UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE ALGUNAS MODIFICACIONES DE Λ-CONJUNTOS Y NOCIONES ASOCIADAS, VÍA IDEALES SOBRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

EDUMER JERMAINNEL ACOSTA BRAZÓN

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2013

UN ESTUDIO DE ALGUNAS MODIFICACIONES DE Λ-CONJUNTOS Y NOCIONES ASOCIADAS, VÍA IDEALES SOBRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

APROBADO POR:

Dr. José Sanabria
Asesor Académico

Dra. Margot Salas
Jurado Principal

Dr. Orlando García
Jurado Principal

Agradecimiento

Primeramente a Dios, por darme fuerzas para seguir adelante en los momentos más difíciles.
A mis padres y a mi hermana Rosellys, en especial a mi madre Ismaris, por su apoyo incondicional y por recordarme la importancia de las cosas.
A mi esposa Dessiree, que siempre estuvo conmigo.
Al profesor José Sanabria, por su inmensa colaboración y ayuda como asesor.
Y a todos aquellos que me ayudaron a levantarme y seguir adelante.

Dedicatoria

A mi hija Evangeline Aurora, espero servirle de ejemplo para que en el futuro logre todas sus metas y sea una gran persona.

Índice general

Resumen

Dado un espacio topológico (X, τ) sobre el que se considera un ideal, se estudian las nociones de Λ_I-conjuntos, conjuntos I-g-cerrados, conjuntos Λ_I-cerrados, Λ_I^s-conjuntos, conjuntos I-gs-cerrados y conjuntos Λ_I^s-cerrados. Además, se caracterizan las propiedades de separación I-T_1, I-$T_{1/2}$, semi-I-T_1 y semi-I-$T_{1/2}$, las cuales generalizan algunas propiedades clásicas de separación. De igual manera, se introducen y caracterizan nuevas variantes de funciones continuas en términos de los conjuntos mencionados anteriormente, se investigan las relaciones existentes entre éstas y se estudia el comportamiento de nuevas nociones de compacidad y conexidad, bajo imágenes directas de este tipo de funciones.

Introducción

En 1966, Kuratowski [8] utiliza la idea de ideales sobre espacios topológicos para generalizar la noción de clausura de un conjunto, introduciendo el concepto de *función local* de un conjunto con respecto a un ideal y una topología. Posteriormente, en 1990, Jankovic y Hamlett [6] estudian ciertas propiedades locales y globales que involucran la noción de ideal sobre un espacio topológico. En particular, estos autores definen un operador clausura de Kuratowski, $\mathrm{Cl}^{\star}$, usando la noción de función local y demuestran que la topología generada por $\mathrm{Cl}^{\star}$ es más fina que la topología original del espacio. En 1992, Jankovic y Hamlett [7] introducen la noción formada por los conjuntos I-abiertos en espacios topológicos vía ideales, la cual es independiente de la clase formada por los conjuntos abiertos. Empleando el operador $\mathrm{Cl}^{\star}$, Hatir y Noiri [4], en 2002, definen las nociones de conjuntos α-I-abiertos, semi-I-abiertos y β-I-abiertos y utilizan estas nociones para obtener ciertas descomposiciones de continuidad. Las clases de conjuntos α-I-abiertos, semi-I-abiertos y β-I-abiertos están respectivamente contenidas en las clases de conjuntos α-abiertos, semi-abiertos y β-abiertos, introducidas por Njåstad [13], Levine [9] y El-Monsef, El-Deeb y Mahmoud [1], respectivamente.

La noción de conjunto cerrado generalizado (abreviado g-cerrado) y el axioma de separación $T_{1/2}$ fueron introducidos por Levine [10] en el año 1970. De igual forma, Maki [11] en 1996 introduce la noción de Λ-conjuntos en espacios topológicos, como los conjuntos que coinciden con su kernel, donde el kernel de un conjunto A es la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a A. En 1997, Arenas, Dontchev y Ganster [2] introducen y estudian las nociones de conjuntos λ-cerrados y λ-abiertos, empleando Λ-conjuntos y conjuntos cerrados. Además, estos autores utilizan los conjuntos λ-cerrados para caracterizar el axioma $T_{1/2}$.

En este contexto, Dontchev y Maki [3] en el año 1997 introducen las nociones de Λ_s-conjuntos y conjuntos semi-λ-cerrados de manera similar a los Λ-conjuntos introducidos en [11] y los conjuntos λ-cerrados introducidos en [2], reemplazando los conjuntos abiertos por los semi-abiertos.

Recientemente, algunos autores (ver [14] y [15]) se han dedicado a introducir y estudiar ciertas clases de Λ-conjuntos, conjuntos λ-cerrados, Λ_s-conjuntos, conjuntos semi-λ-cerrados y g-cerrados, reemplazando las clases de conjuntos abiertos y semi-abiertos por las de conjuntos I-abiertos y semi-I-abiertos, en el contexto de espacios topológicos dotados de un ideal. Este hecho motivó a realizar un estudio de propiedades topológicas relacionadas con las modificaciones de Λ-conjuntos antes mencionadas.

El aporte principal de este trabajo es la presentación organizada y detallada de resultados relacionados con la noción de Λ_I-conjuntos introducida por Noiri y Keskin [14] y la noción de Λ_I^s-conjuntos introducida por Sanabria, Rosas y Carpintero [15]. Además, se proporcionan nuevos ejemplos, contraejemplos y algunas pruebas que ayudan a mejorar la comprensión del tema en cuestión. También, se introducen y se estudian nuevas variantes de continuidad, así como nuevas nociones de compacidad y conexidad empleando ciertas clases de conjuntos derivadas de las nociones de Λ_I-conjuntos y Λ_I^s-conjuntos.

El trabajo está organizado en tres capítulos. En el primer capítulo se introducen algunos conceptos conocidos en el ambiente de topología general, y se estudian de manera generalizada empleando la noción de ideal sobre un espacio topológico, así como algunos resultados asociados con esta noción, los cuales se utilizarán a lo largo del trabajo.

En el segundo capítulo se introducen y estudian las nociones de Λ_I-conjuntos, conjuntos I-g-cerrados y Λ_I-cerrados. Se establecen caracterizaciones de dos propiedades de separación denominadas I-T_1 y I-$T_{1/2}$ usando Λ_I-conjuntos y conjuntos I-g-cerrados y Λ_I-cerrados, respectivamente. Además, se definen y se caracterizan las funciones Λ_I-continuas, cuasi-Λ_I-continuas y Λ_I-irresolutas. También, se introducen las nociones de Λ_I-compacidad y Λ_I-conexidad para estudiar su comportamiento bajo las imágenes directas de las nuevas variantes de continuidad definidas en este capítulo.

En el tercer capítulo se introducen y se estudian las nociones de Λ_I^s-conjuntos, conjuntos I-gs-cerrados y Λ_I^s-cerrados. Se establecen caracterizaciones de dos propiedades de separación denominadas semi-I-T_1 y semi-I-$T_{1/2}$ usando Λ_I^s-conjuntos y conjuntos I-gs-cerrados y Λ_I^s-cerrados, respectivamente. Se definen y se caracterizan las funciones Λ_I^s-continuas, cuasi-Λ_I^s-continuas y Λ_I^s-irresolutas. Además, se introducen las nociones de Λ_I^s-compacidad y Λ_I^s-conexidad para estudiar su comportamiento bajo las imágenes directas de las nuevas clase de funciones mencionadas anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen ciertas clases de conjuntos, los cuales generalizan las nociones clásicas de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados de un espacio topológico, a través del concepto de ideal sobre un espacio topológico. Se estudian también algunas propiedades relativas a estas clases de conjuntos, que serán empleadas en los próximos dos capítulos. En el desarrollo de este trabajo, $\mathrm{Int}(A)$ y $\mathrm{Cl}(A)$ denotarán el interior y la clausura de $A \subset X$, respectivamente. Para más detalles de los temas tratados en este capítulo se recomienda consultar [1], [4], [5], [6], [8], [9] y [11].

En el contexto de un espacio topológico se han definido las siguientes generalizaciones de conjuntos abiertos.

Definición 1.1 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice:*

(1) *Semi-abierto, si $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.*

(2) *Pre-abierto, si $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$.*

La familia de los conjuntos semi-abiertos (resp. pre-abiertos) se denota por $\mathrm{SO}(X, \tau)$ (resp. $\mathrm{PO}(X, \tau)$). Los complementos de los conjuntos semi-abiertos (resp. pre-abiertos) son llamados conjuntos semi-cerrados (resp. pre-cerrados). Para un subconjunto A de (X, τ), la semi-clausura (resp. pre-clausura), denotada por $\mathrm{sCl}(A)$ (resp. $\mathrm{pCl}(A)$), se define como la intersección de todos los conjuntos semi-cerrados (resp. pre-cerrados) de X que contienen al conjunto A.

A continuación se introduce la noción de conjunto cerrado generalizado (abreviado g-cerrado) junto con dos nuevas clases de conjuntos g-cerrados que serán generalizados en los capítulos posteriores.

Definición 1.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice:*

(1) *g-cerrado, si* $\mathrm{Cl}(A) \subset U$ *siempre que* $A \subset U$ *y* $U \in \tau$.

(2) *sg^*-cerrado, si* $\mathrm{Cl}(A) \subset U$ *siempre que* $A \subset U$ *y* $U \in SO(X, \tau)$.

(3) *pg^*-cerrado, si* $\mathrm{Cl}(A) \subset U$ *siempre que* $A \subset U$ *y* $U \in PO(X, \tau)$.

Seguidamente se introduce el concepto del kernel de un subconjunto de un espacio topológico introducido por Maki [11] y otros conceptos similares descritos mediante conjuntos semi-abiertos y conjuntos pre-abiertos.

Definición 1.3 *Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X.*

(1) *La intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a A se denomina kernel de A y se denota por* $\mathrm{Ker}(A)$. *Es decir,* $\mathrm{Ker}(A) = \bigcap\{U : A \subset U, U \in \tau\}$.

(2) *La intersección de todos los conjuntos semi-abiertos que contienen a A se denomina semi-kernel de A y se denota por* $\mathrm{sKer}(A)$. *Es decir,* $\mathrm{sKer}(A) = \bigcap\{U : A \subset U, U \in \mathrm{SO}(X, \tau)\}$.

(3) *La intersección de todos los conjuntos pre-abiertos que contienen a A se denomina pre-kernel de A y se denota por* $\mathrm{pKer}(A)$. *Es decir,* $\mathrm{pKer}(A) = \bigcap\{U : A \subset U, U \in \mathrm{PO}(X, \tau)\}$.

Puesto que uno de los objetivos principales de este trabajo es estudiar modificaciones de la noción de Λ-conjunto vía ideales sobre espacios topológicos, a continuación se define esta y otras nociones relacionadas con la misma.

Definición 1.4 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ) se dice:*

(1) *Λ-conjunto, si* $A = \mathrm{Ker}(A)$.

(2) *Λ_s-conjunto, si* $A = \mathrm{sKer}(A)$.

(3) Λ_p-*conjunto, si* $A = \mathrm{pKer}(A)$.

A continuación se introduce la noción de ideal sobre un espacio topológico, la cual permitirá introducir otras nociones que, en cierto sentido, generalizan a las nociones descritas en las Definiciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Definición 1.5 *Un ideal I sobre un espacio topológico (X, τ) es una colección no vacía de subconjuntos de X, que satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Si $A \in I$ y $B \subset A$, entonces $B \in I$ (hereditaria).*

(2) *Si $A \in I$ y $B \in I$, entonces $A \cup B \in I$ (aditiva).*

Observe que si I es un ideal, entonces $\emptyset \in I$, puesto que $\emptyset \subset A$ para cualquier $A \in I$.

Ejemplo 1.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes colecciones son ideales sobre X:*

(1) $\{\emptyset\}$ *y* $P(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

(2) *La colección $\mathfrak{F}$ de todos los subconjuntos finitos de (X, τ).*

(3) *La colección $\mathfrak{C}$ de todos los subconjuntos contables de (X, τ).*

(4) *La colección $\mathfrak{N}$ de todos los subconjuntos nunca densos de (X, τ).*

A lo largo de este trabajo, la terna (X, τ, I) denotará un espacio topológico (X, τ) junto con un ideal I sobre X y será simplemente llamado un espacio topológico.

Definición 1.6 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico. Para cada subconjunto A de X, se define la función local de A con respecto a I y τ de la siguiente manera:*

$$A^{\star}(I, \tau) = \{x \in X : U \cap A \notin I, \text{ para cada } U \in \tau(x)\},$$

donde $\tau(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$.

Cuando no exista confusión, se escribirá $A^\star$ en lugar de $A^\star(I, \tau)$. En el siguiente ejemplo se muestra que, en general, $X^\star$ es un subconjunto propio de X.

Ejemplo 1.2 *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ *y el ideal* $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. *Observe que* $X^\star = \{b, c\} \subsetneqq X$.

En el caso que $X^\star = X$ se tiene la siguiente definición.

Definición 1.7 *Un espacio topológico* (X, τ, I) *se dice que es un espacio Hayashi-Samuels (abreviado E.H.S.) si* $X^\star = X$ *ó equivalentemente,* $\tau \cap I = \{\emptyset\}$.

La noción de espacio Hayashi-Samuels también se menciona en la literatura denominando al ideal como τ-acotado o codenso.

Teorema 1.1 *Sea* (X, τ, I) *un espacio topológico. Para cada subconjunto* A *de* X*, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si* $I = \{\emptyset\}$, *entonces* $A^\star = \mathrm{Cl}(A)$.

(2) *Si* $I = P(X)$, *entonces* $A^\star = \emptyset$.

Demostración:
(1) Suponga que $I = \{\emptyset\}$, entonces $A^\star = \{x \in X : U \cap A \notin \{\emptyset\},\ \text{para cada } U \in \tau(x)\} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset,\ \text{para cada } U \in \tau(x)\} = \mathrm{Cl}(A)$.
(2) Suponga que $I = P(X)$, entonces $A^\star = \{x \in X : U \cap A \notin P(X),\ \text{para cada } U \in \tau(x)\} = \{x \in X : U \cap A \not\subseteq X,\ \text{para cada } U \in \tau(x)\} = \emptyset$. ∎

Lema 1.1 *Sea* (X, τ, I) *un espacio topológico. Si* A *y* B *son subconjuntos de* X, *entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) *Si* $A \subset B$, *entonces* $A^\star \subset B^\star$.

(2) $A^\star = \mathrm{Cl}(A^\star) \subset \mathrm{Cl}(A)$.

(3) $(A^\star)^\star \subset A^\star$.

(4) $\emptyset^\star = \emptyset$.

(5) $(A \cup B)^\star = A^\star \cup B^\star$.

(6) *Si* $U \in \tau$*, entonces* $U \cap A^\star = U \cap (U \cap A)^\star \subset (U \cap A)^\star$.

Demostración:

(1) Suponga que $x \notin B^\star$, entonces existe $U \in \tau(x)$ tal que $U \cap B \in I$ y como $A \subset B$ se tiene que $U \cap A \subset U \cap B$. Por la propiedad hereditaria de I, se sigue que $U \cap A \in I$ y por lo tanto, $x \notin A^\star$.

(2) Sea $x \in \mathrm{Cl}(A^\star)$ y $U \in \tau(x)$, entonces $U \cap A^\star \neq \emptyset$, por lo que existe un punto $y \in U \cap A^\star$, de modo que $y \in U$ y $y \in A^\star$. Puesto que $U \in \tau(y)$, entonces $U \cap A \notin I$ y así $x \in A^\star$. Por otra parte, dado que $A^\star \subset \mathrm{Cl}(A^\star)$ se concluye que $A^\star = \mathrm{Cl}(A^\star)$. Para demostrar que $\mathrm{Cl}(A^\star) \subset \mathrm{Cl}(A)$, suponga que $x \in \mathrm{Cl}(A^\star) = A^\star$ entonces $U \cap A \notin I$ para todo $U \in \tau(x)$, y así $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau(x)$, por lo que $x \in \mathrm{Cl}(A)$ y así $\mathrm{Cl}(A^\star) \subset \mathrm{Cl}(A)$.

(3) Por la parte (2), $A^\star = \mathrm{Cl}(A^\star) \subset \mathrm{Cl}(A)$ para cada subconjunto A de X. En particular, para $A^\star$ se tiene que $(A^\star)^\star \subset \mathrm{Cl}(A^\star) = A^\star$.

(4) Suponga que existe $x \in \emptyset^\star$ y sea $U \in \tau(x)$, entonces $U \cap \emptyset \notin I$ y $U \cap \emptyset = \emptyset$, por lo que $\emptyset \notin I$ y esto es una contradicción, pues $\emptyset \in I$. Por lo tanto, no existe un elemento $x \in \emptyset^\star$ y en consecuencia $\emptyset^\star = \emptyset$.

(5) Por la parte (1), tenemos que $A^\star \subset (A \cup B)^\star$ y $B^\star \subset (A \cup B)^\star$. Por lo tanto, $A^\star \cup B^\star \subset (A \cup B)^\star$. Para demostrar que $(A \cup B)^\star \subset A^\star \cup B^\star$, suponga que $x \notin A^\star \cup B^\star$, entonces existen $U \in \tau(x)$ y $V \in \tau(x)$ tales que $U \cap A \in I$ y $V \cap B \in I$. Puesto que $U \cap V \subset U$, entonces $(U \cap V) \cap A \subset U \cap A$ y como $U \cap A \in I$ se obtiene que $(U \cap V) \cap A \in I$. Análogamente, se puede concluir que

$(U\cap V)\cap B\in I$, por lo que $(U\cap V)\cap(A\cup B)=[(U\cap V)\cap A]\cup[(U\cap V)\cap B]\in I$, es decir, $(U\cap V)\cap(A\cup B)\in I$, en consecuencia $x\notin(A\cup B)^\star$.
(6) Sean $U\in\tau$, $x\in U\cap A^\star$ y $V\in\tau(x)$, entonces $x\in(U\cap V)$, $(U\cap V)\in\tau(x)$ y $x\in A^\star$, por lo que $V\cap(U\cap A)\notin I$ y $x\in(U\cap A)^\star$. De esta manera, $U\cap A^\star\subset(U\cap A)^\star$, $U\cap A^\star\subset U$ y se concluye que $U\cap A^\star\subset U\cap(U\cap A)^\star$. Por otra parte, la inclusión $U\cap A\subset A$ implica que $(U\cap A)^\star\subset A^\star$ y $U\cap(U\cap A)^\star\subset U\cap A^\star$. Por lo tanto, $U\cap A^\star=U\cap(U\cap A)^\star\subset(U\cap A)^\star$. ■

Lema 1.2 *Sea (X,τ,I) un espacio topológico y $\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) $(\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\})^\star\subset\bigcap\{A_\alpha^\star:\alpha\in\Delta\}$.

