c_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y $\mu\mu'$-abierta, entonces f es $(i_X, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua.*

Demostración: Observe que por el Teorema 3.6, $\mu\mu'$-abierta implica $i_\mu(f^{-1}(i_Y(V))) \subseteq i_\mu(f^{-1}(i_{\mu'}(V)))$. Según esto, y siendo f $(i_X, i_\mu, c_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua, el Teorema 3.3, permite concluir que f es $(i_X, i_\mu, i_{\mu'}c_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. ∎

El siguiente resultado, similar al Teorema **??**, proporciona una forma de descomposición ([9]) para las funciones $\mu\mu'$-abiertas.

Teorema 3.7 *Sean $f : X \to Y$ una función, β, β^* operaciones mutuamente duales sobre X y θ, θ^* operaciones mutuamente duales sobre Y. Si f es una función $\mu\mu'$-abierta, entonces f es $(i_\mu, \beta, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(i_\mu, \beta, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(i_\mu, \beta^*, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(i_\mu, \beta^*, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua, cualquiera sea el ideal $\mathcal{I}$.*

Demostración:

Siendo f una función $\mu\mu'$-abierta, por el Teorema 3.6, f es $(i_\mu, i_\mu, i_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Como i_μ es monótono, $i_{\mu'} \leq i_Y$, por Teorema 3.1 (i), f es $(i_\mu, i_\mu, i_Y, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Como $i_\mu \leq i_X$, por Teorema 3.1 (iii), f es $(i_\mu, i_X, i_Y, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Por hipótesis, f es $(i_\mu, i_X, \theta \wedge \theta^*, i_Y, \{\emptyset\})$-continua, y por Teorema 3.2 (i), f es $(i_\mu, i_X, \theta, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y $(i_\mu, i_X, \theta^*, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Por hipótesis, f es $(i_\mu, \beta \wedge \beta^*, \theta, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y $(i_\mu, \beta \wedge \beta^*, \theta^*, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Así, por Teorema 3.2 (ii), f es $(i_\mu, \beta, \theta, i_Y, \{\emptyset\})$-continua, $(i_\mu, \beta^*, \theta, i_Y, \{\emptyset\})$-continua, $(i_\mu, \beta, \theta^*, i_Y, \{\emptyset\})$-continua y $(i_\mu, \beta^*, \theta^*, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Puesto que para cualquier ideal $\mathcal{I}$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{I}$, se concluye que f es $(i_\mu, \beta, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(i_\mu, \beta^*, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(i_\mu, \beta, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua y $(i_\mu, \beta^*, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua. ■

Como inmediata aplicación del teorema anterior, tenemos.

Corolario 3.7 *Si $f : X \to Y$ es (m_X, m_Y)-abierta y m_X tiene la propiedad de Maki, entonces f es $(m_X\text{-}Int, \beta, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(m_X\text{-}Int, \beta, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua $(m_X\text{-}Int, \beta^*, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua y $(m_X\text{-}Int, \beta^*, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua; cualesquiera sea el ideal $\mathcal{I}$, β, β^* mutuamente duales y θ, θ^* mutuamente duales.*

Demostración: Suponga que f es (m_X, m_Y)-abierta, como m_X tiene la propiedad de Maki, β, β^* son mutuamente duales y θ, θ^* son mutuamente duales, por el Teorema 3.7, se concluye que f es $(m_X\text{-}Int, \beta, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(m_X\text{-}Int, \beta, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua, $(m_X\text{-}Int, \beta^*, \theta, i_Y, \mathcal{I})$-continua y $(m_X\text{-}Int, \beta^*, \theta^*, i_Y, \mathcal{I})$-continua; cualquiera sea el ideal $\mathcal{I}$. ■

La siguiente noción, extiende a un ámbito más amplio las nociones de espacio α-T_1 dada en [16], y de espacio θ-T_1, dada Definición 6 de [31].

