



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
NÚCLEO DE SUCRE  
ESCUELA DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

DINÁMICA GLOBAL DE UN MODELO DE CADENA ALIMENTARIA  
DE TRES ESLABONES EN UN QUIMIÓSTATO CON RESPUESTA  
FUNCIONAL HOLLING TIPO I  
(Modalidad: Tesis de grado)

ARNOLDO RAFAEL CALDERÍN GONZÁLEZ

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2011

DINÁMICA GLOBAL DE UN MODELO DE CADENA ALIMENTARIA  
DE TRES ESLABONES EN UN QUIMIÓSTATO CON RESPUESTA  
FUNCIONAL HOLLING TIPO I  
APROBADO POR:

---

Prof. Sael Romero  
Asesor Académico

---

Jurado Principal

---

Jurado Principal

## DEDICATORIA

A Dios; el padre supremo,

A mis padres: Arnoldo Calderín y Eredia González

A mi hija Naomi Calderín

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres por ser mi gran impulso para crecer.

Al Prof. Sael Romero por su valiosa orientación, dedicación, paciencia y por toda su ayuda prestada como profesional y amigo

A todos aquellos profesores que he tenido a lo largo de mi vida, gracias por entregar en cada unas de sus clases lo mejor de si, por ser parte importante de mi formación como persona y como profesional.

## ÍNDICE

	Pág.
RESUMEN	VI
INTRODUCCIÓN	1
1 NOCIONES PRELIMINARES	4
1.1 Teorema de Existencia y Unicidad. . . . .	4
1.2 Principio de comparación. . . . .	5
1.3 Estabilidad. . . . .	6
1.4 Estabilidad para sistemas lineales. . . . .	7
1.5 Sistemas autónomos. Linealización. . . . .	7
1.6 Criterio negativo de Bendixson y criterio de Dulac. . . . .	11
1.7 Persistencia. . . . .	13
2 MODELO DE CADENA ALIMENTARIA SIMPLE DE TRES ESLABONES	
EN EL QUIMIOSTATO SIN RETARDO	14
2.1 Descripción del modelo. . . . .	14
2.2 Disipatividad . . . . .	15
2.3 Reducción a un sistema bidimensional. . . . .	19
2.4 Escenario de extinción . . . . .	20
2.5 Puntos de equilibrio para el caso bidimensional . . . . .	23
2.6 Estabilidad local de los equilibrios para el caso bidimensional. . . . .	24
2.7 Estabilidad global de los equilibrios para el sistema bidimensional. . . . .	27
2.8 Simulación numérica . . . . .	32
BIBLIOGRAFÍA	41

## RESUMEN

En esta tesis se analiza un sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional que representa un modelo de cadena alimentaria simple. El trabajo está presentado en dos capítulos. En el primero, se expone la teoría preliminar tratando en lo posible que el trabajo sea autocontenido. Aquí se destaca de manera primordial la teoría de los sistemas dinámicos, así como también los criterios de Poincaré-Bendixson y Dulac. En el capítulo 2 se considera un modelo del tipo que ocurre en el quimiostato para una cadena alimentaria de tres eslabones. El sistema descrito por el modelo consiste de: Una sustancia de nutrientes bien agitada es el primer eslabón de la cadena; los nutrientes sirven de alimento a la población de microorganismos que se encuentra en el nivel intermedio de la cadena alimentaria, y en el tercer eslabón se encuentran otros microorganismos que crecen a expensas de los anteriores. La respuesta de funcionamiento, es decir la manera en que las especies consumen su alimento, es de la forma Holling tipo I (o Lotka-Volterra). Se muestra la existencia de un atractor global para las soluciones del modelo y también que el único punto de equilibrio con coordenadas positivas es global asintóticamente estable para las soluciones del sistema.

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas que describen la interacción entre comunidades biológicas están recibiendo un considerable interés, en un mundo cada vez más comprometido con la conservación y defensa del medio ambiente y los recursos naturales (ver[1], [2], [3] y [4]). Las perturbaciones que actúan sobre dichas comunidades y los efectos que llevan a la persistencia o extinción de algunas especies son de máximo interés, tanto desde el punto de vista práctico como teórico y su estudio requiere cada vez más de la implementación de modelos matemáticos.

Esto queda patente en la literatura matemática sobre ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, de todos los tipos (ordinarias, en derivadas parciales, integrodiferenciales, con retardo, entre otros), como puede verse en [5], [6], [2], [7] y [8]. Cabe señalar que el estudio de mecanismos simples inter-especies o entre especies y el medio (problemas logísticos) condujo en la matemática al descubrimiento de uno de los fenómenos más interesantes de las últimas décadas: los sistemas caóticos.

En este contexto, en la actualidad, el tema de investigación sobre la dinámica de las poblaciones que intervienen en cadenas alimentarias ha motivado un especial interés y se están construyendo los aspectos teóricos relevantes que permiten comprender y predecir los comportamientos futuros de las especies que intervienen en estos sistemas biológicos.