(2) $(\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\})^\star=\bigcup\{A_\alpha^\star:\alpha\in\Delta\}$, *si Δ es finito.*

Demostración:
(1) Para cada $\alpha\in\Delta$, se tiene que $\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\}\subset A_\alpha$ y por la parte (1) del Lema 1.1, $(\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\})^\star\subset A_\alpha^\star$. Por lo tanto, $(\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\})^\star\subset\bigcap\{A_\alpha^\star:\alpha\in\Delta\}$.
(2) Por la parte (5) del Lema 1.1, se tiene que $(A\cup B)^\star=A^\star\cup B^\star$ para cada par de subconjuntos A y B de X. Luego, si Δ es finito entonces por inducción matemática, se concluye que $(\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\})^\star=\bigcup\{A_\alpha^\star:\alpha\in\Delta\}$ ■

Recuerde que si $P(X)$ es el conjunto de partes de X, un operador clausura de *Kuratowski* es una función $\gamma:P(X)\to P(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\gamma(\emptyset)=\emptyset$.

(2) Si $A\in P(X)$, entonces $A\subset\gamma(A)$.

(3) Si $A,B\in P(X)$, entonces $\gamma(A\cup B)=\gamma(A)\cup\gamma(B)$.

(4) Si $A \in P(X)$, entonces $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$.

Además, $\{A \in P(X) : \gamma(A) = A\}$ es una colección de conjuntos cerrados para una topología sobre X.

Definición 1.8 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico. Para cada subconjunto A de X, se define $\mathrm{Cl}^\star(A)$ como la unión de A con $A^\star$, es decir, $\mathrm{Cl}^\star(A) = A \cup A^\star$.*

Observe que si $I = \{\emptyset\}$, entonces para cada subconjunto A de X tenemos que $\mathrm{Cl}^\star(A) = A \cup A^\star = A \cup \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(A)$.

Proposición 1.1 $\mathrm{Cl}^\star$ *es un operador clausura de Kuratowski.*

Demostración:
Se verifica que $\mathrm{Cl}^\star$ satisface las propiedades deseadas:
(1) Puesto que $\mathrm{Cl}^\star(\emptyset) = \emptyset^\star \cup \emptyset$ y $\emptyset^\star = \emptyset$, entonces $\mathrm{Cl}^\star(\emptyset) = \emptyset$.
(2) Si $A \in P(X)$, entonces $A \subset A^\star \cup A = \mathrm{Cl}^\star(A)$.
(3) Si $A, B \in P(X)$, se tiene que $\mathrm{Cl}^\star(A) \cup \mathrm{Cl}^\star(B) = (A \cup A^\star) \cup (B \cup B^\star) = (A \cup B) \cup (A^\star \cup B^\star) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^\star = \mathrm{Cl}^\star(A \cup B)$.
(4) Si $A \in P(X)$, entonces por la parte (2), $\mathrm{Cl}^\star(A) \subset \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Cl}^\star(A))$. Por otra parte, $\mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Cl}^\star(A)) = (\mathrm{Cl}^\star(A))^\star \cup \mathrm{Cl}^\star(A) = (A \cup A^\star)^\star \cup \mathrm{Cl}^\star(A) = A^\star \cup (A^\star)^\star \cup \mathrm{Cl}^\star(A) \subset A^\star \cup \mathrm{Cl}^\star(A) = \mathrm{Cl}^\star(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Cl}^\star(A)) = \mathrm{Cl}^\star(A)$. ■

En virtud del teorema anterior, si (X, τ, I) es un espacio topológico se denota por $\tau^\star$ a la topología generada por $\mathrm{Cl}^\star$, esto es, $\tau^\star = \{U \in P(X) : \mathrm{Cl}^\star(X - U) = X - U\}$. Los elementos de $\tau^\star$ son llamados $\tau^\star$-abiertos y el complemento de un $\tau^\star$-abierto es llamado $\tau^\star$-cerrado.

Lema 1.3 *Si $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es la colección de conjuntos $\tau^\star$-cerrados de un espacio topológico (X, τ, I), entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta'\}$ *es un conjunto* $\tau^\star$*-cerrado para cualquier subconjunto* Δ' *de* Δ.

(2) $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Delta_0\}$ *es un conjunto* $\tau^\star$*-cerrado para cualquier subconjunto finito* Δ_0 *de* Δ.

Demostración:
La prueba es una consecuencia inmediata de las leyes de De Morgan y la dualidad entre las nociones de conjuntos $\tau^\star$-abiertos y $\tau^\star$-cerrados. ∎

Proposición 1.2 *Un subconjunto* A *de un espacio topológico* (X, τ, I) *es* $\tau^\star$*-cerrado si y sólo si* $A^\star \subset A$.

Demostración:
Suponga que A es $\tau^\star$-cerrado, entonces $\mathrm{Cl}^\star(A) = A$. En consecuencia, $A^\star \cup A = A$ y por lo tanto, $A^\star \subset A$. Recíprocamente, suponga que $A^\star \subset A$. Puesto que $\mathrm{Cl}^\star(A) = A^\star \cup A$ y $A^\star \cup A \subset A$, entonces $\mathrm{Cl}^\star(A) \subset A$. Por la Proposición 1.1, se tiene que $A \subset \mathrm{Cl}^\star(A)$ y así, se obtiene que $\mathrm{Cl}^\star(A) = A$. Esto demuestra que $X - A$ es $\tau^\star$-abierto y por lo tanto, A es $\tau^\star$-cerrado. ∎

Observación 1.1 *Si* A *es un subconjunto de un espacio topológico* (X, τ, I)*, entonces del Lema 1.1, se deduce que* $(\mathrm{Cl}^\star(A))^\star = (A \cup A^\star)^\star = A^\star \cup (A^\star)^\star \subset A^\star \subset \mathrm{Cl}^\star(A)$ *y de esta manera,* $\mathrm{Cl}^\star(A)$ *es un conjunto* $\tau^\star$*-cerrado.*

Proposición 1.3 *Sea* (X, τ, I) *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X*. Entonces* $A^\star - A$ *no contiene ningún conjunto* $\tau^\star$*-abierto no vacío.*

Demostración:
Suponga que $A \subset X$ y U es un conjunto $\tau^\star$-abierto tal que $U \subset A^\star - A$, entonces $U \subset A^\star - A \subset X - A$, $A \subset X - U$ y $X - U$ es $\tau^\star$-cerrado. Por la parte (3) del

Lema 1.1 y la Proposición 1.2, se obtiene que $A^\star \subset (X-U)^\star \subset X-U$ y así, $U \subset X - A^\star$. Puesto que $U \subset A^\star$ se tiene que $U \subset (X-A^\star) \cap A^\star = \emptyset$, por lo que $U = \emptyset$ y de esta manera, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto $\tau^\star$-abierto no vacío.

■

Observación 1.2 *Observe que si $U \in \tau^\star$, entonces $X-U$ es $\tau^\star$-cerrado y así, $(X-U)^\star \subset X-U$ o equivalentemente $U \subset X-(X-U)^\star$. Por lo tanto, si $x \in U$ entonces $x \notin (X-U)^\star$ y así, existe un conjunto $V \in \tau(x)$ tal que $(X-U)\cap V \in I$. Si se define $J = (X-U)\cap V$ se obtiene $x \in V - J \subset U$, donde $V \in \tau$ y $J \in I$. Este hecho sugiere el siguiente resultado.*

Proposición 1.4 *Sea (X,τ,I) un espacio topológico. La colección $\beta(I,\tau) = \{U - J : U \in \tau$ y $J \in I\}$ es una base para la topología $\tau^\star$.*

Demostración:

Sea $U \in \tau$, $J \in I$ entonces el conjunto $A = X-(U-J) = X-(U\cap(X-J)) = (X-U)\cup J$ es $\tau^\star$-cerrado, pues $x \notin A$ si y sólo si $x \in U-J$, por lo tanto $x \in U$ y $U \cap A = U \cap (X-(U-J)) = U \cap ((X-U)\cup J) = U \cap J \in I$, así que $x \notin A^\star$ y $A^\star \subset A$. Por lo tanto, $\beta(I,\tau) \subset \tau^\star$.

Por otra parte, de la Observación 1.2, se obtiene que todo elemento $U \in \tau^\star$ se puede expresar como la unión de conjuntos en $\beta(I,\tau)$. De esta manera, $\beta(I,\tau)$ es una base para la topología $\tau^\star$. ■

Definición 1.9 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ,I) se dice:*

(1) *$\star$-perfecto, si $A = A^\star$.*

(2) *I-abierto, si $A \subset \mathrm{Int}(A^\star)$.*

(3) *Semi-I-abierto, si $A \subset \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(A))$.*

La familia de los conjuntos I-abiertos (resp. semi-I-abiertos) es denotada por $\mathrm{IO}(X,\tau)$ (resp. $\mathrm{SIO}(X,\tau)$). Los complementos de los conjuntos I-abiertos (resp. semi-I-abiertos) son llamados conjuntos I-cerrados (resp. semi-I-cerrados). Observe que en cualquier espacio topológico (X,τ,I) se tiene que $\emptyset^\star=\emptyset$, por lo que $\emptyset$ es un conjunto I-abierto, pero X no necesariamente es un conjunto I-abierto ya que en general, $X^\star$ es un subconjunto propio de X como se mostró en el Ejemplo 1.2. Ahora bien, si (X,τ,I) es un $E.H.S$, entonces X es un conjunto I-abierto, pues en este caso $X^\star=X$. Por otra parte, $\emptyset$ y X siempre son conjuntos semi-I-abiertos en cualquier espacio topológico (X,τ,I).

Los siguientes dos ejemplos muestran que las nociones de conjuntos abiertos y conjuntos I-abiertos son independientes.

Ejemplo 1.3 *Sea* $X=\{a,b,c,d\}$ *con la topología* $\tau=\{\emptyset,X,\{d\},\{a,c\},\{a,c,d\}\}$ *y el ideal* $I=\{\emptyset,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$. *Si* $A=\{a,c,d\}$, *entonces* A *es un conjunto abierto, pero* A *no es un conjunto* I*-abierto, ya que* $A^\star=\{a,c,d\}^\star=\{a,b,c\}$ *y* $A=\{a,c,d\}\not\subset \mathrm{Int}(A^\star)=\mathrm{Int}(\{a,b,c\})=\{a,c\}$.

Ejemplo 1.4 *Sea* $X=\{a,b,c,d\}$ *con la topología* $\tau=\{\emptyset,X,\{c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ *y el ideal* $I=\{\emptyset,\{a\}\}$. *Si* $A=\{b,c,d\}$, *entonces* $A^\star=X$ *y* $A=\{b,c,d\}\subset X=\mathrm{Int}(X)=\mathrm{Int}(A^\star)$. *Por lo tanto,* $A=\{b,c,d\}$ *es un conjunto* I*-abierto, pero no es un conjunto abierto.*

Teorema 1.2 *Sea* (X,τ,I) *un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Todo conjunto* I*-abierto es un conjunto pre-abierto.*

(2) *Todo conjunto abierto es un conjunto semi-*I*-abierto.*

(3) *Todo conjunto semi-*I*-abierto es un conjunto semi-abierto.*

Demostración:
(1) Suponga que A es un conjunto I-abierto, entonces $A \subset \text{Int}(A^\star)$ y como $A^\star \subset \text{Cl}(A)$, se obtiene que $A \subset \text{Int}(A^\star) \subset \text{Int}(\text{Cl}(A))$ y así A es pre-abierto.
(2) Suponga que A es un conjunto abierto, entonces $A = \text{Int}(A)$ y así $\text{Cl}^\star(A) = \text{Cl}^\star(\text{Int}(A))$. Por lo tanto, $A \subset \text{Cl}^\star(A) = \text{Cl}^\star(\text{Int}(A))$ y A es semi-I-abierto.
(3) Suponga que A es semi-I-abierto, entonces $A \subset \text{Cl}^\star(\text{Int}(A))$. Por el Lema 1.1, $(\text{Int}(A))^\star \subset \text{Cl}(\text{Int}(A))$ y así $A \subset \text{Cl}^\star(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A) \cup (\text{Int}(A))^\star \subset \text{Cl}(\text{Int}(A))$, lo que demuestra que A es semi-abierto. ∎

Los siguientes tres ejemplos muestran que, los recíprocos de las implicaciones del Teorema 1.2 no son ciertos en general:

Ejemplo 1.5 *El conjunto $A = \{a, c, d\}$ dado en el Ejemplo 1.3, es un conjunto abierto y por lo tanto pre-abierto, pero no es I-abierto.*

Ejemplo 1.6 *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, c\}\}, \{a, c, d\}\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$. El conjunto $A = \{a, b, c\}$ es semi-I-abierto ya que $A = \{a, b, c\} = \{a, c\} \cup \{a, b, c\} = \text{Int}(A) \cup (\text{Int}(A))^\star \subset \text{Cl}^\star(\text{Int}(A))$, pero no es abierto.*

Ejemplo 1.7 *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. El conjunto $A = \{a, d\}$ es semi-abierto ya que $A \subset X = \text{Cl}(\{a\}) = \text{Cl}(\text{Int}(A))$, pero no es semi-$I$-abierto pues $A \not\subset \{a\} = \emptyset \cup \{a\} = (\text{Int}(A))^\star \cup \text{Int}(A) = \text{Cl}^\star(\text{Int}(A))$.*

Observe que el conjunto $A = \{a, c, d\}$ dado en el Ejemplo 1.3, es un conjunto semi-I-abierto que no es I-abierto. En el siguiente ejemplo se muestra que existe un conjunto I-abierto que no es semi-I-abierto y así, se concluye que las nociones de conjuntos I-abiertos y conjuntos semi-I-abiertos son independientes.

Ejemplo 1.8 *Sea $(\mathbb{R}, \tau)$ los números reales con la topología usual y $\mathcal{F}$ el ideal de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales,* *entonces* $\mathbb{Q}^\star(\mathcal{F},\tau)=\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathrm{Int}(\mathbb{R})\subset\mathrm{Int}(\mathbb{Q}^\star(\mathcal{F},\tau))$, *por lo que* $\mathbb{Q}$ *es un conjunto* I*-abierto y puesto que* $\mathbb{Q}\not\subset\emptyset=\mathrm{Cl}^\star(\emptyset)=\mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(\mathbb{Q}))$, *entonces* $\mathbb{Q}$ *no es un conjunto semi-*I*-abierto.*

Observación 1.3 *Si* A *es un subconjunto de un espacio topológico* (X,τ,I) *donde* $I=\{\emptyset\}$, *entonces:*

(1) A *es* I*-abierto si y sólo si* A *es pre-abierto.*

(2) A *es semi-*I*-abierto si y sólo si* A *es semi-abierto.*

Lema 1.4 *Sea* (X,τ,I) *un espacio topológico y* A, B *subconjuntos de* X.

(1) *Si* $U_\alpha\in\mathrm{IO}(X,\tau)$ *para cada* $\alpha\in\Delta$ *entonces* $\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Delta\}\in\mathrm{IO}(X,\tau)$.

(2) *Si* $A\in\mathrm{IO}(X,\tau)$ *y* $B\in\tau$, *entonces* $A\cap B\in\mathrm{IO}(X,\tau)$.

Demostración:

(1) Suponga que $U_\alpha\in\mathrm{IO}(X,\tau)$ para cada $\alpha\in\Delta$, entonces $U_\alpha\subset\mathrm{Int}(U_\alpha^\star)$ para cada $\alpha\in\Delta$. Por la parte (1) del Lema 1.1, se obtiene que:

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha \;\subset\; \bigcup_{\alpha\in\Delta}\mathrm{Int}(U_\alpha^\star)\subset\mathrm{Int}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha^\star\right)\subset\mathrm{Int}\left(\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha\right)^\star\right).$$

Esto demuestra que $\bigcup_{\alpha\in\Delta}U_\alpha\in\mathrm{IO}(X,\tau)$.

(2) Suponga que $A\in\mathrm{IO}(X,\tau)$ y $B\in\tau$, entonces $A\subset\mathrm{Int}(A^\star)$ y usando la parte (6) del Lema 1.1, se obtiene que:

$$\begin{aligned} A\cap B &\subset \mathrm{Int}(A^\star)\cap B=\mathrm{Int}(A^\star)\cap\mathrm{Int}(B)\\ &= \mathrm{Int}(A^\star\cap B)\subset\mathrm{Int}((A\cap B)^\star). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $A\cap B\in\mathrm{IO}(X,\tau)$. ■

El siguiente ejemplo muestra que la intersección de dos conjuntos I-abiertos no necesariamente es un conjunto I-abierto.

Ejemplo 1.9 *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ *y el ideal* $I = \{\emptyset\}$*, entonces* $A = \{a, c\}$ *y* $B = \{b, c, d\}$ *son conjuntos* I*-abiertos, ya que* $A = \{a, c\} \subset X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(A^\star)$ *y* $B = \{b, c, d\} \subset X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(B^\star)$*, pero* $A \cap B = \{c\}$ *no es un conjunto* I*-abierto porque* $A \cap B = \{c\} \not\subset \emptyset = \mathrm{Int}(\{c, d\}) = \mathrm{Int}(\{c\}^\star)$*.*

Lema 1.5 *Sea* (X, τ, I) *un espacio topológico.* A*,* B *subconjuntos de* X *y* $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ *una familia de subconjuntos de* X*, entonces:*

(1) *Si* $U_\alpha \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ *para cada* $\alpha \in \Delta$*, entonces* $\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\} \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$*.*

(2) *Si* $A \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ *y* $B \in \tau$*, entonces* $A \cap B \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$*.*

Demostración:
(1) Suponga que $U_\alpha \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $U_\alpha \subset \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(U_\alpha))$ para cada $\alpha \in \Delta$. Por la parte (1) del Lema 1.1, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha &\subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(U_\alpha)) \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} \{(\mathrm{Int}(U_\alpha))^\star \cup \mathrm{Int}(U_\alpha)\} \\
&\subset \left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Int}(U_\alpha)\right)^\star \cup \mathrm{Int}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right) \\
&\subset \left(\mathrm{Int}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right)\right)^\star \cup \mathrm{Int}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right) \\
&= \mathrm{Cl}^\star\left(\mathrm{Int}\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right)\right).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$.
(2) Suponga que $A \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ y $B \in \tau$, entonces $A \subset \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(A))$ y por la parte

(6) del Lema 1.1, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
A\cap B &\subset \mathrm{Cl}^{\star}(\mathrm{Int}(A))\cap B = ((\mathrm{Int}(A))^{\star}\cup \mathrm{Int}(A))\cap B\\
&= ((\mathrm{Int}(A))^{\star}\cap B)\cup(\mathrm{Int}(A)\cap B)\\
&\subset (\mathrm{Int}(A)\cap B)^{\star}\cup \mathrm{Int}(A\cap B)\\
&= (\mathrm{Int}(A\cap B))^{\star}\cup \mathrm{Int}(A\cap B) = \mathrm{Cl}^{\star}(\mathrm{Int}(A\cap B)).
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $A\cap B\in \mathrm{SIO}(X,\tau)$. ∎

El siguiente ejemplo muestra que la intersección de dos conjuntos semi-I-abiertos no necesariamente es un conjunto semi-I-abierto.