Definición 3.4 *Sean μ una colección de subconjuntos de X y $\theta : 2^X \to 2^X$ una operación. Se dice que X es μ-T_1* relativo a *θ, si para cada par de elementos $x, y \in X$, $x \neq y$, existen conjuntos V y W pertenecientes a μ tales que $x \in V$, $y \notin \theta(V)$ y $y \in W$ and $x \notin \theta(W)$.*

Teorema 3.8 *Sean μ una topología generalizada sobre X, $\mu' \subseteq 2^Y$ una colección arbitraria, y $\alpha : 2^X \to 2^X$, $\theta, \partial : 2^Y \to 2^Y$ operaciones tales que $i_X \leq \alpha$ y $i_Y \leq \partial$. Si $f : X \to Y$ es $(\alpha, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y Y es μ'-T_1 relativo a θ, el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq y\}$ pertenece a μ cualquiera sea $y \in Y$.*

Demostración: Sean $y \in Y$ y $A = \{x \in X : f(x) \neq y\}$. Si $x \in A$, existen conjuntos V y W pertenecientes a μ', tales que $f(x) \in V$ y $y \notin \theta(V)$. Según la hipótesis, sigue que

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V)) \subseteq i_\mu(f^{-1}(\theta(V))) \subseteq f^{-1}(\theta(V)).$$

Así, existe un conjunto $U = i_\mu(f^{-1}(\theta(V)))$ tal que

$$\alpha(f^{-1}(\partial(V)) \subseteq U \subseteq f^{-1}(\theta(V)).$$

Por lo cual $f(U) \subseteq \theta(V)$. Ahora, si $z \in U \cap A^c$ entonces $f(z) \in \theta(V)$ y $f(z) = y \notin \theta(V)$. Lo cual es imposible, así $U \subseteq A$. Además, como

$$x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(\partial(V)) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial(V)) \subseteq U,$$

se tiene que $x \in U \subseteq A$, y en consecuencia $A = \{x \in X : f(x) \neq y\}$ pertenece a μ. ■

Consecuencias inmediatas de los Teoremas 3.8 y 3.5, son los siguientes corolarios los cuales generalizan propiedades conocidas de las funciones continuas clásicas, entre otras.

Corolario 3.8 *Sean μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, $\mu' \subseteq 2^Y$ una colección arbitraria. Si $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua y Y es μ'-T_1 relativo a $\theta_{\mu'}$, entonces $\{x \in X : f(x) \neq y\}$ pertenece a μ cualquiera sea $y \in Y$.*

Demostración: Como $X \in \mu$ y f es $\mu\mu'$-continua, el Teorema 3.5, implica que f es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Por hipótesis μ es una topología generalizada y Y

es μ'-T_1 relativo a $\theta_{\mu'}$, considerando $\alpha = i_X$, $\partial = i_Y$, el Teorema 3.8, nos permite concluir que el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq y\}$ pertenece a μ cualquiera sea $y \in Y$. ∎

Corolario 3.9 *Sean μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, $\mu' \subseteq 2^Y$ una colección arbitraria. Si $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua e inyectiva y Y es μ'-T_1 relativo a $\theta_{\mu'}$, entonces X es μ-T_1 relativo a θ_μ.*

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$, dado que f es inyectiva, entonces $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Como μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, f es $\mu\mu'$-continua y Y es μ'-T_1 relativo a $\theta_{\mu'}$, el Corolario 3.8, nos permite concluir que los conjuntos $V = \{x \in X : f(x) \neq y_1\}$ y $W = \{x \in X : f(x) \neq y_2\}$ pertenecen a μ. Observe que $x_1 \in W$, $x_2 \notin \theta_\mu(W)$ y y $x_2 \in V$, $x_1 \notin \theta_\mu(V)$, lo cual implica que X es μ-T_1 relativo a θ_μ. ∎

Observación 3.5 *Siendo que cada GT_2 es GT_1 ([19]), y como μ'-T_1 relativo a $\theta_{\mu'}$ es justamente GT_1, del Corolario 3.8 sigue que GT_2 es equivalente a que $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es g-cerrado ([19, Teorema 3.6]), usando el hecho que la función identidad es $\mu\mu$-continua. De manera similar se obtiene el ([6, Teorema 4.7]).*

Similarmente a la Definición 3.4, tenemos la siguiente noción la cual generaliza, entre otras, a las nociones de α-compacidad y γ-compacidad, dadas en [16] y [10], respectivamente.