Ejemplo 1.10 *Sea* $X=\{a,b,c,d\}$ *con la topología* $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,d\},\{a,b,c\},X\}$ *y el ideal* $I=\{\emptyset,\{d\}\}$*, entonces* $A=\{b,c,d\}$ *y* $B=\{a,c,d\}$ *son conjuntos semi-I-abiertos, ya que* $A=\{b,c,d\}\subset\{b\}\cup\{b,c,d\}=\mathrm{Int}(A)\cup(\mathrm{Int}(A))^{\star}=\mathrm{Cl}^{\star}(\mathrm{Int}(A))$ *y* $B=\{a,c,d\}\subset\{a\}\cup\{a,c,d\}=\mathrm{Int}(B)\cup(\mathrm{Int}(B))^{\star}=\mathrm{Cl}^{\star}(\mathrm{Int}(B))$*, pero* $A\cap B=\{b,c,d\}\cap\{a,c,d\}=\{c,d\}$ *no es un conjunto semi-I-abierto porque* $A\cap B=\{c,d\}\not\subset\emptyset=\emptyset\cup\emptyset=\mathrm{Int}(A\cap B)\cup(\mathrm{Int}(A\cap B))^{\star}=\mathrm{Cl}^{\star}(\mathrm{Int}(A\cap B))$.

Capítulo 2

Λ_I-conjuntos y nociones asociadas

En este capítulo se introducen y estudian las nociones de Λ_I-conjuntos, conjuntos I-g-cerrados, conjuntos Λ_I-cerrados y alguna nociones asociadas que fueron introducidas por Noiri y Keskin [14] en el 2011. Además, se definen y caracterizan nuevas variantes de continuidad tales como funciones Λ_I-continuas, cuasi-Λ_I-continuas y Λ_I-irresolutas, y también se introducen nuevas nociones de compacidad y conexidad denominadas Λ_I-compacidad y Λ_I-conexidad para estudiar su comportamiento bajo las imágenes directas de las nuevas variantes de continuidad definidas en este capítulo.

2.1. Λ_I-conjuntos y espacios I-T_1

En esta sección se introduce la noción de Λ_I-conjunto en un espacio topológico (X, τ, I) y estudian algunas propiedades relacionadas con esta noción, que serán de utilidad en el desarrollo de las siguientes secciones de este capítulo.

Definición 2.1 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico y A un subconjunto de X, se define el conjunto $\Lambda_I(A)$ como la intersección de todos los conjuntos I-abiertos que contienen al conjunto A, es decir, $\Lambda_I(A) = \bigcap\{U : A \subset U,\, U \in \mathrm{IO}(X, \tau)\}$.*

Observación 2.1 Sea (X, τ, I) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si $I = \{\emptyset\}$, entonces tenemos que $\Lambda_I(A) = \mathrm{pKer}(A)$.

Lema 2.1 *Sean A, B y $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I). Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *$A \subset \Lambda_I(A)$.*

(2) *Si $A \subset B$, entonces $\Lambda_I(A) \subset \Lambda_I(B)$.*

(3) $\Lambda_I(\Lambda_I(A)) = \Lambda_I(A)$.

(4) *Si* $A \in \mathrm{IO}(X,\tau)$, *entonces* $A = \Lambda_I(A)$.

(5) $\Lambda_I\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha)$.

(6) $\Lambda_I\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in A$, entonces $x \in U$ para cada $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$. Así, $x \in \bigcap\{U : A \subset U, U \in \mathrm{IO}(X,\tau)\} = \Lambda_I(A)$.

(2) Suponga que $x \notin \Lambda_I(B)$, entonces existe un subconjunto $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $B \subset U$ y $x \notin U$. Puesto que $A \subset B \subset U$, se tiene que $x \notin \Lambda_I(A)$ y por lo tanto, $\Lambda_I(A) \subset \Lambda_I(B)$.

(3) Por la parte (1), se tiene que $\Lambda_I(A) \subset \Lambda_I(\Lambda_I(A))$. Para demostrar la inclusión opuesta, suponga que $x \notin \Lambda_I(A)$, entonces existe $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$ y $x \notin U$. Puesto que $A \subset \Lambda_I(A) \subset U$, se obtiene que $x \notin \Lambda_I(\Lambda_I(A))$ y por lo tanto, $\Lambda_I(\Lambda_I(A)) \subset \Lambda_I(A)$.

(4) Por la parte (1), $A \subset \Lambda_I(A)$. Ahora, si $x \in \Lambda_I(A)$ entonces $x \in U$ para cada $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$. Puesto que $A \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ y $A \subset A$, entonces $x \in A$ y por lo tanto, $\Lambda_I(A) \subset A$.

(5) Puesto que $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, entonces por la parte (2), se tiene que $\Lambda_I(A_\alpha) \subset \Lambda_I\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ para cada $\alpha \in \Delta$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha) \subset \Lambda_I\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$. Para demostrar la inclusión opuesta, suponga que $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha)$, entonces $x \notin \Lambda_I(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y por lo tanto, existe $U_\alpha \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $A_\alpha \subset U_\alpha$ y $x \notin U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Puesto que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ y $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$

es un conjunto I-abierto que no contiene a x, se obtiene que $x \notin \Lambda_I\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ y así se demuestra que $\Lambda_I\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha)$.

(6) Puesto que $\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset A_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, usando la parte (2), se obtiene que $\Lambda_I\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \Lambda_I(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y de esta manera, $\Lambda_I\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha)$. ■

El siguiente ejemplo muestra que, en la parte (6) del Lema 2.1, la igualdad no es necesariamente cierta.

Ejemplo 2.1 *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{b\}\}$. Sean $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{c\}$, entonces $\Lambda_I(A \cap B) = \Lambda_I(\emptyset) = \emptyset$, $\Lambda_I(A) = \{a, b, d\}$ y $\Lambda_I(B) = \{a, c\}$, pero $\Lambda_I(A) \cap \Lambda_I(B) = \{a\} \not\subset \emptyset = \Lambda_I(A \cap B)$.*

Definición 2.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ, I) se dice que es un Λ_I-conjunto, si $A = \Lambda_I(A)$.*

Observación 2.2 Si (X, τ, I) es un espacio topológico donde $I = \{\emptyset\}$, entonces la noción de Λ_I-conjunto coincide con la noción de Λ_p-conjunto.

Lema 2.2 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Para cada subconjunto A de X, $\Lambda_I(A)$ es un Λ_I-conjunto.*

(2) *Si A es I-abierto, entonces A es un Λ_I-conjunto.*

(3) *La unión de Λ_I-conjuntos es un Λ_I-conjunto.*

(4) *La intersección de Λ_I-conjuntos es un Λ_I-conjunto.*

Demostración:

(1) Por la parte (3) del Lema 2.1, se tiene que $\Lambda_I(A) = \Lambda_I(\Lambda_I(A))$ y así, $\Lambda_I(A)$ es un Λ_I-conjunto.

(2) Puesto que A es un conjunto I-abierto, entonces por la parte (4) del Lema 2.1, se tiene que $A = \Lambda_I(A)$ y así A es un Λ_I-conjunto.

(3) Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de Λ_I-conjuntos en (X, τ, I), entonces $A_\alpha = \Lambda_I(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y por la parte (5) del Lema 2.1, se tiene que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha) = \Lambda_I\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es un Λ_I-conjunto.

(4) Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de Λ_I-conjuntos en (X, τ, I), entonces $A_\alpha = \Lambda_I(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y por la parte (6) del Lema 2.1, se tiene que $\Lambda_I\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I(A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$. Por otro lado, de la parte (1) del Lema 2.1 se obtiene que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset \Lambda_I\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ y de esta manera, se concluye que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \Lambda_I\left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ y por lo tanto, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es un Λ_I-conjunto. ∎

Observación 2.3 *Note que en cualquier espacio topológico (X, τ, I) se tiene que $\emptyset$ es un conjunto I-abierto y por lo tanto es un Λ_I-conjunto, pero X no necesariamente es un Λ_I-conjunto. Si (X, τ, I) es un E.H.S., entonces X es un conjunto I-abierto y por lo tanto es un Λ_I-conjunto.*

Recuerde que un espacio topológico (X, τ) es un espacio $Alexandroff$ si las intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. En el corolario siguiente se considera la colección $\tau^{\Lambda_I} = \{A : A \text{ es un } \Lambda_I\text{-conjunto de } (X, \tau, I)\}$.

Corolario 2.1 *Si (X, τ, I) es un E.H.S., entonces el par (X, τ^{Λ_I}) es un espacio Alexandroff.*

Observación 2.4 *De acuerdo con el Corolario 2.1, un subconjunto A de un E.H.S (X, τ, I) es abierto en (X, τ^{Λ_I}), si A es un Λ_I-conjunto en (X, τ, I). Además,* *cuando se mencione al par (X, τ^{Λ_I}) quedará sobreentendido que (X, τ, I) es un E.H.S.*

Definición 2.3 *Un espacio topológico (X, τ, I) se dice I-T_1 si para cada par de puntos distintos a, b de X, existen conjuntos I-abiertos U, V de X tales que $a \in U$ y $b \in V$ pero $a \notin V$ y $b \notin U$.*

Proposición 2.1 *En un espacio topológico (X, τ, I), las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) (X, τ, I) *es I-T_1.*

(2) *Para cada $x \in X$, el conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I-conjunto.*

(3) *Para cada $x \in X$, el conjunto unitario $\{x\}$ es un conjunto I-cerrado.*

Demostración:
(1)⇒(2) Sea x un punto arbitrario de X, entonces para cualquier punto y distinto de x, existe un conjunto I-abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Por lo tanto, $y \notin \Lambda_I(\{x\})$ y en consecuencia $\Lambda_I(\{x\}) \subset \{x\}$. Puesto que $\{x\} \subset \Lambda_I(\{x\})$, se obtiene que $\{x\} = \Lambda_I(\{x\})$ y $\{x\}$ es un Λ_I-conjunto.
(2)⇒(3) Sea $x \in X$, entonces para cualquier punto $y \in X - \{x\}$ se tiene que $y = \Lambda_I(\{y\})$ y por lo tanto, existe $U_y \in \mathrm{IO}(X, \tau)$ tal que $x \notin U_y$ y $y \in U_y$. De esta manera, $y \in U_y \subset X - \{x\}$ y en consecuencia $X - \{x\} = \bigcup\{U_y : y \in X - \{x\}\}$. Por la parte (1) del Lema 1.4, se tiene que $X - \{x\}$ es un conjunto I-abierto y así $\{x\}$ es un conjunto I-cerrado.
(3)⇒(1) Para cada par de puntos distintos x, y de X, se tiene que $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos I-cerrados. Por lo tanto, $X - \{x\}$ y $X - \{y\}$ son conjuntos I-abiertos tales que $y \in X - \{x\}$ y $x \in X - \{y\}$ pero $y \notin X - \{y\}$ y $x \notin X - \{x\}$. Esto demuestra que (X, τ, I) es I-T_1. ■

A continuación se da un ejemplo de un espacio I-T_1

Ejemplo 2.2 *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ *y el ideal* $I = \{\emptyset, \{d\}\}$. *Note que:*

$$\{a, b, c\} \subset X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(\{a, b, c\}^\star),$$

$$\{a, b, d\} \subset X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(\{a, b, d\}^\star),$$

$$\{a, c, d\} \subset X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(\{a, c, d\}^\star),$$

$$\{b, c, d\} \subset X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(\{b, c, d\}^\star),$$

así los conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ *y* $\{b, c, d\}$ *son* I*-abiertos y los conjuntos* $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ *y* $\{d\}$ *son conjuntos* I*-cerrados. Por la Proposición 2.1, se tiene que* (X, τ, I) *es* I-T_1.

Teorema 2.1 *En un espacio topológico* (X, τ, I)*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) (X, τ, I) *es* I-T_1.

(2) *Cada subconjunto de* X *es un* Λ_I*-conjunto.*

Demostración:
(1)$\Rightarrow$(2) Sea A cualquier subconjunto de X y x un punto arbitrario de A, entonces por la Proposición 2.1, el conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I-conjunto y por la parte (3) del Lema 2.2, se tiene que $A = \bigcup\{x : x \in A\}$ es un Λ_I-conjunto.
(2)$\Rightarrow$(1) Sea x un punto arbitrario de X. Por hipótesis, se tiene que el conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I-conjunto y por la Proposición 2.1, se concluye que (X, τ, I) es I-T_1. ■

Corolario 2.2 *Un espacio topológico* (X, τ, I) *es* I-T_1 *si y sólo si* (X, τ^{Λ_I}) *es un espacio discreto.*

En el siguiente ejemplo se muestra que, el recíproco de la parte (2) del Lema 2.2, en general, no es cierto, es decir, existe un Λ_I-conjunto que no es I-abierto.

Ejemplo 2.3 *Sea $X = \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con $\tau = \tau_u$ la topología usual e $I = \mathfrak{F}$ el ideal de todos los conjuntos finitos de X. Sean x e y dos puntos distintos de X. Si $\varepsilon = |x-y| > 0$, entonces $U = (x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2})$ y $V = (y-\frac{\varepsilon}{2}, y+\frac{\varepsilon}{2})$ son conjuntos I-abiertos tales que $x \in U$, $y \notin U$ y además $y \in V$, $x \notin V$. Por lo tanto, (X, τ, I) es un espacio I-T_1 y por el Teorema 2.1, cada conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I-conjunto. Sin embargo, $\{x\}$ no es un conjunto I-abierto en X.*

2.2. Conjuntos I-g-cerrados y espacios I-$T_{1/2}$

En esta sección, se usa el operador función local para introducir la clase de los conjuntos I-g-cerrados y se estudian algunas propiedades de estos conjuntos.

Definición 2.4 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ, I) se dice I-g-cerrado, si $A^\star \subset U$ siempre que $A \subset U$ y $U \in \mathrm{IO}(X, \tau)$.*

El complemento de un conjunto I-g-cerrado se denomina conjunto I-g-abierto.

Observación 2.5 *Si A es un subconjunto de un espacio topológico (X, τ, I) donde $I = \{\emptyset\}$, entonces:*

$$A \text{ es } I\text{-}g\text{-cerrado si y sólo si } A \text{ es } pg^*\text{-cerrado.}$$

Proposición 2.2 *Si A y B son subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I), las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si A es $\tau^\star$-cerrado, entonces A es I-g-cerrado.*

(2) *Si A es I-g-cerrado e I-abierto, entonces A es $\star$-perfecto.*

(3) *Si A es I-g-cerrado y $A \subset B \subset A^\star$, entonces B es I-g-cerrado.*

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado y sea U cualquier conjunto I-abierto tal que $A \subset U$, entonces $A^\star \subset A \subset U$ y por lo tanto, A es I-g-cerrado.

(2) Suponga que A es I-g-cerrado e I-abierto, entonces $A^\star \subset A$ y por lo tanto, A es $\tau^\star$-cerrado. Además, puesto que A es I-abierto, se tiene que $A \subset \mathrm{Int}(A^\star) \subset A^\star$ y así A es $\star$-perfecto.

(3) Suponga que A es I-g-cerrado y $A \subset B \subset A^\star$. Sea $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $B \subset U$, entonces $A \subset U$ y por lo tanto, $A^\star \subset U$. Puesto que $B \subset A^\star$, se tiene que $B^\star \subset (A^\star)^\star \subset A^\star \subset U$ y así, B es un conjunto I-g-cerrado. ■

En los siguientes dos ejemplos, se muestra que, los recíprocos de las partes (1) y (2) de la Proposición 2.2, no son necesariamente ciertos.

Ejemplo 2.4 *Sea $X = \{a,b,c,d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a,c\}, \{a,c,d\}\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$. Note que $\{a,c,d\}$ y X no son conjuntos I-abiertos y esto implica que no existen conjuntos I-abiertos que contengan a $\{a,c,d\}$. Por lo tanto, $\{a,c,d\}$ es trivialmente I-g-cerrado, pero $\{a,c,d\}$ no es un conjunto $\tau^\star$-cerrado pues $\{a,c,d\}^\star = \{a,b,c\} \not\subset \{a,c,d\}$.*

Ejemplo 2.5 *Sea $X = \{a,b,c\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{b\}\}$. El conjunto $\{c\}$ es $\star$-perfecto ya que $\{c\}^\star = \{c\}$, pero no es I-abierto porque $\{c\} \not\subset \emptyset = \mathrm{Int}(\{c\}) = \mathrm{Int}(\{c\}^\star)$.*

Proposición 2.3 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ,I) es I-g-cerrado si y sólo si $A^\star \subset \Lambda_I(A)$.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que A es es un conjunto I-g-cerrado y sea $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$, entonces $A^\star \subset U$ y por lo tanto, $A^\star \subset \cap\{U : A \subset U,\, U \in \mathrm{IO}(X,\tau)\} = \Lambda_I(A)$.