Definición 3.5 *Sean μ una colección de subconjuntos de X, $\theta : 2^X \to 2^X$ una operación. Un subconjunto $K \subseteq X$ se dice μ-fuertemente compacto respecto a θ, si todo cubrimiento de K por miembros de μ, contiene una subcolección finita $\mathcal{F}$ tal que $\{\theta(F) : F \in \mathcal{F}\}$ cubre a K.*

Teorema 3.9 *Sean μ una topología generalizada sobre X, $\mu' \subseteq 2^Y$ una colección arbitraria y $\alpha : 2^X \to 2^X$, $\theta, \partial : 2^Y \to 2^Y$ operaciones tales que $i_X \leq \alpha$ y $i_Y \leq \partial$. Si $f : X \to Y$ es $(\alpha, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua y $K \subseteq X$ es μ-fuertemente compacto respecto a θ_μ, entonces $f(K)$ es μ'-fuertemente compacto respecto a θ.*

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento de $f(K)$ por subconjuntos de Y pertenecientes a μ'. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{V}$ es tal que, para cada $V \in \mathcal{V}$, $V \cap f(K) \neq \emptyset$. Según esto, para cada $k \in K$, existe $V_k \in \mathcal{V}$ y $f(k) \in V_k$. Siendo f $(\alpha, i_\mu, \theta, \partial, \{\emptyset\})$-continua, se tiene que

$$\alpha(f^{-1}(\partial V_k)) \subseteq i_\mu(f^{-1}(\theta V_k)) \subseteq f^{-1}(\theta V_k).$$

Así, para cada $k \in K$, existe un conjunto $W_k = i_\mu(f^{-1}(\theta V_k))$ que pertenece a μ tal que

$$\alpha(f^{-1}(\partial V_k)) \subseteq W_k \subseteq f^{-1}(\theta V_k).$$

Además, como $f^{-1}(V_k) \subseteq f^{-1}(\partial V_k) \subseteq \alpha(f^{-1}(\partial V_k))$ para cada $k \in K$, resulta que la colección $\{W_k : k \in K\}$ es un cubrimiento de K por miembros de μ. Luego, existe $k_1, \cdots, k_n$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{k_i}$. Por lo cual, $f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n f(W_{k_i})$ y en consecuencia

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \theta(V_k),$$

lo que nos dice que $f(K)$ es μ'-fuertemente compacto respecto a θ. ■

Corolario 3.10 *Sean μ una topología generalizada sobre X tal que $X \in \mu$, $\mu' \subseteq 2^Y$ una colección arbitraria. Si $f : X \to Y$ es $\mu\mu'$-continua y $K \subseteq X$ es μ-fuertemente compacto respecto a θ_μ, entonces $f(K)$ es μ'-fuertemente compacto respecto $\theta_{\mu'}$.*

Demostración: Como $X \in \mu$ y f es $\mu\mu'$-continua, por Teorema 3.5, f es $(i_X, i_\mu, \theta_{\mu'}, i_Y, \{\emptyset\})$-continua. Dado que μ es una topología generalizada y K es μ-fuertemente compacto respecto a θ_μ, considerando $\alpha = i_X$, $\partial = i_Y$, el Teorema 3.9, nos permite concluir que $f(K)$ es μ'-fuertemente compacto respecto $\theta_{\mu'}$. ■

Observación 3.6 *Del corolario anterior se obtienen [28, Proposición 4.2] y [28, Teorema 4.3], como casos particulares. Además, se observa que [28, Proposición*

4.2], es válido sin necesidad de tener una topología generalizada en el codominio. Sigue también del corolario anterior [2, Teorema 5.2] y [30, Teoremas 4.11 y 4.12].