Suficiencia: Suponga que $A^\star \subset \Lambda_I(A)$ y sea $U \in \mathrm{IO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$, entonces $A^\star \subset \Lambda_I(A) \subset U$ y así, A es I-g-cerrado. ■

Proposición 2.4 *Si un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ,I) es I-g-cerrado, entonces $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto I-cerrado no vacío.*

Demostración:

Suponga que A es I-g-cerrado y sea F un conjunto I-cerrado tal que $F \subset A^\star - A$, entonces $F \subset A^\star - A \subset X - A$, $A \subset X - F$ y $X - F \in \mathrm{IO}(X,\tau)$. Por lo tanto, $A^\star \subset X - F$ y $F \subset X - A^\star$. Puesto que $F \subset A^\star$ se tiene que $F \subset (X - A^\star) \cup A^\star = \emptyset$, por lo que $F = \emptyset$ y de esta manera, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto I-cerrado no vacío. ■

Teorema 2.2 *Sea A un subconjunto I-g-cerrado de un E.H.S (X,τ,I). Entonces, A es $\tau^\star$-cerrado si y sólo si $A^\star - A$ es un conjunto I-cerrado.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado, entonces $A^\star \subset A$ y así, $A^\star - A = \emptyset$. Puesto que (X,τ,I) es un *E.H.S.*, entonces X es I-abierto y por lo tanto $A^\star - A$ es un conjunto I-cerrado.

Suficiencia: Suponga que $A^\star - A$ es un conjunto I-cerrado. Puesto que A es un conjunto I-g-cerrado, la Proposición 2.4 implica que $A^\star - A = \emptyset$ y por lo tanto, $A^\star \subset A$. Esto demuestra que A es $\tau^\star$-cerrado. ■

Teorema 2.3 *Sean (X,τ,I) un espacio topológico, A un subconjunto de X y Δ un conjunto finito de índices. Si $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos I-g-cerrados, entonces $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto I-g-cerrado.*

Demostración:

Suponga que $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos I-g-cerrados y sea

$U \in \mathrm{IO}(X, \tau)$ tal que $\bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subset U$. Puesto que para cada $\alpha \in \Delta$ se tiene $A_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subset U$, entonces $A_\alpha^\star \subset U$ y $\bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha^\star \subset U$. Por la parte (2) del Lema 1.2, se concluye que $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha\right)^\star = \bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha^\star \subset U$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ es I-g-cerrado. ∎

Definición 2.5 *Un espacio topológico (X, τ, I) se dice I-$T_{1/2}$, si todo conjunto I-g-cerrado es $\tau^\star$-cerrado.*

Proposición 2.5 *Sea (X, τ, I) un E.H.S., entonces para cada $x \in X$ el conjunto unitario $\{x\}$ es I-cerrado o I-g-abierto.*

Demostración:

Suponga que $\{x\}$ no es I-cerrado, entonces $X - \{x\}$ no es I-abierto y el único conjunto I-abierto que contiene a $X - \{x\}$ es X. Así, $(X - \{x\})^\star \subset X$ y por lo tanto, $X - \{x\}$ es un conjunto I-g-cerrado. Esto demuestra que $\{x\}$ es un conjunto I-g-abierto. ∎

Teorema 2.4 *Un E.H.S. (X, τ, I) es I-$T_{1/2}$ si y sólo si cada conjunto unitario $\{x\}$ de X es $\tau^\star$-abierto o I-cerrado.*

Demostración:

Necesidad: Sea (X, τ, I) un *E.H.S.* que es I-$T_{1/2}$ y sea $x \in X$. Suponga que $\{x\}$ no es I-cerrado, entonces por la Proposición 2.5, $\{x\}$ es I-g-abierto y por lo tanto, $X - \{x\}$ es I-g-cerrado. Puesto que (X, τ, I) es I-$T_{1/2}$, entonces $X - \{x\}$ es $\tau^\star$-cerrado y así $\{x\}$ es $\tau^\star$-abierto.

Suficiencia: Suponga que A es un conjunto I-g-cerrado y sea $x \in A^\star$. Se tienen los siguientes dos casos:

Caso 1. $\{x\}$ es I-cerrado. Por la Proposición 2.4, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto no vacío I-cerrado y por lo tanto, $x \notin A^\star - A$. Puesto que $x \in A^\star$, entonces se tiene que $x \in A$.

Caso 2. $\{x\}$ es $\tau^\star$-abierto. Por la Proposición 1.3, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto no vacío $\tau^\star$-abierto y por lo tanto, $x \notin A^\star - A$. Puesto que $x \in A^\star$, entonces se tiene que $x \in A$.

Así, en ambos casos x está en A y por lo tanto, $A^\star \subset A$. De esta manera, A es $\tau^\star$-cerrado y esto demuestra que (X, τ, I) es I-$T_{1/2}$. ∎

2.3. Conjuntos Λ_I-cerrados y otra caracterización de espacios I-$T_{1/2}$

En esta sección, se introduce la clase de los conjuntos Λ_I-cerrados, se estudian algunas propiedades de estos conjuntos y se proporciona otra caracterización de los espacios I-$T_{1/2}$.

Definición 2.6 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ, I) se dice Λ_I-cerrado, si $A = L \cap F$, donde L es un Λ_I-conjunto y F es un conjunto $\tau^\star$-cerrado.*

El complemento de un conjunto Λ_I-cerrado se denomina conjunto Λ_I-abierto.

Lema 2.3 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Todo Λ_I-conjunto es Λ_I-cerrado.*

(2) *Si (X, τ, I) es un E.H.S. entonces todo conjunto $\tau^\star$-cerrado es Λ_I-cerrado.*

Demostración:

(1) Si A es un Λ_I-conjunto, entonces $A = A \cap X$, A es un Λ_I-conjunto y X es $\tau^\star$-cerrado. Esto demuestra que A es un conjunto Λ_I-cerrado.

(2) Si A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado y (X, τ, I) es un $E.H.S.$, entonces $A = X \cap A$, A es $\tau^\star$-cerrado, X es un conjunto I-abierto y por lo tanto un Λ_I-conjunto. Esto demuestra que A es un conjunto Λ_I-cerrado. ∎

Corolario 2.3 *Cada conjunto $\tau^\star$-abierto de un E.H.S. (X,τ,I) es Λ_I-abierto.*

En el siguiente ejemplo, se muestra que, los recíprocos de las partes (1) y (2) del Lema 2.3, en general, no son ciertos.

Ejemplo 2.6 *Sean $X=\{a,b,c\}$ con la topología $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ y el ideal $I=\{\emptyset,\{b\}\}$. Nóte que $\{b\}^\star=\emptyset$, por lo que $\{b\}^\star\subset\{b\}$ y así $\{b\}$ es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Por otro parte, $\Lambda_I(\{a,b\})=\{a,b\}$ y $\{a,b\}$ es un Λ_I-conjunto. Luego $\{b\}=\{b\}\cap\{a,b\}$ y así $\{b\}$ es un conjunto Λ_I-cerrado, pero $\{b\}$ no es un Λ_I-conjunto, pues $\Lambda_I(\{b\})=\{a,b\}$. De igual manera, se tiene que $\{a\}^\star=X$ y $\mathrm{Int}(\{a\}^\star)=X$, por lo que $\{a\}$ es un conjunto I-abierto que no es $\tau^\star$-cerrado. Por los Lemas 2.2 y 2.3, se concluye que $\{a\}$ es un conjunto Λ_I-cerrado.*

Lema 2.4 *Si A es un subconjunto de un espacio topológico (X,τ,I), entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) *A es Λ_I-cerrado.*

(2) *$A=L\cap\mathrm{Cl}^\star(A)$, donde L es un Λ_I-conjunto.*

(3) *$A=\Lambda_I(A)\cap\mathrm{Cl}^\star(A)$.*

Demostración:
(1)⇒(2) Suponga que A es un conjunto Λ_I-cerrado, entonces $A=L\cap F$ donde L es un Λ_I-conjunto y F es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Puesto que $A\subset F$, se tiene que $A^\star\subset F^\star\subset F$ y así $\mathrm{Cl}^\star(A)=A\cup A^\star\subset F$. Por lo tanto, $A\subset L\cap\mathrm{Cl}^\star(A)\subset L\cap F=A$ y en consecuencia, $A=L\cap\mathrm{Cl}^\star(A)$.
(2)⇒(3) Suponga que $A=L\cap\mathrm{Cl}^\star(A)$, donde L es un Λ_I-conjunto. Puesto que $A\subset L$, entonces $\Lambda_I(A)\subset\Lambda_I(L)=L$ y por lo tanto, $A\subset\Lambda_I(A)\cap\mathrm{Cl}^\star(A)\subset L\cap\mathrm{Cl}^\star(A)=A$. Así, se obtiene que $A=\Lambda_I(A)\cap\mathrm{Cl}^\star(A)$.
(3)⇒(1) Por la parte (1) del Lema 2.2, se tiene que $\Lambda_I(A)$ es un Λ_I-conjunto y

por la Observación 1.1, $\mathrm{Cl}^{\star}(A)$ es un conjunto $\tau^{\star}$-cerrado. Luego, si $A = \Lambda_I(A) \cap \mathrm{Cl}^{\star}(A)$, entonces A es Λ_I-cerrado. ■

Proposición 2.6 *Sea (X, τ, I) un E.H.S. y A un subconjunto de X. Entonces, A es un conjunto $\tau^{\star}$-cerrado si y sólo si A es un conjunto I-g-cerrado y Λ_I-cerrado.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que A es $\tau^{\star}$-cerrado, entonces por la parte (1) de la Proposición 2.2, se tiene que A es I-g-cerrado y por la parte (2) del Lema 2.3, A es un conjunto Λ_I-cerrado.

Suficiencia: Suponga que A es un conjunto I-g-cerrado y Λ_I-cerrado, entonces por la Proposición 2.3, $A^{\star} \subset \Lambda_I(A)$ y esto implica que $\mathrm{Cl}^{\star}(A) = A \cup A^{\star} \subset \Lambda_I(A)$. Puesto que A es Λ_I-cerrado, el Lema 2.4 garantiza que $A = \Lambda_I(A) \cap \mathrm{Cl}^{\star}(A)$ y por lo tanto, $A = \mathrm{Cl}^{\star}(A) = A \cup A^{\star}$. Así, $A^{\star} \subset A$ y A es un conjunto $\tau^{\star}$-cerrado. ■

Teorema 2.5 *Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I). Si A_α es un conjunto Λ_I-cerrado para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto Λ_I-cerrado.*

Demostración:

Suponga que A_α es Λ_I-cerrado para cada $\alpha \in \Delta$, entonces para cada $\alpha \in \Delta$ existe un Λ_I-conjunto L_α y un conjunto $\tau^{\star}$-cerrado F_α tal que $A_\alpha = L_\alpha \cap F_\alpha$. Por lo tanto, $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Delta}(L_\alpha \cap F_\alpha) = \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} L_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} F_\alpha\right)$. Por la parte (4) del Lema 2.2, $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$ es un Λ_I-conjunto y por la parte (1) del Lema 1.3, $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} F_\alpha$ es un conjunto $\tau^{\star}$-cerrado. Esto demuestra que $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es Λ_I-cerrado. ■

Corolario 2.4 *Sea $\{B_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I). Si B_α es un conjunto Λ_I-abierto para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\bigcup\{B_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto Λ_I-abierto.*

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las leyes de D´Morgan y el Teorema 2.5. ∎

Teorema 2.6 *Un E.H.S.* (X, τ, I) *es* I*-*$T_{1/2}$ *si y sólo si cada subconjunto de* X *es* Λ_I*-cerrado.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que (X, τ, I) es I-$T_{1/2}$ y A es cualquier subconjunto de X. Por el Teorema 2.4, para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es un conjunto $\tau^\star$-abierto o I-cerrado. Sea $A_1 = \{x \in X - A : \{x\} \in \tau^\star\}$ el conjunto de todos los unitarios $\tau^\star$-abiertos de $X - A$ y sea $A_2 = X - (A \cup A_1)$. Sean $U = \bigcap_{x \in A_2} (X - \{x\})$ y $F = \bigcap_{x \in A_1} (X - \{x\})$. Para cada $x \in A_2$ el conjunto $\{x\}$ es I-cerrado y así, $X - \{x\}$ es un Λ_I-conjunto. Por la parte (4) del Lema 2.2, U es un Λ_I-conjunto y por la parte (1) del Lema 1.3, F es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Puesto que $A = U \cap F$, se concluye que A es un conjunto Λ_I-cerrado.

Suficiencia: Suponga que A es un conjunto I-g-cerrado, entonces por la hipótesis A es un conjunto Λ_I-cerrado y por la Proposición 2.6, A es $\tau^\star$-cerrado. Por lo tanto, (X, τ, I) es I-$T_{1/2}$. ∎

2.4. Funciones Λ_I-continuas

En esta sección se usan los conjuntos abiertos, Λ_I-abiertos y $\tau^\star$-abiertos para definir nuevas formas de continuidad denominadas funciones Λ_I-continuas, cuasi-Λ_I-continuas y Λ_I-irresolutas. Se estudian las relaciones existentes entre éstas clases de funciones, así como también se obtienen propiedades y caracterizaciones de las mismas.

Definición 2.7 *Una función* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ *se dice* I*-irresoluta, si* $f^{-1}(V)$ *es un conjunto* I*-abierto en* (X, τ, I) *para cada conjunto* J*-abierto* V *de*

(Y, σ, J).

Teorema 2.7 *Si una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es I-irresoluta, entonces $f : (X, \tau^{\Lambda_I}) \to (Y, \sigma^{\Lambda_J})$ es continua.*

Demostración:
Sea V cualquier Λ_J-conjunto de (Y, σ, J), es decir $V \in \sigma^{\Lambda_J}$, entonces $V = \Lambda_J(V) = \cap\{W : V \subset W$ y W es J-abierto en $(Y, \sigma, J)\}$. Puesto que f es I-irresoluta, entonces $f^{-1}(W)$ es un conjunto I-abierto en (X, τ, I) para cada W, por lo tanto se tiene que $\Lambda_I(f^{-1}(V)) = \cap\{U : f^{-1}(V) \subset U$ y U es I-abierto en $(X, \tau, I)\} \subset \cap\{f^{-1}(W) : f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$ y W es J-abierto en $(Y, \sigma, J)\} = f^{-1}(V)$. Por otra parte, siempre se cumple que $f^{-1}(V) \subset \Lambda_I(f^{-1}(V))$ y así se obtiene que $f^{-1}(V) = \Lambda_I(f^{-1}(V))$. Por lo tanto, $f^{-1}(V) \in \tau^{\Lambda_I}$ y $f : (X, \tau^{\Lambda_I}) \to (Y, \sigma^{\Lambda_J})$ es continua. ∎

Definición 2.8 *Una función $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ se dice:*

(1) *Λ_I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto abierto V de (Y, σ, J).*

(2) *Cuasi-Λ_I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto $\sigma^\star$-abierto V de (X, σ, I).*

(3) *Λ_I-irresoluta, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto Λ_J-abierto V en (Y, σ, J).*

Teorema 2.8 *Si una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es Λ_I-irresoluta y (Y, σ, J) es un E.H.S., entonces f es cuasi-Λ_I-continua.*

Demostración:
Sea V un conjunto $\sigma^\star$-abierto en (Y, σ, J), entonces por el Corolario 2.3 se tiene que

V es un conjunto Λ_J-abierto en (Y, σ, J) y puesto que f es Λ_I-irresoluta, $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Por lo tanto, f es cuasi-Λ_I-continua. ■

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del teorema anterior, en general, no es cierto.

Ejemplo 2.7 *Sean* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ *y* $J = \{\emptyset, \{b\}\}$. *Entonces, la colección de los conjuntos* Λ_I*-abiertos de* (X, τ, I) *es* $\{\emptyset, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a\}, X\}$, *la colección de los conjuntos* $\sigma^\star$*-abiertos de* (X, σ, J) *es* $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$ *y la colección de los conjuntos* Λ_J*-abiertos de* (X, σ, J) *es* $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. *La función identidad* $f : (X, \tau, I) \to (X, \sigma, J)$ *es cuasi-*Λ_I*-continua, pero no es* Λ_I*-irresoluta debido a que* $f^{-1}(\{c\}) = \{c\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ *y* $f^{-1}(\{b, c\}) = \{b, c\}$ *no son conjuntos* Λ_I*-abiertos.*

El siguiente ejemplo muestra que en el Teorema 2.8, la condición de que (Y, σ, J) sea un *E.H.S.* no puede ser omitida.

Ejemplo 2.8 *Sean* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ *e* $I = \{\emptyset, \{c\}\}$. *Note que* X *no es un E.H.S. pues* $\tau \cap I = \{\emptyset, \{c\}\}$. *Además, la colección de los conjuntos* Λ_I*-abiertos de* (X, τ, I) *es* $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}, X\}$, *la colección de los conjuntos* $\tau^\star$*-abiertos de* (X, τ, I) *es* $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\{a, c\}, X\}$. *La función identidad* $f : (X, \tau, I) \to (X, \tau, I)$ *es* Λ_I*-irresoluta , pero no es cuasi-*Λ_I*-continua ya que* $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ *y* $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$ *no son conjuntos* Λ_I*-abiertos.*

Teorema 2.9 *Si una función* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ *es cuasi-*Λ_I*-continua, entonces* f *es* Λ_I*-continua.*

Demostración:

Sea V un conjunto abierto en (Y, σ, J), entonces V es un conjunto $\sigma^\star$-abierto en

(Y, σ, J) y puesto que f es cuasi-Λ_I-continua, se tiene que $f^{-1}(V)$ es Λ_I-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que f es Λ_I-continua. ■

El siguiente ejemplo exhibe que el recíproco del teorema anterior, en general, no es cierto.

Ejemplo 2.9 *Sean $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ y $J = \{\emptyset, \{c\}\}$. La colección de los conjuntos Λ_I-abiertos de (X, τ, I) es $\{\emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, X\}$ y la colección de los conjuntos $\sigma^\star$-abiertos de (X, σ, J) es $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$. La función identidad $f : (X, \tau, I) \to (X, \sigma, J)$ es Λ_I-continua, pero no es cuasi-Λ_I-continua ya que $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ y $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$ no son conjuntos Λ_I-abiertos.*

Corolario 2.5 *Si una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es Λ_I-irresoluta y (Y, σ, J) es un E.H.S., entonces f es Λ_I-continua.*

Demostración:
Es consecuencia inmediata de los Teoremas 2.8 y 2.9. ■

Proposición 2.7 *Sean $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ y $g : (Y, \sigma, J) \to (Z, \theta, K)$ dos funciones, donde I, J, K son ideales sobre X, Y, Z respectivamente. Entonces:*

(1) *$g \circ f$ es Λ_I-irresoluta, si f es Λ_I-irresoluta y g es Λ_J-irresoluta.*

(2) *$g \circ f$ es Λ_I-continua, si f es Λ_I-irresoluta y g es Λ_J-continua.*

(3) *$g \circ f$ es Λ_I-continua, si f es Λ_I-continua y g es continua.*

(4) *$g \circ f$ es cuasi-Λ_I-continua, si f es Λ_I-irresoluta y g es cuasi-Λ_J-continua.*

Demostración:
(1) Sea V un conjunto Λ_K-abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es Λ_J-irresoluta, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_J-abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I-irresoluta, se

tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es Λ_I-irresoluta.