Conclusiones

Como se notó en los capítulos vistos, en este trabajo se realizó un estudio detallado, principalmente, de algunas formas de continuidad y funciones abiertas. Utilizando la noción de operador asociado y una variante generalizada de la noción de conjunto γ-abierto dada por Császár, se estudiaron nociones de conjuntos que generalizan muchas de las existentes en la topología clásica, así como también nociones de continuidad y funciones abiertas que enmarcan muchas de las situaciones existentes en la literatura.

En el capítulo 3, considerando las nociones de operaciones e ideal, y μ, μ' colecciones cualesquiera de subconjuntos de un conjunto X no vacío, se introdujeron y estudiaron formas abstractas de continuidad y funciones abiertas, las cuales se presentaron en un marco conceptual que engloba todas las situaciones de los capítulos anteriores, y muchas otras existentes en la literatura que no se mencionan en este trabajo.

Cabe destacar que en los resultados obtenidos, para definiciones particulares de un operador, de una operación o de una colección μ de subconjuntos de un conjunto X no vacío, se obtienen muchas de las nociones y conceptos topológicos de la topología clásica.

Bibliografía

[1] Andrijevic, D., *On b-open sets*, Math. Vesnik, 48 (1996), 59-64.

[2] Arruda, L. E., *Generalized quotient topologies* , Acta Math. Hungar., 132(1-2) (2011), 193-195.

[3] Basu, C., Uzzal, B. y Ghosh, M., *A class of functions and separation axioms with respect to an operation*, Hacettepe J. of Math. and Stat., 38(2) (2009), 103-118.

[4] Bhuvaneswari, J., Carpintero, C., Rajesh, N. y Rosas, E., *Some new types of open and closed functions via b-open sets*, J. Adv. Res. Pure Math., 4(2) (2012), 76-87.

[5] Carpintero, C., Hussain, S., Rosas, E., Salazar, Y. y Ramírez, N., *γ-Regularity and γ-normality via extended notions of γ-open sets due to Császár*, 21(2) (2012), 143-150.

[6] Carpintero, C., Rajesh, N. y Rosas, E., *M-Preopen sets in biminimal spaces*, Demonstratio Mathematica, 45(4) (2012), 953-961.

[7] Carpintero, C., Rajesh, N. y Rosas, E., *On totally δ-precontinuos functions*, J. Adv. Res. Applied Math., 2(3) (2010), 64-72.

[8] Carpintero, C., Rosas, E. y Salas, M., *Minimal structures and separation properties*, IJPAM, 34(3) (2007), 473-488.

[9] Colasante, M., *On almost continuous functions and expansion of open sets*, Divulgaciones Matematicas, 11(2) (2003), 127-136.

[10] Császár, Á., *γ-Compact spaces*, Acta Math. Hungar., 87(1-2) (2000), 99-107.

[11] Császár, Á., *Extremally disconnected generalized topologies*, Annales Univ. Sci. Budapest., 47 (2004), 91-96.

[12] Császár, Á., *Generalized open sets*, Acta Math. Hungar., 75 (1997), 65-87.

[13] Császár, Á., *Generalized topology, generalized continuity*, Acta Math. Hungar., 96 (2012), 351-357.

[14] Császár, Á., *Weak structures*, Acta Math. Hungar., 131(1-2) (2011), 193-195.

[15] Ekici, E. y Caldas, M., *Slightly γ-continuous functions*, Bol. Soc. Paran. Mat., 22(2) (2004), 66-74.

[16] Kasahara S., *Operator-compact spaces*, Math. Japon., 24(1) (1979), 97-105.

[17] Kuratowski, K., *Topology*, Academic Press, New York, (1966).

[18] Maki, H., Umehara, J. y Noiri, T., *Every topological space is pre $T_{1/2}$*, Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ. Ser. A Math., 17 (1996), 33-42.

[19] Min, W. K, *Some results on generalized topological spaces and generalized sistems*, Acta Math. Hungar., 108(1-2) (2005), 171-181.

[20] Noiri, T. y Keskin, A., *Λ_I-Sets and some weak separation axioms*, Int. J. of Math. Analysis, 5(11) (2011), 539-548.