(2) Sea V un conjunto abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es Λ_J-continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_J-abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I-irresoluta, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es Λ_I-continua.

(3) Sea V un conjunto abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I-continua, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es Λ_I-continua.

(4) Sea V un conjunto $\theta^\star$-abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es cuasi-Λ_J-continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_J-abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I-irresoluta, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es cuasi-Λ_I-continua. ■

En los siguientes tres teoremas se caracterizan las funciones Λ_I-continuas, cuasi-Λ_I-continuas y Λ_I-irresolutas, respectivamente.

Teorema 2.10 *Para una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es Λ_I-continua.*

(2) *$f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I-cerrado en (X, τ, I) para cada conjunto cerrado B en (Y, σ).*

(3) *Para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto V en (Y, σ) que contiene a $f(x)$ existe un conjunto Λ_I-abierto U en (X, τ, I) que contiene a x y $f(U) \subset V$.*

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea B cualquier conjunto cerrado en (Y, σ), entonces $V = Y \setminus B$ es un conjunto abierto en (Y, σ) y puesto que f es Λ_I-continua, $f^{-1}(V)$ es un subconjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I), pero $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B)$ y por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I-cerrado en (X, τ, I).

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea V cualquier conjunto abierto en (Y, σ), entonces $B = Y \setminus V$ es un conjunto cerrado en (Y, σ) y por hipótesis, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I-cerrado en (X, τ, I), pero $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$ y por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que f es Λ_I-continua.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea $x \in X$ y V un conjunto abierto en (Y, σ) tal que $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$ y puesto que f es una función Λ_I-continua, $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I). Si $U = f^{-1}(V)$, entonces U es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I) que contiene a x y además $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea V cualquier conjunto abierto en (Y, σ) y $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$ y por (3) existe un conjunto Λ_I-abierto U_x en (X, τ, I) tal que $x \in U_x$ y $f(U_x) \subset V$. Así $x \in U_x \subset f^{-1}(f(U_x)) \subset f^{-1}(V)$ y por lo tanto $f^{-1}(V) = \bigcup\{U_x : x \in f^{-1}(V)\}$. Por la parte (3) del Lema 2.2, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I-abierto en (X, τ, I) y así f es Λ_I-continua. ∎

Teorema 2.11 *Para una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es cuasi-Λ_I-continua.*

(2) *$f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I-cerrado en (X, τ, I) para cada conjunto $\sigma^\star$-cerrado B en (Y, σ, J).*

(3) *Para cada* $x \in X$ *y cada conjunto* $\sigma^\star$*-abierto* V *en* (Y, σ, J) *que contiene a* $f(x)$ *existe un conjunto* Λ_I*-abierto* U *en* (X, τ, I) *que contiene a* x *y* $f(U) \subset V$.

Demostración:
Se prueba de manera similar al Teorema 2.10. ■

Teorema 2.12 *Para una función* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) f *es* Λ_I*-irresoluta.*

(2) $f^{-1}(B)$ *es un conjunto* Λ_I*-cerrado en* (X, τ, I) *para cada conjunto* Λ_J*-cerrado* B *en* (Y, σ, J).

(3) *Para cada* $x \in X$ *y cada conjunto* Λ_J*-abierto* V *en* (Y, σ, J) *que contiene a* $f(x)$ *existe un conjunto* Λ_I*-abierto* U *en* (X, τ, I) *que contiene a* x *y* $f(U) \subset V$.

Demostración:
Se prueba de manera similar al Teorema 2.10. ■

2.5. Compacidad y Conexidad vía conjuntos Λ_I-abiertos

En esta sección se introducen nuevas nociones de compacidad y de conexidad en términos de conjuntos Λ_I-abiertos, conjuntos $\tau^\star$-abiertos y conjuntos I-abiertos, para estudiar su comportamiento bajo las imágenes directas de las nuevas formas de continuidad definidas en este capítulo.

Definición 2.9 *Un espacio topológico* (X, τ, I) *se dice:*

(1) Λ_I*-compacto, si cada cubrimiento de* X *por conjuntos* Λ_I*-abiertos tiene un subcubrimiento finito.*

(2) *$\tau^{\star}$-compacto, si cada cubrimiento de X por conjuntos $\tau^{\star}$-abiertos tiene un subcubrimiento finito,*

(3) *I-compacto, si cada cubrimiento de X por conjuntos I-abiertos tiene un subcubrimiento finito.*

Teorema 2.13 *Sea (X,τ,I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *(X,τ,I) es Λ_I-compacto si y sólo si para cada colección $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos Λ_I-cerrados en (X,τ,I) satisfaciendo que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, existe una subcolección finita $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \ldots, A_{\alpha_n}$ tal que $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1,\ldots,n\} = \emptyset$.*

(2) *(X,τ,I) es $\tau^{\star}$-compacto si y sólo si para cada colección $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos $\tau^{\star}$-cerrados en (X,τ,I) satisfaciendo que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, existe una subcolección finita $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \ldots, A_{\alpha_n}$ tal que $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1,\ldots,n\} = \emptyset$.*

(3) *(X,τ,I) es I-compacto si y sólo si para cada colección $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos I-cerrados en (X,τ,I) satisfaciendo que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, existe una subcolección finita $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \ldots, A_{\alpha_n}$ tal que $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1,\ldots,n\} = \emptyset$.*

Demostración:

(1) Necesidad: Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de conjuntos Λ_I-cerrados tal que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, entonces $\{X - A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos Λ_I-abiertos tal que

$$X = X - \emptyset = X - \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \bigcup\{X - A_\alpha : \alpha \in \Delta\},$$

es decir, $\{X - A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos Λ_I-abiertos. Puesto que X es Λ_I-compacto, existe una subcolección $X - A_{\alpha_1}, X - A_{\alpha_2}, \ldots, X - A_{\alpha_n}$ tal que

$$X = \bigcup\{X - A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = X - \bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\}.$$

Esto demuestra que $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = \emptyset$.
Suficiencia: Suponga que $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos Λ_I-abiertos, entonces $\{X - U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos Λ_I-cerrados tal que $\bigcap\{X - U_\alpha : \alpha \in \Delta\} = X - \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\} = X - X = \emptyset$. Por hipótesis, existe una subcolección finita $X - U_{\alpha_1}, X - U_{\alpha_2}, \ldots, X - U_{\alpha_n}$ tal que $\bigcap\{X - U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = \emptyset$. Ahora observe que $X = X - \emptyset = X - \bigcap\{X - U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = X - (X - \bigcup\{U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\}) = \bigcup\{U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, (X, τ, I) es Λ_I-compacto.
(2) y (3) se demuestran de manera similar a la parte (1). ∎

Teorema 2.14 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si (X, τ^{Λ_I}) es compacto, entonces (X, τ, I) es I-compacto.*

(2) *Si (X, τ, I) es un E.H.S. Λ_I-compacto, entonces (X, τ, I) es $\tau^\star$-compacto.*

(3) *Si (X, τ, I) es un E.H.S. Λ_I-compacto, entonces (X, τ, I) es compacto.*

Demostración:
(1) Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ cualquier cubrimiento de X por conjuntos I-abiertos, entonces para cada $\alpha \in \Delta$, U_α es un Λ_I-conjunto y por lo tanto, $U_\alpha \in \tau^{\Lambda_I}$ para cada $\alpha \in \Delta$. Puesto que (X, τ^{Λ_I}) es compacto, entonces existe un subconjunto finito Δ_0 de Δ tal que $X = \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Delta_0\}$. Esto demuestra que (X, τ, I) es I-compacto.

(2) Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de conjuntos $\tau^\star$-cerrados en (X, τ, I) tal que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$. Puesto que cada conjunto $\tau^\star$-cerrado es Λ_I-cerrado, entonces $\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de conjuntos Λ_I-cerrados y (X, τ, I) es Λ_I-compacto. Por la parte (1) del Teorema 2.13, existe un subconjunto finito Δ_0 de Δ tal que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \Delta_0\} = \emptyset$ y por la parte (2) del Teorema 2.13, se concluye que (X, τ, I) es $\tau^\star$-compacto.

(3) Sigue de la parte (2) y del hecho que cada espacio $\tau^\star$-compacto es compacto.■

Teorema 2.15 *Si $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es una función sobreyectiva, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si f es una función Λ_I-irresoluta y (X, τ, I) es Λ_I-compacto, entonces (Y, σ, J) es Λ_J-compacto.*

(2) *Si f es una función I-irresoluta y (X, τ, I) es I-compacto, entonces (Y, σ, J) es J-compacto.*

(3) *Si f es una función cuasi-Λ_I-continua y (X, τ, I) es Λ_I-compacto, entonces (Y, σ, J) es $\sigma^\star$-compacto.*

(4) *Si f es una función Λ_I-continua y (X, τ, I) es Λ_I-compacto, entonces (Y, σ) es compacto.*

Demostración:

(1) Sea $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ un cubrimiento de Y por conjuntos Λ_J-abiertos. Puesto que f es Λ_I-irresoluta, setiene que $\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos Λ_I-abiertos y como (X, τ, I) es Λ_I-compacto, existe un subconjunto finito Δ_0 de Δ tal que $X = \bigcup\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Delta_0\}$. Por la sobreyectividad de f, se obtiene que $Y = f(X) = f(\bigcup\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Delta_0\}) = \bigcup\{f(f^{-1}(V_\alpha)) : \alpha \in \Delta_0\} = \{V_\alpha : \alpha \in \Delta_0\}$ y esto demuestra que (Y, θ, J) es Λ_J-compacto.

(2), (3) y (4) se demuestran de manera similar a la parte (1). ■

Definición 2.10 *Un espacio topológico (X, τ, I) se dice:*

(1) Λ_I*-conexo, si X no se puede expresar como la unión disjunta de dos conjuntos* Λ_I*-abiertos no vacíos.*

(2) $\tau^\star$*-conexo, si X no se puede expresar como la unión disjunta de dos conjuntos* $\tau^\star$*-abiertos no vacíos.*

(3) I*-conexo, si X no se puede expresar como la unión disjunta de dos conjuntos* I*-abiertos no vacíos.*

Teorema 2.16 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si (X, τ^{Λ_I}) es conexo, entonces (X, τ, I) es I-conexo.*

(2) *Si (X, τ, I) es un E.H.S. Λ_I-conexo, entonces (X, τ, I) es $\tau^\star$-conexo.*

(3) *Si (X, τ, I) es un E.H.S. Λ_I-conexo, entonces (X, τ, I) es conexo.*

Demostración:
(1) Suponga que (X, τ, I) no es I-conexo, entonces existen conjuntos I-abiertos A y B no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. Por la parte (2) del Lema 2.2, se tiene que A y B son Λ_I-conjuntos y por lo tanto, (X, τ^{Λ_I}) no es conexo.
(2) Suponga que (X, τ, I) no es $\tau^\star$-conexo, entonces existen conjuntos $\tau^\star$-abiertos A y B no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. Por el Corolario 2.3, se tiene que A y B son conjuntos Λ_I-abiertos y así, (X, τ, I) no es Λ_I-conexo.
(3) Sigue de la parte (2) y del hecho que cada espacio $\tau^\star$-conexo es conexo. ∎

Teorema 2.17 *En un espacio topológico (X, τ, I), las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) *(X, τ, I) es Λ_I-conexo.*

(2) *$\emptyset$ y X son los únicos subconjuntos de X que son a la vez Λ_I-abiertos y Λ_I-cerrados.*

(3) *Cada función Λ_I-continua de X en un espacio discreto Y con al menos dos puntos, es una función constante.*

Demostración:
(1)$\Rightarrow$(2) Sea V un subconjunto de X que es Λ_I-abierto y Λ_I-cerrado, entonces $X - V$ es Λ_I-abierto y Λ_I-cerrado, así $X = V \cup (X - V)$. Es decir, X es la unión de dos conjuntos Λ_I-abiertos disjuntos y como (X, τ, I) es Λ_I-conexo, entonces uno de estos conjuntos tiene que ser $\emptyset$. Por lo tanto, $V = \emptyset$ o $V = X$.
(2)$\Rightarrow$(1) Suponga que (X, τ, I) no es Λ_I-conexo y sea $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos Λ_I-abiertos no vacíos y disjuntos en (X, τ, I), entonces $U = X - V$ es un conjunto Λ_I-abierto y Λ_I-cerrado. Por hipótesis, se tiene que $U = \emptyset$ o $U = X$, lo que contradice el hecho que U y V son no vacíos y disjuntos y por lo tanto, (X, τ, I) es Λ_I-conexo.
(2)$\Rightarrow$(3) Sea $f : (X, \tau, I) \to Y$ una función Λ_I^s-continua donde Y es un espacio topológico con la topología discreta y contiene al menos dos puntos, entonces X se puede cubrir por una colección de conjuntos que son a la vez Λ_I-abiertos y Λ_I-cerrados de la forma $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$, de esto, se concluye que existe un $y_0 \in Y$ tal que $f^{-1}(\{y_0\}) = X$ y así, f es una función constante.
(3)$\Rightarrow$(2) Sea W un subconjunto de (X, τ, I) que es Λ_I-abierto y Λ_I-cerrado. Suponga que $W \neq \emptyset$ y sea $f : (X, \tau, I) \to Y$ una función Λ_I-continua definida por $f(W) = \{y_1\}$ y $f(X - W) = \{y_2\}$ para $y_1 \neq y_2$, con $y_1, y_2 \in Y$. Puesto que f es una función constante, se concluye que $X = W$. ■

Seguidamente, se estudia bajo que condiciones se preserva la imagen directa de un espacio Λ_I-conexo.

Teorema 2.18 *Si $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es una función sobreyectiva, las si-*

guientes propiedades se satisfacen:

(1) *Si f es una función Λ_I-irresoluta y (X, τ, I) es Λ_I-conexo, entonces (Y, σ, J) es Λ_J-conexo.*

(2) *Si f es una función I-irresoluta y (X, τ, I) es I-conexo, entonces (Y, σ, J) es J-conexo.*

(3) *Si f es una función cuasi-Λ_I-continua y (X, τ, I) es Λ_I-conexo, entonces (Y, σ, J) es $\sigma^\star$-conexo.*

(4) *Si f es una función Λ_I-continua y (X, τ, I) es Λ_I-conexo, entonces (Y, σ) es conexo.*

Demostración:

(1) Suponga que (Y, σ, J) no es Λ_J-conexo, entonces existen conjuntos Λ_J-abiertos no vacíos H, G en (Y, σ, J) tales que $G \cap H = \emptyset$ y $G \cup H = Y$. Por lo tanto, se tiene que $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \emptyset$, $f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) = X$ y además, $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son conjuntos Λ_I-abiertos no vacíos en (X, τ, I). Esto demuestra que (X, τ, I) no es Λ_I-conexo.

(2), (3) y (4) se demuestran de manera similar a la parte (1). ∎

Problemas Abiertos. Los Teoremas 2.14 y 2.16 se demostraron usando los hechos que todo conjunto I-abierto es Λ_I-abierto y que todo conjunto $\tau^\star$-abierto de un *E.H.S.* es Λ_I-abierto. Sin embargo, no se han obtenidos contraejemplos para mostrar que los recíprocos de las implicaciones exhibidas en tales teoremas no son ciertos. En este orden de ideas se plantean los siguientes problemas.

(1) ¿Existe un espacio topológico (X, τ, I) que es I-compacto (resp. I-conexo) pero el espacio (X, τ^{Λ_I}) no es compacto (resp. conexo)?

(2) ¿Existe un espacio topológico (X, τ, I) que es $\tau^\star$-compacto (resp. $\tau^\star$-conexo) pero el espacio (X, τ, I) no es Λ_I-compacto (resp. Λ_I-conexo)?

Capítulo 3

Λ_I^s-conjuntos y nociones asociadas

En este capítulo se introducen y se estudian las nociones de Λ_I^s-conjuntos, conjuntos I-gs-cerrados, Λ_I^s-cerrados y algunas nociones asociadas que fueron introducidas por Sanabria, Rosas y Carpintero [15] en el 2013. Además, se definen y se caracterizan nuevas variantes de continuidad tales como funciones Λ_I^s-continuas, cuasi-Λ_I^s-continuas y Λ_I^s-irresolutas, y adicionalmente se introducen nuevas nociones de compacidad y conexidad denominadas Λ_I^s-compacidad y Λ_I^s-conexidad para estudiar su comportamiento bajo las imágenes directas de las nuevas variantes de continuidad definidas en este capítulo.

3.1. Λ_I^s-conjuntos y espacios semi-I-T_1

En esta sección se introduce la noción de Λ_I^s-conjunto en un espacio topológico (X, τ, I) y se estudian algunas propiedades relacionadas con esta noción que serán de utilidad en el desarrollo de las siguientes secciones de este capítulo, así como también se caracterizan los espacios semi-I-T_1.

Definición 3.1 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico y A un subconjunto de X, se define el conjunto $\Lambda_I^s(A)$ como la intersección de todos los conjuntos semi-I-abiertos que contienen al conjunto A, es decir, $\Lambda_I^s(A) = \bigcap\{U : A \subset U, U \in \mathrm{SIO}(X, \tau)\}$.*

Observación 3.1 Sea (X, τ, I) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Si $I = \{\emptyset\}$, entonces se tiene que $\Lambda_I^s(A) = \mathrm{sKer}(A)$.

Lema 3.1 *Sean A, B y $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I). Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *$A \subset \Lambda_I^s(A)$.*

(2) *Si $A \subset B$, entonces $\Lambda_I^s(A) \subset \Lambda_I^s(B)$.*

(3) *$\Lambda_I^s(\Lambda_I^s(A)) = \Lambda_I^s(A)$.*

(4) *Si $A \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$, entonces $A = \Lambda_I^s(A)$.*

(5) *$\Lambda_I^s\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha)$.*

(6) *$\Lambda_I^s\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha)$.*

Demostración:

(1) Sea $x \in A$, entonces $x \in U$ para cada $U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$. Luego, $x \in \bigcap\{U : A \subset U, U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)\} = \Lambda_I^s(A)$.

(2) Suponga que $x \notin \Lambda_I^s(B)$, entonces existe un subconjunto $U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $B \subset U$ y $x \notin U$. Puesto que $A \subset B \subset U$, se tiene que $x \notin \Lambda_I^s(A)$ y así, $\Lambda_I^s(A) \subset \Lambda_I^s(B)$.

(3) Por la parte (1), se tiene que $\Lambda_I^s(A) \subset \Lambda_I^s(\Lambda_I^s(A))$. Para demostrar la inclusión opuesta, suponga que $x \notin \Lambda_I^s(A)$, entonces existe $U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$ y $x \notin U$. Puesto que $A \subset \Lambda_I^s(A) \subset U$, se obtiene que $x \notin \Lambda_I(\Lambda_I^s(A))$ y así, $\Lambda_I^s(\Lambda_I^s(A)) \subset \Lambda_I^s(A)$.

(4) Por la parte (1), $A \subset \Lambda_I^s(A)$. Si $x \in \Lambda_I^s(A)$, entonces $x \in U$ para cada $U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$. Puesto que $A \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ y $A \subset A$, entonces $x \in A$ y por lo tanto, $\Lambda_I^s(A) \subset A$.

(5) Puesto que $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, entonces por la parte (2), se tiene que $\Lambda_I^s(A_\alpha) \subset \Lambda_I^s\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ para cada $\alpha \in \Delta$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha) \subset \Lambda_I^s\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$. Para demostrar la inclusión opuesta, suponga que $x \notin \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha)$,

entonces $x \notin \Lambda_I^s(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y así, existe $U_\alpha \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $A_\alpha \subset U_\alpha$ y $x \notin U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Puesto que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ y $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ es un conjunto semi-I-abierto que no contiene a x, se obtiene que $x \notin \Lambda_I^s\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ y así se demuestra que $\Lambda_I^s\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha)$.

(6) Puesto que $\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset A_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, usando la parte (2), se obtiene que $\Lambda_I^s\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \Lambda_I^s(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y de esta manera, $\Lambda_I^s\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha)$. ■

Definición 3.2 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ,I) se dice que es un Λ_I^s-conjunto, si $A = \Lambda_I^s(A)$.*

Observación 3.2 Si (X,τ,I) es un espacio topológico donde $I = \{\emptyset\}$, entonces la noción de Λ_I^s-conjunto coincide con la noción de Λ_s-conjunto.

Lema 3.2 *Sea (X,τ,I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *$\emptyset$ y X son Λ_I^s-conjuntos.*

(2) *Para cada subconjunto A de X, $\Lambda_I^s(A)$ es un Λ_I^s-conjunto.*

(3) *Si A es semi-I-abierto, entonces A es un Λ_I^s-conjunto.*

(4) *La unión de Λ_I^s-conjuntos es un Λ_I^s-conjunto.*

(5) *La intersección de Λ_I^s-conjuntos es un Λ_I^s-conjunto.*

Demostración:

(1) Puesto que $\emptyset$ y X son conjuntos semi-I-abiertos, entonces se tiene que $\Lambda_I^s(\emptyset) =$

$\bigcap\{U : \emptyset \subset U, U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)\} = \emptyset$ y $\Lambda_I^s(X) = \bigcap\{U : X \subset U, U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)\} = X$. (2) Por la parte (3) del Lema 3.1, se tiene que $\Lambda_I^s(A) = \Lambda_I^s(\Lambda_I^s(A))$ y así $\Lambda_I^s(A)$ es un Λ_I^s-conjunto.

(3) Puesto que A es un conjunto semi-I-abierto, entonces por la parte (4) del Lema 3.1, se tiene que $A = \Lambda_I^s(A)$ y por lo tanto A es un Λ_I^s-conjunto.

(4) Suponga que $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de Λ_I^s-conjuntos en (X,τ,I), entonces $A_\alpha = \Lambda_I^s(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y por la parte (5) del Lema 3.1, se tiene que $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha) = \Lambda_I^s\left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$. Por lo tanto, $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es un Λ_I^s-conjunto.

(5) Suponga que $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de Λ_I^s-conjuntos en (X,τ,I), entonces $A_\alpha = \Lambda_I^s(A_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$ y por la parte (6) del Lema 3.1, se obtiene que $\displaystyle\Lambda_I^s\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Lambda_I^s(A_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$. Por otra lado, de la parte (1) del Lema 3.1 se tiene que $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset \Lambda_I^s\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ y de esta manera, se concluye que $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \Lambda_I^s\left(\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)$ y por lo tanto, $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es un Λ_I^s-conjunto. ∎

Corolario 3.1 *Sea (X,τ,I) un espacio topológico y consideremos la colección $\tau^{\Lambda_I^s} = \{A : A$ es un Λ_I^s-conjunto en $(X,\tau,I)\}$. Entonces, el par $(X,\tau^{\Lambda_I^s})$ es un espacio Alexandroff.*

Observación 3.3 *De acuerdo con el Corolario 3.1, un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ,I) es abierto en $(X,\tau^{\Lambda_I^s})$, si A es un Λ_I^s-conjunto en (X,τ,I).*

Definición 3.3 *Un espacio topológico (X,τ,I) se dice semi-I-T_1 si para cada par de puntos distintos a, b de X, existen conjuntos semi-I-abiertos U, V de X tales que $a \in U$ y $b \in V$ pero $a \notin V$ y $b \notin U$.*

Proposición 3.1 *En un espacio topológico (X,τ,I), las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) (X, τ, I) *es semi-*I*-*T_1*.*

(2) *Para cada* $x \in X$*, el conjunto unitario* $\{x\}$ *es un* Λ_I^s*-conjunto.*

(3) *Para cada* $x \in X$*, el conjunto unitario* $\{x\}$ *es un conjunto semi-*I*-cerrado.*

Demostración:
(1)$\Rightarrow$(2) Sea x un punto arbitrario de X, entonces para cada punto y distinto de x, existe un conjunto semi-I-abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Por lo tanto, $y \notin \Lambda_I^s(\{x\})$ y en consecuencia $\Lambda_I^s(\{x\}) \subset \{x\}$. Puesto que $\{x\} \subset \Lambda_I^s(\{x\})$, se tiene que $\{x\} = \Lambda_I^s(\{x\})$ y así $\{x\}$ es un Λ_I^s-conjunto.
(2)$\Rightarrow$(3) Sea $x \in X$, entonces para cualquier punto $y \in X - \{x\}$ se tiene que $y = \Lambda_I^s(\{y\})$ y por lo tanto, existe $U_y \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ tal que $x \notin U_y$ y $y \in U_y$. De esta manera, $y \in U_y \subset X - \{x\}$ y en consecuencia $X - \{x\} = \bigcup\{U_y : y \in X - \{x\}\}$. Por la parte (1) del Lema 1.5, se tiene que $X - \{x\}$ es un conjunto semi-I-abierto y así $\{x\}$ es un conjunto semi-I-cerrado.
(3)$\Rightarrow$(1) Para cada par de puntos distintos x, y de X, se tiene que $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos semi-I-cerrados. Por lo tanto, $X - \{x\}$ y $X - \{y\}$ son conjuntos semi-I-abiertos tales que $y \in X - \{x\}$ y $x \in X - \{y\}$ pero $y \notin X - \{y\}$ y $x \notin X - \{x\}$. Esto demuestra que (X, τ, I) es semi-I-T_1. ∎

Ejemplo 3.1 *Sea* $X = \{a, b, c, d\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$ *y el ideal* $I = \{\emptyset, \{d\}\}$*. Note que*

$$\{a, b, c\} \subset X = \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(\{a, b, c\})),$$

$$\{a, b, d\} \subset \{a, b, d\} = \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(\{a, b, d\})),$$

$$\{a, c, d\} \subset \{a, c, d\} = \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(\{a, c, d\})),$$

$$\{b, c, d\} \subset \{b, c, d\} = \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(\{b, c, d\})),$$

así los conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ y $\{b, c, d\}$ son semi-I-abiertos y por lo tanto, los conjuntos $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ y $\{d\}$ son semi-I-cerrados. Por la Proposición 3.1, se concluye que (X, τ, I) es semi-I-T_1.

Teorema 3.1 *En un espacio topológico (X, τ, I), las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) *(X, τ, I) es semi-I-T_1.*

(2) *Cada subconjunto de X es un Λ_I^s-conjunto.*

Demostración:
(1)⇒(2) Sea A cualquier subconjunto de X y x un punto arbitrario de A, entonces por la Proposición 3.1, el conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I^s-conjunto y por la parte (4) del Lema 3.2, se tiene que $A = \bigcup\{x : x \in A\}$ es un Λ_I^s-conjunto.
(2)⇒(1) Sea x un punto arbitrario de X. Por hipótesis, se tiene que el conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I^s-conjunto y por la Proposición 3.1, se concluye que (X, τ, I) es semi-I-T_1. ∎

Corolario 3.2 *Un espacio topológico (X, τ, I) es semi-I-T_1 si y sólo si $(X, \tau^{\Lambda_I^s})$ es un espacio discreto.*

En el siguiente ejemplo se muestra que, el recíproco de la parte (3) del Lema 3.2, en general, no es cierto.

Ejemplo 3.2 *Sea $X = \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con $\tau = \tau_u$ la topología usual e $I = \mathfrak{F}$ el ideal de todos los conjuntos finitos de X. Sean x e y dos puntos distintos de X. Si $\varepsilon = |x - y| > 0$, entonces $U = (x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$ y $V = (y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2})$ son conjuntos semi-I-abiertos tales que $x \in U$, $y \notin U$ y además $y \in V$, $x \notin V$. Por lo tanto, (X, τ, I) es un espacio semi-I-T_1 y por el Teorema 3.1, cada conjunto unitario $\{x\}$ es un Λ_I^s-conjunto. Sin embargo, $\{x\}$ no es un conjunto semi-I-abierto en X.*

Observación 3.4 *Note que el espacio topológico* (X, τ, I) *dado en el Ejemplo 3.2 es el mismo espacio dado en el Ejemplo 2.3, por lo que este, es un espacio* I-T_1 *y semi-*I-T_1. *Sin embargo, las nociones de espacio* I-T_1 *y espacio semi-*I-T_1 *son independientes, como se exhibe en los siguientes dos ejemplos.*

Ejemplo 3.3 *Sea* (X, τ, I) *el espacio semi-*I-T_1 *dado en el Ejemplo 3.1. Observe que el conjunto* $A = \{a, c, d\}$ *no es un conjunto* I*-abierto y por lo tanto,* $\{b\}$ *no es un conjunto* I*-cerrado. Por la Proposición 2.1, se concluye que* (X, τ, I) *no es* I-T_1.

Ejemplo 3.4 *Sea* (X, τ, I) *el espacio* I-T_1 *dado en el Ejemplo 2.2. Observe que el conjunto* $A = \{a, b, d\}$ *no es un conjunto semi-*I*-abierto y por lo tanto,* $\{c\}$ *no es un conjunto semi-*I*-cerrado. Por la Proposición 3.1, se concluye que* (X, τ, I) *no es semi-*I-T_1.

3.2. Conjuntos I-gs-cerrados y espacios semi-I-$T_{1/2}$

En esta sección se introduce la noción de conjuntos I-gs-cerrados y se estudian algunas propiedades relacionadas con ésta y otras nociones ya definidas en este trabajo. Además, se caracterizan los espacios semi-I-$T_{1/2}$.

Definición 3.4 *Un subconjunto* A *de un espacio topológico* (X, τ, I) *se dice* I-gs*-cerrado, si* $A^\star \subset U$ *siempre que* $A \subset U$ *y* $U \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$.

El complemento de un conjunto I-gs-cerrado se denomina conjunto I-gs-abierto.

Observación 3.5 *Si* A *es un subconjunto de un espacio topológico* (X, τ, I) *donde* $I = \{\emptyset\}$*, entonces:*

$$A \text{ es } I\text{-}gs\text{-cerrado si y sólo si } A \text{ es } sg^*\text{-cerrado.}$$

Proposición 3.2 *Si A y B son subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I), las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si A es $\tau^\star$-cerrado, entonces A es I-gs-cerrado.*

(2) *Si A es I-gs-cerrado y semi-I-abierto, entonces A es $\tau^\star$-cerrado.*

(3) *Si A es I-gs-cerrado y $A \subset B \subset A^\star$, entonces B es I-gs-cerrado.*

Demostración:
(1) Suponga que A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado y sea U cualquier conjunto semi-I-abierto tal que $A \subset U$, entonces $A^\star \subset A \subset U$ y por lo tanto, A es I-gs-cerrado.
(2) Suponga que A es I-gs-cerrado y semi-I-abierto, entonces $A^\star \subset A$ y por lo tanto, A es $\tau^\star$-cerrado.
(3) Suponga que A es I-gs-cerrado y $A \subset B \subset A^\star$. Sea $U \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ tal que $B \subset U$, entonces $A \subset U$ y por lo tanto, $A^\star \subset U$. Puesto que $B \subset A^\star$, se tiene que $B^\star \subset (A^\star)^\star \subset A^\star \subset U$ y así, B es un conjunto I-gs-cerrado. ■

En los siguientes dos ejemplos se muestra que, en general, los recíprocos de las partes (1) y (2) de la Proposición 3.2 no son ciertos.

Ejemplo 3.5 *Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{c\}\}$. Sea $A = \{a, b\}$, entonces $A^\star = \{a, b\}^\star = X$ y X es el único conjunto semi-I-abierto que contiene a A. Por lo tanto, $A = \{a, b\}$ es un conjunto I-gs-cerrado, pero no es $\tau^\star$-cerrado pues $A^\star = \{a, b\}^\star = X \not\subset \{a, b\} = A$.*

Ejemplo 3.6 *Sea $X = \{a, b\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{a\}\}$. Entonces $\{b\}$ es un conjunto $\tau^\star$-cerrado ya que $\{b\}^\star = \{b\} \subset \{b\}$ y por lo tanto es I-gs-cerrado, pero no es un conjunto semi-I-abierto porque $\{b\} \not\subset \emptyset = \mathrm{Cl}^\star(\emptyset) = \mathrm{Cl}^\star(\mathrm{Int}(\{b\})$.*

Proposición 3.3 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ, I) es I-gs-cerrado si y sólo si $A^\star \subset \Lambda_I^s(A)$.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que A es es un conjunto I-gs-cerrado y sea $U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$, entonces $A^\star \subset U$ y por lo tanto, $A^\star \subset \bigcap\{U : A \subset U, U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)\} = \Lambda_I^s(A)$.

Suficiencia: Suponga que $A^\star \subset \Lambda_I^s(A)$ y sea $U \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$ tal que $A \subset U$, entonces $A^\star \subset \Lambda_I^s(A) \subset U$ y así, A es I-gs-cerrado. ∎

Proposición 3.4 *Si un subconjunto A de un espacio topológico (X,τ,I) es I-gs-cerrado, entonces $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto semi-I-cerrado no vacío.*

Demostración:

Suponga que A es I-gs-cerrado y sea F un conjunto semi-I-cerrado tal que $F \subset A^\star - A$ entonces $F \subset A^\star - A \subset X - A$, $A \subset X - F$ y $X - F \in \mathrm{SIO}(X,\tau)$. Por lo tanto, $A^\star \subset X - F$ y $F \subset X - A^\star$. Puesto que $F \subset A^\star$ se tiene que $F \subset (X - A^\star) \cup A^\star = \emptyset$, por lo que $F = \emptyset$ y de esta manera, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto semi-I-cerrado no vacío. ∎

Teorema 3.2 *Sea A un subconjunto I-gs-cerrado de un espacio topológico (X,τ,I). Entonces, A es $\tau^\star$-cerrado si y sólo si $A^\star - A$ es un conjunto semi-I-cerrado.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado, entonces $A^\star \subset A$ y así, $A^\star - A = \emptyset$. Puesto que X es semi-I-abierto, se tiene que $A^\star - A$ es un conjunto semi-I-cerrado.

Suficiencia: Suponga que $A^\star - A$ es un conjunto semi-I-cerrado. Puesto que A es un conjunto I-gs-cerrado, la Proposición 3.4 implica que $A^\star - A = \emptyset$ y por lo tanto, $A^\star \subset A$. Esto demuestra que A es $\tau^\star$-cerrado. ∎

Teorema 3.3 *Sean (X, τ, I) un espacio topológico, A un subconjunto de X y Δ un conjunto finito de índices. Si $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos I-gs-cerrados, entonces $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto I-gs-cerrado.*

Demostración:

Suponga que $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos I-gs-cerrados y sea $U \in \mathrm{SIO}(X, \tau)$ tal que $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset U$. Puesto que para cada $\alpha \in \Delta$se tiene $A_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha \subset U$, entonces $A_\alpha^\star \subset U$ y $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha^\star \subset U$. Por la parte (2) del Lema 1.2, se concluye que $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha\right)^\star = \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha^\star \subset U$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es I-gs-cerrado. ∎

Definición 3.5 *Un espacio topológico (X, τ, I) se dice semi-I-$T_{1/2}$ si todo conjunto I-gs-cerrado es $\tau^\star$-cerrado.*

Proposición 3.5 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces para cada $x \in X$ el conjunto unitario $\{x\}$ es semi-I-cerrado o I-gs-abierto.*

Demostración:

Suponga que $\{x\}$ no es semi-I-cerrado, entonces $X - \{x\}$ no es semi-I-abierto y el único conjunto semi-I-abierto que contiene a $X - \{x\}$ es X. Así, $(X - \{x\})^\star \subset X$ y por lo tanto, $X - \{x\}$ es un conjunto I-gs-cerrado. Esto demuestra que $\{x\}$ es un conjunto I-gs-abierto. ∎

Teorema 3.4 *Un espacio topológico (X, τ, I) es semi-I-$T_{1/2}$ si y sólo si cada conjunto unitario $\{x\}$ de X es $\tau^\star$-abierto o semi-I-cerrado*

Demostración:

Necesidad: Sea (X, τ, I) un espacio topológico que es semi-I-$T_{1/2}$ y sea $x \in X$. Suponga que $\{x\}$ no es semi-I-cerrado, entonces por la Proposición 3.5, $\{x\}$ es

I-gs-abierto y por lo tanto, $X - \{x\}$ es I-gs-cerrado. Puesto que (X, τ, I) es semi-I-$T_{1/2}$, entonces $X - \{x\}$ es $\tau^\star$-cerrado y así $\{x\}$ es $\tau^\star$-abierto.