[21] Ogata H., *Operations on topological spaces and associated topology*, Math. Japon., 36(1) (1991), 175-184.

[22] Popa, V. y Noiri, T., *On m continuous functions*, Anal. Univ. "Dunarea Jos-Galati". Ser. Math. Fiz. Mec. Teor. Fas. II., 18(23) (2000), 31-41.

[23] Popa, V. y Noiri, T., *On the definitions of some forms of continuity under minimal conditions m-continuous functions*, Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ. Ser. A Math., 22 (2001), 9-18.

[24] Raychaudhuri, S. y Mukherjee, N., *On δ-almost continuity and δ-preopen sets*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 21 (1993), 357-366.

[25] Rosas, E., Carpintero. C., Oya, B. y Rajesh, N., *On* (m_X, m_Y) *approximately semi open maps between* m_X *spaces*, Bol. Mat, 17(1) (2010), 37-58.

[26] Rosas, E., Carpintero, C. y Oya. B., *Common framework for diferent concepts of open sets and continuity based on minimal structures and* m*-operators*, Arab. J. Sci. Eng., 34(2A) (2009), 187-194.

[27] Rosas, E., Rajesh, N. y Carpintero. C., (m, m')*-Weakly open maps*, J. Adv. Res. Pure Math., 2(1) (2010), 43-56.

[28] Shen, R., *Remarks on products of generalized topologies*, Acta Math. Hungar., 124(4) (2009), 363-369.

[29] Vaidyanathaswamy, R., *The localisation theory in set topology*, Proc. Indian Acad. Sci, 20 (1945), 51-56.

[30] Vásquez, L., Salas, M. y Rosas, E., *Functions almost contra-super-continuity in* m*-spaces*, Bol. Soc. Paran. Mat., 29(2) (2011), 15-36.

[31] Vielma, J. y Rosas, E., $(\alpha, \beta, \theta, \partial, \mathcal{I})$*-Continuous mappings and their decomposition,* Divulgaciones Matemáticas, 12(1) (2004), 53-64.

Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	**FORMAS GENERALIZADAS DE CONTINUIDAD Y DE FUNCIONES ABIERTAS A TRAVÉS DE OPERACIONES E IDEALES**
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
CARVAJAL M., DARWING Y.	CVLAC	15741140
	e-mail	dycm123@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Operador asociado a una topología
Operador monótono
Conjunto gamma-abierto
Operaciones
Ideales
Formas de continuidad
Topología generalizada
Estructura minimal

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias Básicas	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo, se estudia una generalización de algunos tipos de funciones b-abiertas y b-cerradas, usando la noción de operadores asociados a una topología. Luego, utilizando las nociones de operaciones, ideal y colecciones cualesquiera de subconjuntos de un conjunto X no vacío, se estudia una nueva clase de funciones que generalizan las nociones antes mencionadas.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Carpintero F., Carlo R.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [X] JU [ ]
	CVLAC	08443180
	e-mail	carpintero.carlos@gmail.com
	e-mail	
Rosas R., Ennis R.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X]
	CVLAC	4049607
	e-mail	ennisrafael@gmail.com
	e-mail	
Salas B., Margot del V.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X]
	CVLAC	13016711
	e-mail	salasbrown@gmail.com
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2012	12	10

Lenguaje: SPA

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-carvajaldy.pdf	Aplication/pdf

Alcance:

Espacial: **NACIONAL** (Opcional)

Temporal: **INTEMPORAL** (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Nivel Asociado con el Trabajo: **LICENCIATURA**

Área de Estudio:

MATEMÁTICAS

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda ***"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009".***

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLAÑOS CURVELO
Secretario

C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009): "Los trabajos de grados son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y solo podrá ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Concejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Concejo Universitario, para su autorización".

Carvajal Darwing

Br. Darwing Carvajal
AUTOR 1

Carlos R Carpintero F

Dr. Carlos Carpintero
ASESOR

POR LA COMISIÓN DE TRABAJO DE GRADO