Suficiencia: Suponga que A es un conjunto I-gs-cerrado y sea $x \in A^\star$. Se tienen los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $\{x\}$ es semi-I-cerrado. Por la Proposición 3.4, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto no vacío semi-I-cerrado y por lo tanto, $x \notin A^\star - A$. Puesto que $x \in A^\star$, entonces se tiene que $x \in A$.

Caso 2. Si $\{x\}$ es $\tau^\star$-abierto. Por la Proposición 1.3, $A^\star - A$ no contiene ningún conjunto no vacío $\tau^\star$-abierto y por lo tanto, $x \notin A^\star - A$. Puesto que $x \in A^\star$, entonces se tiene que $x \in A$.

Así, en ambos casos x está en A y por lo tanto, $A^\star \subset A$. De esta manera, A es $\tau^\star$-cerrado y esto demuestra que (X, τ, I) es semi-I-$T_{1/2}$. ∎

3.3. Conjuntos Λ_I^s-cerrados y nueva caracterización de espacios semi-I-$T_{1/2}$

En esta sección, se introduce la clase de los conjuntos Λ_I^s-cerrados, se estudian algunas propiedades de estos conjuntos y se da una nueva caracterización de los espacios semi-I-$T_{1/2}$.

Definición 3.6 *Un subconjunto A de un espacio topológico (X, τ, I), se dice Λ_I^s-cerrado, si $A = L \cap F$, donde L es un Λ_I^s-conjunto y F es un conjunto $\tau^\star$-cerrado.*

El complemento de un conjunto Λ_I^s-cerrado se denomina conjunto Λ_I^s-abierto.

Lema 3.3 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Todo Λ_I^s-conjunto es Λ_I^s-cerrado.*

(2) *Todo conjunto $\tau^\star$-cerrado es Λ_I^s-cerrado.*

Demostración:

(1) Si A es un Λ_I^s-conjunto, entonces $A = A \cap X$, A es un Λ_I^s-conjunto y X es $\tau^\star$-cerrado. Esto demuestra que A es un conjunto Λ_I^s-cerrado.

(2) Si A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado, entonces $A = X \cap A$, X es un Λ_I^s-conjunto y A es $\tau^\star$-cerrado. Por lo tanto, A es un conjunto Λ_I^s-cerrado. ■

En el siguiente ejemplo se muestra que los recíprocos del Lema 3.3, en general, no son ciertos.

Ejemplo 3.7 . *Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ y el ideal $I = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$. Entonces $\{c\}$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado, pero no es un Λ_I^s-conjunto y $\{b\}$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado que no es $\tau^\star$-cerrado.*

Corolario 3.3 *Cada conjunto $\tau^\star$-abierto es Λ_I^s-abierto.*

Lema 3.4 *Si A es un subconjunto de un espacio topológico (X, τ, I), entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) *A es Λ_I^s-cerrado.*

(2) *$A = L \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$, donde L es un Λ_I^s-conjunto.*

(3) *$A = \Lambda_I^s(A) \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$.*

Demostración:

(1)⇒(2) Suponga que A es un conjunto Λ_I^s-cerrado, entonces $A = L \cap F$ donde L es un Λ_I^s-conjunto y F es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Puesto que $A \subset F$, se tiene que $A^\star \subset F^\star \subset F$ y así $\mathrm{Cl}^\star(A) = A \cup A^\star \subset F$. Por lo tanto, $A \subset L \cap \mathrm{Cl}^\star(A) \subset L \cap F = A$ y en consecuencia, $A = L \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$.

(2)⇒(3) Suponga que $A = L \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$, donde L es un Λ_I^s-conjunto. Puesto que $A \subset L$, entonces $\Lambda_I^s(A) \subset \Lambda_I^s(L) = L$ y por lo tanto, $A \subset \Lambda_I^s(A) \cap \mathrm{Cl}^\star(A) \subset L \cap \mathrm{Cl}^\star(A) = A$. Así, se obtiene que $A = \Lambda_I^s(A) \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$.

(3)$\Rightarrow$(1) Por la parte (2) del Lema 3.2, se tiene que $\Lambda_I^s(A)$ es un Λ_I^s-conjunto y por la Observación 1.1, $\mathrm{Cl}^\star(A)$ es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Luego, si $A = \Lambda_I^s(A) \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$, entonces A es Λ_I^s-cerrado. ∎

Proposición 3.6 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces, A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado si y sólo si A es un conjunto I-gs-cerrado y Λ_I^s-cerrado.*

Demostración:
Necesidad: Suponga que A es $\tau^\star$-cerrado, entonces por la parte (1) de la Proposición 3.2, se tiene que A es I-g-cerrado y por la parte (2) del Lema 3.3, A es un conjunto Λ_I^s-cerrado.
Suficiencia: Suponga que A es un conjunto I-gs-cerrado y Λ_I^s-cerrado, entonces por la Proposición 3.3, $A^\star \subset \Lambda_I^s(A)$ y esto implica que $\mathrm{Cl}^\star(A) = A \cup A^\star \subset \Lambda_I^s(A)$. Puesto que A es Λ_I^s-cerrado, el Lema 3.4 garantiza que $A = \Lambda_I^s(A) \cap \mathrm{Cl}^\star(A)$ y por lo tanto, $A = \mathrm{Cl}^\star(A) = A \cup A^\star$. Así, $A^\star \subset A$ y A es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. ∎

Teorema 3.5 *Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ, I). Si A_α es un conjunto Λ_I^s-cerrado para cada $\alpha \in \Delta$ entonces $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado.*

Demostración:
Suponga que A_α es Λ_I^s-cerrado para cada $\alpha \in \Delta$, entonces para cada $\alpha \in \Delta$ existe un Λ_I^s-conjunto L_α y un conjunto $\tau^\star$-cerrado F_α tal que $A_\alpha = L_\alpha \cap F_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Delta}(L_\alpha \cap F_\alpha) = \left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} L_\alpha\right) \cap \left(\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} F_\alpha\right)$. Por la parte (5) del Lema 3.2, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} L_\alpha$ es un Λ_I^s-conjunto y por la parte (1) del Lema 1.3, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} F_\alpha$ es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Esto demuestra que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ es Λ_I^s-cerrado. ∎

Corolario 3.4 *Sea* $\{B_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ *una colección de subconjuntos de un espacio topológico* (X, τ, I)*. Si* B_α *es un conjunto* Λ_I^s*-abierto para cada* $\alpha \in \Delta$ *entonces* $\bigcup\{B_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ *es un conjunto* Λ_I^s*-abierto.*

Demostración:

Es consecuencia inmediata del Teorema 3.5. ∎

Teorema 3.6 *Un espacio topológico* (X, τ, I) *es semi-*I*-*$T_{1/2}$ *si y sólo si cada subconjunto de* X *es* Λ_I^s*-cerrado.*

Demostración:

Necesidad: Suponga que (X, τ, I) es semi-I-$T_{1/2}$ y A es cualquier subconjunto de X. Por el Teorema 3.4, para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es un conjunto $\tau^\star$-abierto o semi-I-cerrado. Sea A_1 el conjunto de todos los unitarios $\tau^\star$-abiertos de $X - A$ y sea $A_2 = X - (A \cup A_1)$. Sean $U = \bigcap\limits_{x \in A_2}(X - \{x\})$ y $F = \bigcap\limits_{x \in A_1}(X - \{x\})$. Para cada $x \in A_2$ el conjunto $\{x\}$ es semi-I-cerrado y así, $X - \{x\}$ es un Λ_I^s-conjunto. Por la parte (5) del Lema 3.2, U es un Λ_I^s-conjunto y por la parte (1) del Lema 1.3, F es un conjunto $\tau^\star$-cerrado. Puesto que $A = U \cap F$, se concluye que A es un conjunto Λ_I^s-cerrado.

Suficiencia: Suponga que A es un conjunto I-gs-cerrado, entonces por la hipótesis A es un conjunto Λ_I^s-cerrado y por la Proposición 3.6, A es $\tau^\star$-cerrado. Por lo tanto, (X, τ, I) es semi-I-$T_{1/2}$. ∎

3.4. Funciones Λ_I^s-continuas

En esta sección se usan los conjuntos abiertos, Λ_I^s-abiertos y $\tau^\star$-abiertos para introducir nuevas formas de continuidad denominadas funciones Λ_I^s-continuas, cuasi-Λ_I^s-continuas y Λ_I^s-irresolutas. Se estudian las relaciones existentes entre éstas clases de funciones, así como también se obtienen propiedades y caracterizaciones de las mismas.

Definición 3.7 *Una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ se dice semi-I-irresoluta, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto semi-I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto semi-J-abierto V de (Y, σ, J).*

Teorema 3.7 *Si una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es semi-I-irresoluta, entonces $f : (X, \tau^{\Lambda^s_I}) \to (Y, \sigma^{\Lambda^s_J})$ es continua.*

Demostración:
Suponga que V cualquier Λ^s_J-conjunto de (Y, σ, J), es decir $V \in \sigma^{\Lambda^s_J}$, entonces $V = \Lambda^s_J(V) = \bigcap\{W : V \subset W$ y W es semi-J-abierto en $(Y, \sigma, J)\}$. Puesto que f es semi-I-irresoluta, entonces $f^{-1}(W)$ es un conjunto semi-I-abierto en (X, τ, I) para cada W, por lo tanto $\Lambda^s_I(f^{-1}(V)) = \bigcap\{U : f^{-1}(V) \subset U : U \in SIO(X, \tau, I)\} \subset \bigcap\{f^{-1}(W) : f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W) : W \in SJO(Y, \sigma, J)\} = f^{-1}(V)$. Por otra parte, siempre se cumple que $f^{-1}(V) \subset \Lambda^s_I(f^{-1}(V))$ y así se obtiene que $f^{-1}(V) = \Lambda^s_I(f^{-1}(V))$. Por lo tanto, $f^{-1}(V) \in \tau^{\Lambda^s_I}$ y $f : (X, \tau^{\Lambda^s_I}) \to (Y, \sigma^{\Lambda^s_J})$ es continua. ■

Definición 3.8 *Una función $f : (X, \tau, I) \longrightarrow (Y, \sigma, J)$ se dice:*

(1) *Λ^s_I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ^s_I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto abierto V de (Y, σ, J).*

(2) *Cuasi-Λ^s_I-continua, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ^s_I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto $\sigma^\star$-abierto V de (X, τ, I).*

(3) *Λ^s_I-irresoluta, si $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ^s_I-abierto en (X, τ, I) para cada conjunto Λ^s_J-abierto V en (Y, σ, J).*

Teorema 3.8 *Si una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es Λ^s_I-irresoluta, entonces f es cuasi-Λ^s_I-continua.*

Demostración:
Sea V un conjunto $\sigma^\star$-abierto en (Y, σ, J), entonces por el Corolario 3.3 se tiene que V es un conjunto Λ_J^s-abierto en (Y, σ, J) y puesto que f es Λ_I^s-irresoluta, $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Por lo tanto, f es cuasi-Λ_I^s-continua. $\blacksquare$

El siguiente ejemplo exhibe una función cuasi-Λ_I^s-continua pero no Λ_I^s-irresoluta.

Ejemplo 3.8 *Sean* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ *y* $J = \{\emptyset, \{b\}\}$. *La colección de los conjuntos* Λ_I^s*-abiertos de* (X, τ, I) *es* $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, X\}$, *la colección de los conjuntos* $\sigma^\star$*-abiertos de* (X, σ, J) *es* $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}$ *y la colección de los conjuntos* Λ_J^s*-abiertos de* (X, σ, J) *es* $\{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. *La función identidad* $f : (X, \tau, I) \to (X, \sigma, J)$ *es cuasi-*Λ_I^s*-continua, pero no es* Λ_I^s*-irresoluta ya que* $f^{-1}(\{b, c\}) = \{b, c\}$ *y* $f^{-1}(\{c\}) = \{c\}$ *no son conjuntos* Λ_I^s*-abiertos.*

Teorema 3.9 *Si una función* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ *es cuasi-*Λ_I^s*-continua, entonces* f *es* Λ_I^s*-continua.*

Demostración:
Sea V un conjunto abierto en (Y, σ, J), entonces V es un conjunto $\sigma^\star$-abierto en (Y, σ, J) y puesto que f es cuasi-Λ_I^s-continua, se tiene que $f^{-1}(V)$ es Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que f es Λ_I^s-continua. $\blacksquare$

El siguiente ejemplo muestra una función Λ_I^s-continua pero no cuasi-Λ_I^s-continua.

Ejemplo 3.9 *Sean* $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, $\sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$, $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ *y* $J = \{\emptyset, \{a\}\}$. *La colección de los conjuntos* Λ_I^s*-abiertos de* (X, τ, I) *es* $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, X\}$ *y la colección de los conjuntos* $\sigma^\star$*-abiertos de* (X, σ, J) *es* $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, X\}$. *La función identidad* $f : (X, \tau, I) \to (X, \sigma, J)$ *es* Λ_I^s*-continua, pero no es cuasi-*Λ_I^s*-continua ya que* $f^{-1}(\{b, c\}) = \{b, c\}$ *no es un conjunto* Λ_I^s*-abierto.*

Corolario 3.5 *Si una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es Λ_I^s-irresoluta, entonces f es Λ_I^s-continua.*

Demostración:
Es consecuencia inmediata de los Teoremas 3.8 y 3.9. ∎

Proposición 3.7 *Sean $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ y $g : (Y, \sigma, J) \to (Z, \theta, K)$ dos funciones, donde I, J, K son ideales sobre X, Y, Z respectivamente. Entonces:*

(1) *$g \circ f$ es Λ_I^s-irresoluta, si f es Λ_I^s-irresoluta y g es Λ_J^s-irresoluta.*

(2) *$g \circ f$ es Λ_I^s-continua, si f es Λ_I^s-irresoluta y g es Λ_J^s-continua.*

(3) *$g \circ f$ es Λ_I^s-continua, si f es Λ_I^s-continua y g es continua.*

(4) *$g \circ f$ es cuasi-Λ_I^s-continua, si f es Λ_I^s-irresoluta y g es cuasi-Λ_J^s-continua.*

Demostración:
(1) Sea V un conjunto Λ_K-abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es Λ_J^s-irresoluta, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_J^s-abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I^s-irresoluta, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es Λ_I^s-irresoluta.
(2) Sea V un conjunto abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es Λ_J^s-continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_J^s-abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I^s-irresoluta, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es Λ_I^s-continua.
(3) Sea V un conjunto abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I^s-continua, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) =$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es Λ_I^s-continua.
(4) Sea V un conjunto $\theta^\star$-abierto en (Z, θ, K). Puesto que g es cuasi-Λ_J^s-continua, entonces $g^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_J^s-abierto en (Y, σ, J) y como f es Λ_I^s-irresoluta, se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(V))$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Pero $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ y por lo tanto, $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que $g \circ f$ es cuasi-Λ_I^s-continua. ■

En los siguientes tres teoremas se caracterizan a las funciones Λ_I^s-continuas, cuasi-Λ_I^s-continuas y Λ_I^s-irresolutas, respectivamente.

Teorema 3.10 *Para una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es Λ_I^s-continua.*

(2) *$f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado en (X, τ, I) para cada conjunto cerrado B en (Y, σ).*

(3) *Para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto V en (Y, σ) que contiene a $f(x)$ existe un conjunto Λ_I^s-abierto U en (X, τ, I) que contiene a x y $f(U) \subset V$.*

Demostración:
(1) $\Rightarrow$ (2) Sea B cualquier conjunto cerrado en (Y, σ), entonces $V = Y \setminus B$ es un conjunto abierto en (Y, σ) y puesto que f es Λ_I^s-continua, $f^{-1}(V)$ es un subconjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I), pero $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B)$ y por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado en (X, τ, I).
(2) $\Rightarrow$ (1) Sea V cualquier conjunto abierto en (Y, σ), entonces $B = Y \setminus V$ es un conjunto cerrado en (Y, σ) y por la hipótesis, se tiene que $f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado en (X, τ, I), pero $f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V)$ y por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Esto demuestra que

f es Λ_I^s-continua.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea $x \in X$ y V un conjunto abierto en (Y, σ) tal que $f(x) \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$ y puesto que f es una función Λ_I^s-continua, $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I). Si $U = f^{-1}(V)$, entonces U es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I) que contiene a x y además $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea V cualquier conjunto abierto en (Y, σ) y $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$ y por (3) existe un conjunto Λ_I^s-abierto U_x en (X, τ, I) tal que $x \in U_x$ y $f(U_x) \subset V$. Así $x \in U_x \subset f^{-1}(f(U_x)) \subset f^{-1}(V)$ y por lo tanto $f^{-1}(V) = \bigcup\{U_x : x \in f^{-1}(V)\}$. Por la parte (4) del Lema 3.2, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un conjunto Λ_I^s-abierto en (X, τ, I) y así f es Λ_I^s-continua.

Teorema 3.11 *Para una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es cuasi-Λ_I^s-continua.*

(2) *$f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado en (X, τ, I) para cada conjunto $\sigma^\star$-cerrado B en (Y, σ, J).*

(3) *Para cada $x \in X$ y cada conjunto $\sigma^\star$-abierto V en (Y, σ, J) que contiene a $f(x)$ existe un conjunto Λ_I^s-abierto U en (X, τ, I) que contiene a x y $f(U) \subset V$.*

Demostración:

Se prueba de manera similar al Teorema 3.10. ∎

Teorema 3.12 *Para una función $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) *f es Λ_I^s-irresoluta.*

(2) *$f^{-1}(B)$ es un conjunto Λ_I^s-cerrado en (X, τ, I) para cada conjunto Λ_J^s-cerrado B en (Y, σ, J).*

(3) *Para cada $x \in X$ y cada conjunto Λ_J^s-abierto V en (Y, σ, J) que contiene a $f(x)$ existe un conjunto Λ_I^s-abierto U en (X, τ, I) que contiene a x y $f(U) \subset V$.*

Demostración:

Se prueba de manera similar al Teorema 3.10. ∎

3.5. Compacidad y Conexidad vía conjuntos Λ_I^s-abiertos

En esta sección se introducen nuevas nociones de compacidad y de conexidad en términos de conjuntos Λ_I^s-abiertos y conjuntos semi-I-abiertos, para estudiar su comportamiento bajo las imágenes directas de las nuevas formas de continuidad definidas en este capítulo.

Definición 3.9 *Un espacio topológico (X, τ, I) se dice:*

(1) *Λ_I^s-compacto, si cada cubrimiento de X por conjuntos Λ_I^s-abiertos tiene un subcubrimiento finito.*

(2) *Semi-I-compacto, si cada cubrimiento de X por conjuntos semi-I-abiertos tiene un subcubrimiento finito.*

Teorema 3.13 *Sea (X, τ, I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *(X, τ, I) es Λ_I^s-compacto si y sólo si para cada colección $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ de conjuntos Λ_I^s-cerrados en (X, τ, I) satisfaciendo que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, existe una subcolección finita $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \ldots, A_{\alpha_n}$ tal que $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = \emptyset$.*

(2) (X, τ, I) *es semi-I-compacto si y sólo si para cada colección* $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ *de conjuntos semi-I-cerrados en* (X, τ, I) *satisfaciendo que* $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, *existe una subcolección finita* $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, \ldots, A_{\alpha_n}$ *tal que* $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = \emptyset$.

Demostración:

(1) Necesidad: Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de conjuntos Λ_I^s-cerrados tal que $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$, entonces $\{X - A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos Λ_I^s-abiertos tal que

$$X = X - \emptyset = X - \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \bigcup\{X - A_\alpha : \alpha \in \Delta\},$$

es decir, $\{X - A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos Λ_I^s-abiertos. Puesto que X es Λ_I^s-compacto, existe una subcolección $X - A_{\alpha_1}, X - A_{\alpha_2}, \ldots, X - A_{\alpha_n}$ tal que

$$X = \bigcup\{X - A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = X - \bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\}.$$

Esto demuestra que $\bigcap\{A_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = \emptyset$.

Suficiencia: Suponga que $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos Λ_I^s-abiertos, entonces $\{X - U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos Λ_I^s-cerrados tal que $\bigcap\{X - U_\alpha : \alpha \in \Delta\} = X - \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\} = X - X = \emptyset$. Por hipótesis, existe una subcolección finita $X - U_{\alpha_1}, X - U_{\alpha_2}, \ldots, X - U_{\alpha_n}$ tal que $\bigcap\{X - U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = \emptyset$. Ahora observe que $X = X - \emptyset = X - \bigcap\{X - U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\} = X - (X - \bigcup\{U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\}) = \bigcup\{U_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, (X, τ, I) es Λ_I^s-compacto.

(2) Se demuestra de manera similar a la parte (1). ■

Teorema 3.14 *Sea* (X, τ, I) *un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si* $(X, \tau^{\Lambda_I^s})$ *es compacto, entonces* (X, τ, I) *es semi-*I*-compacto.*

(2) *Si* (X, τ, I) *es* Λ_I^s*-compacto, entonces* (X, τ, I) *es* $\tau^\star$*-compacto.*

(3) *Si* (X, τ, I) *es* Λ_I^s*-compacto, entonces* (X, τ, I) *es compacto.*

Demostración:

(1) Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ cualquier cubrimiento de X por conjuntos semi-I-abiertos, entonces para cada $\alpha \in \Delta$, U_α es un Λ_I^s-conjunto y por lo tanto, $U_\alpha \in \tau^{\Lambda_I}$ para cada $\alpha \in \Delta$. Puesto que $(X, \tau^{\Lambda_I^s})$ es compacto, entonces existe un subconjunto finito Δ_0 de Δ tal que $X = \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Delta_0\}$. Esto demuestra que (X, τ, I) es semi-I-compacto.

(2) Sea $\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de conjuntos $\tau^\star$-cerrados en (X, τ, I) tal que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\} = \emptyset$. Puesto que cada conjunto $\tau^\star$-cerrado es Λ_I^s-cerrado, entonces $\{F_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de conjuntos Λ_I^s-cerrados y (X, τ, I) es Λ_I^s-compacto. Por la parte (1) del Teorema 3.13, existe un subconjunto finito Δ_0 de Δ tal que $\bigcap\{F_\alpha : \alpha \in \Delta_0\} = \emptyset$ y por la parte (2) del Teorema 2.13, se concluye que (X, τ, I) es $\tau^\star$-compacto.

(3) Sigue de la parte (2) y del hecho que cada espacio $\tau^\star$-compacto es compacto.■

Teorema 3.15 *Si* $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ *es una función sobreyectiva, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si* f *es una función* Λ_I^s*-irresoluta y* (X, τ, I) *es* Λ_I^s*-compacto, entonces* (Y, σ, J) *es* Λ_J^s*-compacto.*

(2) *Si* f *es una función semi-*I*-irresoluta y* (X, τ, I) *es semi-*I*-compacto, entonces* (Y, σ, J) *es semi-*J*-compacto.*

(3) *Si* f *es una función cuasi-*Λ_I^s*-continua y* (X, τ, I) *es* Λ_I^s*-compacto, entonces* (Y, σ, J) *es* $\sigma^\star$*-compacto.*

(4) *Si f es una función Λ_I^s-continua y (X,τ,I) es Λ_I^s-compacto, entonces (Y,σ) es compacto.*

Demostración:

(1) Sea $\{V_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ un cubrimiento de Y por conjuntos Λ_J^s-abiertos. Puesto que f es Λ_I^s-irresoluta, se tiene que $\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos Λ_I^s-abiertos y como (X,τ,I) es Λ_I^s-compacto, existe un subconjunto finito Δ_0 de Δ tal que $X = \bigcup\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Delta_0\}$. Por la sobreyectividad de f, se obtiene que $Y = f(X) = f(\bigcup\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in \Delta_0\}) = \bigcup\{f(f^{-1}(V_\alpha)) : \alpha \in \Delta_0\} = \{V_\alpha : \alpha \in \Delta_0\}$ y esto demuestra que (Y,θ,J) es Λ_J^s-compacto.

(2), (3) y (4) se demuestran de manera similar a la parte (1). ∎

Definición 3.10 *Un espacio topológico (X,τ,I) se dice:*

(1) *Λ_I^s-conexo, si X no puede ser escrito como una unión disjunta de dos conjuntos Λ_I^s-abiertos no vacíos.*

(2) *Semi-I-conexo, si X no puede ser escrito como una unión disjunta de dos conjuntos semi-I-abiertos no vacíos.*

Teorema 3.16 *Sea (X,τ,I) un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si $(X,\tau^{\Lambda_I^s})$ es conexo, entonces (X,τ,I) es semi-I-conexo.*

(2) *Si (X,τ,I) es Λ_I^s-conexo, entonces (X,τ,I) es $\tau^\star$-conexo.*

(3) *Si (X,τ,I) es Λ_I^s-conexo, entonces (X,τ,I) es conexo.*

Demostración:

(1) Suponga que (X,τ,I) no es semi-I-conexo, entonces existen conjuntos semi-I-abiertos A y B no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. Por la parte (3)

del Lema 3.2, se tiene que A y B son Λ_I^s-conjuntos y por lo tanto, $(X, \tau^{\Lambda_I^s})$ no es conexo.
(2) Suponga que (X, τ, I) no es $\tau^\star$-conexo, entonces existen conjuntos $\tau^\star$-abiertos A y B no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X$. Por el Corolario 3.3, se tiene que A y B son conjuntos Λ_I^s-abiertos y así, (X, τ, I) no es Λ_I^s-conexo.
(3) Sigue de la parte (2) y del hecho que cada espacio $\tau^\star$-conexo es conexo. ■

Teorema 3.17 *En un espacio topológico (X, τ, I), las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) (X, τ, I) *es Λ_I^s-conexo.*

(2) $\emptyset$ *y X son los únicos subconjuntos de X que son a la vez Λ_I^s-abiertos y Λ_I^s-cerrados.*

(3) *Cada función Λ_I^s-continua de X en un espacio discreto Y con al menos dos puntos, es una función constante.*

Demostración:
(1)⇒(2) Sea V un subconjunto de X que es Λ_I^s-abierto y Λ_I^s-cerrado, entonces $X - V$ es Λ_I^s-abierto y Λ_I^s-cerrado, así $X = V \cup (X - V)$. Es decir, X es la unión de dos conjuntos Λ_I^s-abiertos disjuntos y como (X, τ, I) es Λ_I^s-conexo, entonces uno de estos conjuntos tiene que ser $\emptyset$. Por lo tanto, $V = \emptyset$ o $V = X$.
(2)⇒(1) Suponga que (X, τ, I) no es Λ_I^s-conexo y sea $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos Λ_I^s-abiertos no vacíos y disjuntos en (X, τ, I), entonces $U = X - V$ es un conjunto Λ_I^s-abierto y Λ_I^s-cerrado. Por hipótesis, se tiene que $U = \emptyset$ o $U = X$, lo que contradice el hecho que U y V son no vacíos y disjuntos y por lo tanto, (X, τ, I) es Λ_I^s-conexo.
(2)⇒(3) Sea $f : (X, \tau, I) \to Y$ una función Λ_I^s-continua donde Y es un espacio topológico con la topología discreta y contiene al menos dos puntos, entonces X

se puede cubrir por una colección de conjuntos que son a la vez Λ_I^s-abiertos y Λ_I^s-cerrados de la forma $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$, de esto, se concluye que existe un $y_0 \in Y$ tal que $f^{-1}(\{y_0\}) = X$ y así, f es una función constante.

(3)⇒(2) Sea W un subconjunto de (X, τ, I) que es Λ_I^s-abierto y Λ_I^s-cerrado. Suponga que $W \neq \emptyset$ y sea $f : (X, \tau, I) \to Y$ una función Λ_I^s-continua definida por $f(W) = \{y_1\}$ y $f(X - W) = \{y_2\}$ para $y_1 \neq y_2$, con $y_1, y_2 \in Y$. Puesto que f es una función constante, se concluye que $X = W$. ∎

A continuación, se estudia bajo que condiciones se preserva la Λ_I^s-conexidad por imagen directa de un espacio Λ_I^s-conexo.

Teorema 3.18 *Si $f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ es una función sobreyectiva, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si f es una función Λ_I^s-irresoluta y (X, τ, I) es Λ_I^s-conexo, entonces (Y, σ, J) es Λ_J^s-conexo.*

(2) *Si f es una función semi-I-irresoluta y (X, τ, I) es semi-I-conexo, entonces (Y, σ, J) es semi-J-conexo.*

(3) *Si f es una función cuasi-Λ_I^s-continua y (X, τ, I) es Λ_I^s-conexo, entonces (Y, σ, J) es $\sigma^\star$-conexo.*

(4) *Si f es una función Λ_I^s-continua y (X, τ, I) es Λ_I^s-conexo, entonces (Y, σ) es conexo.*

Demostración:

(1) Suponga que (Y, σ, J) no es Λ_J^s-conexo, entonces existen conjuntos Λ_J^s-abiertos no vacíos H, G en (Y, σ, J) tales que $G \cap H = \emptyset$ y $G \cup H = Y$. Por lo tanto, se tiene que $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = \emptyset$, $f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H) = X$ y además, $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son conjuntos Λ_I^s-abiertos no vacíos en (X, τ, I). Esto demuestra que (X, τ, I) no

es Λ_I^s-conexo.

(2), (3) y (4) se demuestran de manera similar a la parte (1). ■

Problemas Abiertos. Los Teoremas 3.14 y 3.16 se demostraron usando los hechos que todo conjunto semi-I-abierto es Λ_I^s-abierto y que todo conjunto $\tau^\star$-abierto es Λ_I^s-abierto. Sin embargo, no se han obtenidos contraejemplos para mostrar que los recíprocos de las implicaciones contenidas en tales teoremas no son ciertos. En este sentido se plantean los siguientes problemas.

(1) ¿Existe un espacio topológico (X, τ, I) que es semi-I-compacto (resp. semi-I-conexo) pero el espacio $(X, \tau^{\Lambda_I^s})$ no es compacto (resp. conexo)?

(2) ¿Existe un espacio topológico (X, τ, I) que es $\tau^\star$-compacto (resp. $\tau^\star$-conexo) pero el espacio (X, τ, I) no es Λ_I^s-compacto (resp. Λ_I^s-conexo)?

Conclusiones

En este trabajo se realizó un estudio detallado de las nociones de Λ_I-conjuntos, conjuntos I-g-cerrados y Λ_I-cerrados, Λ_I^s-conjuntos, conjuntos I-gs-cerrados y Λ_I^s-cerrados, así como también se caracterizaron algunos axiomas débiles de separación tales como espacios I-T_1, I-$T_{1/2}$, semi-I-T_1 y semi-I-$T_{1/2}$. Se introdujeron nuevas clases de funciones denominadas Λ_I-continuas, cuasi-Λ_I-continuas, Λ_I-irresoluta, Λ_I^s-continuas, cuasi-Λ_I^s-continuas y Λ_I^s-irresoluta, se estudiaron las relaciones existentes entre estas clases de funciones y algunas propiedades de las mismas. De igual manera, se introdujeron nuevas nociones de compacidad y conexidad vía conjuntos Λ_I-abiertos, $\tau^\star$-abiertos, I-abiertos, Λ_I^s-abiertos y semi-I-abiertos para estudiar el comportamiento de tales nociones bajo las imágenes directas de las clases de funciones definidas en este trabajo. Cabe señalar que en algunos resultados obtenidos que involucraban el uso de nociones descritas mediante conjuntos I-abiertos, se tuvo que pedir la condición adicional de que el espacio topológico (X, τ, I) empleado fuese Hayashi-Samuels para garantizar que el conjunto X resultara ser I-abierto. Para un estudio posterior se considera interesante analizar el comportamiento de las distintas nociones de compacidad y conexidad tratadas en esta investigación bajo las imágenes inversas de las nuevas formas de continuidad que se han introducido.

Bibliografía

[1] M. E. Abd El-Monsef, N. El-Deeb y R. A. Mahmoud, *β-open sets and β-continuous mappings*, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., 12(1) (1983), 77-90.

[2] F. G. Arenas, J. Dontchev y M. Ganster, *On λ-sets and the dual of generalized continuity*, Questions Answers Gen. Topology, 15(1) (1997), 3-13.

[3] J. Dontchev y H. Maki, *On sg-closed sets and semi-λ-closed sets*, Questions Answers Gen. Topology, 15(2) (1997), 259-266.

[4] E. Hatir y T. Noiri, *On decompositions of continuity via idealization*, Acta. Math. Hungar., 96(4) (2002), 341-349.

[5] E. Hatir y T. Noiri, *On semi-I-open sets and semi-I-continuous functions*, Acta. Math. Hungar., 107(4) (2005), 345-353.

[6] D. S. Jankovic y T.R. Hamlett, *New topologies from old via ideals*, Amer. Math. Monthly, 97 (1990), 295-310.

[7] D. S. Jankovic y T. R. Hamlett, *Compatible extensions of ideals*, Boll. Un. Mat. Ital., 7(6-B) (1992), 453-465.

[8] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. I, Academic Press, New York, 1966.

[9] N. Levine, *Semiopen sets and semicontinuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 36-41.

[10] N. Levine, *Generalized closed sets in topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 19(2) (1970), 89-96.

[11] H. Maki, *Generalized Λ-sets and the associated closure operator*, The special Issue in commemoration of Prof. Kazusada IKEDA's Retirement, (1986), 139-146.

[12] M. Murugalingam, *A Study of Semi Generalized Topology*, Ph. D. Thesis, Manonmaniam Sundaranar Univ., Tirunelveli, Tamil Nadu, INDIA, 2005.

[13] O. Njåstad, *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math., 15 (1965), 961-970.

[14] T. Noiri y A. Keskin, *On Λ_I-sets and some weak separation axioms*, Int. Journal of Math. Analysis, 5(11) (2011), 539-548.

[15] J. Sanabria, E. Rosas y C. Carpintero, *On Λ_I^s-sets and the related notions in ideal topological spaces*, to appear in Math. Slovaca, 63(6) (2013).

HOJAS DE METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	**UN ESTUDIO DE ALGUNAS MODIFICACIONES DE Λ-CONJUNTOS Y NOCIONES ASOCIADAS, VÍA IDEALES SOBRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS**
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	**Código CVLAC / e-mail**	
Acosta Brazón Edumer Jermainnel	**CVLAC**	**17622228**
	e-mail	**edumeracostab@gmail.com**
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

CONJUNTOS, FUNCIONES, CONTINUIDAD, CONPACIDAD Y CONEXIDAD

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
CIENCIAS	**MATEMÁTICAS**

Resumen:

Dado un espacio topológico (X, τ) sobre el que se considera un ideal, se estudian las nociones de Λ_I-conjuntos, conjuntos I-g-cerrados, conjuntos Λ_I-cerrados, Λ_I^S-conjuntos, conjuntos I-gs-cerrados y conjuntos Λ_I^S -cerrados. Además, se caracterizan las propiedades de separación I-T1, I-T1/2, semi-I-T1 y semi-I-T1/2, las cuales generalizan algunas propiedades clásicas de separación. De igual manera, se introducen y caracterizan nuevas variantes de funciones continuas en términos de los conjuntos mencionados anteriormente, se investigan las relaciones existentes entre éstas y se estudia el comportamiento de nuevas nociones de compacidad y conexidad, bajo imágenes directas de este tipo de funciones.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	**ROL / Código CVLAC / e-mail**	
JOSÉ SANABRIA	**ROL**	**CA** [ ] **AS** [x] **TU** [ ] **JU** [ ]
	CVLAC	**11.382.634**
	e-mail	**jesanabria@gmail.com**
	e-mail	
MARGOT SALAS	**ROL**	**CA** [ ] **AS** [ ] **TU** [ ] **JU** [x]
	CVLAC	**13.016.311**
	e-mail	**salasbrown@gmail.com**
	e-mail	
ORLANDO GARCÍA	**ROL**	**CA** [ ] **AS** [ ] **TU** [ ] **JU** [x]
	CVLAC	**14661095**
	e-mail	**ogarciam554@gmai.com**
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año **Mes** **Día**

Colocar fecha de discusión y aprobación:

2013	**5**	**10**

Lenguaje: **SPA**

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-acostaej.pdf	**Aplication/pdf**

Alcance:

Espacial:

Temporal: **intemporal**

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciado en matematicas

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciado

Área de Estudio: matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado: Universidad de Oriente

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU Nº 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda ***"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC Nº 696/2009".***

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLAÑOS CURVELO
Secretario

C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso- 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009) : "los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario para su autorización".

Edumer

Br. Edumer Acosta
Autor

Dr. José Sanabria
Asesor