En su forma más elemental, una cadena alimentaria se puede describir por la conocida interacción depredador-presa en la que una especie(presa) sirve de alimento a otra especie (depredadora). A esta interacción elemental le sigue el caso de una cadena alimentaria constituida por tres eslabones. El primer eslabón es un suplemento alimenticio o nutriente de crecimiento que a menudo se encuentra en proporciones limitadas en la naturaleza, en el nivel intermedio una población presa que crece a expensas del nutriente y en el último una población depredadora que se alimenta de la población presa.

Experimentalmente este proceso se puede desarrollar en un ensayo de labora-

torio que se realiza en un aparato denominado quimiostato o reactor de cultivo, el cual modela la competencia en un lago. Este aparato consiste de tres botellas, una botella alimentaria que contiene todos los nutrientes necesarios para el crecimiento de un microorganismo, otra botella donde ocurre todo el experimento y una botella colectora o de desperdicio, constituyendo de esta forma un sistema abierto. Este aparato es importante en estudios ecológicos porque la matemática es manejable y los experimentos relevantes son posibles de realizar (aunque no necesariamente fáciles); su lugar en la ecología está bien documentado en libros y artículos del tema, tales como [8], [9] y [10].

Las investigaciones realizadas en las últimas décadas muestran que la dinámica de los modelos de cadenas alimentarias de tres eslabones exhiben un comportamiento variado, incluyendo atractores múltiples y caos, como puede observarse en [11] y [12].

El quimiostato viene a representar el punto inicial para modelos biológicos más reales, los cuales conducen a problemas matemáticos interesantes. Todas estas acotaciones reflejan la importancia del quimiostato.

El modelo específico de cadena alimentaria de tres eslabones que se estudiará, está compuesto por un suplemento alimenticio o nutriente en el primer eslabón que denotaremos  $S(t)$ , el cual se supone distribuido de manera uniforme en el quimiostato, en el nivel intermedio, la población presa  $P(t)$  y en el último eslabón la población depredadora  $Q(t)$ . Estas notaciones representan las densidades del nutriente, de la especie presa y de la especie depredadora en el instante de tiempo  $t$ , respectivamente.

La interacción local, entre las especies y el nutriente dentro del quimiostato, está representada por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o por medio de un sistema de ecuaciones integrodiferenciales; Nuestro caso será modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.



$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = D[S^0 - S(t)] - \frac{b}{\gamma}S(t)P(t), \\ \frac{dP}{dt} = P(t) \left[ bS(t) - D - \frac{d}{\eta}Q(t) \right], \\ \frac{dQ}{dt} = Q(t) [dP(t) - D], \end{cases} \quad (1)$$

donde  $S(0) = S_0 \geq 0$ ,  $P(0) = P_0 \geq 0$ ,  $Q(0) = Q_0 \geq 0$ ,  $t \geq 0$ , y  $b$ ,  $d$ ,  $S^0$ ,  $\gamma$ ,  $D$ , y  $\eta$  son parámetros positivos. La respuesta funcional de las especies presa y depredadora es de forma Holling tipo I (o Lotka-Volterra) (ver [13]), donde los parámetros  $b$  y  $d$  denotan la tasa de crecimiento *per cápita* de la población presa y de la población depredadora, respectivamente;  $\gamma$  y  $\eta$  representan las constantes de rendimiento de crecimiento de los microorganismos presas y depredadores respectivamente. El parámetro  $S^0$  denota la concentración de la botella alimentaria y  $D$  representa simultáneamente la tasa de desperdicio de la botella alimentaria y la tasa de mortalidad de la presa y del depredador.

El principal propósito de este trabajo es establecer la estabilidad local y global de los puntos de equilibrio del sistema (1); además, de buscar el conjunto absorbente para las soluciones del sistema con algunos valores de los parámetros, y hallar valores de estos para los cuales las especies sobreviven.

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma: En el capítulo 1, se resumen los resultados matemáticos más importantes que se utilizarán. En el capítulo 2, se determina y analiza la estabilidad local de los equilibrios del modelo de cadena alimentaria en el quimiostato. Se describen las propiedades locales y globales de los puntos de equilibrio del sistema, se estudia la persistencia y disipatividad y se realizan algunas simulaciones numéricas que comprueban la veracidad de las afirmaciones teóricas.

# CAPÍTULO 1

## NOCIONES PRELIMINARES

En el presente capítulo se presentan algunos resultados básicos que serán utilizados en el desarrollo de este trabajo. Se enuncian algunos teoremas, cuyas demostraciones serán omitidas; sin embargo, siempre se darán referencias apropiadas donde pueden encontrarse.

### 1.1 Teorema de Existencia y Unicidad.

La forma normal de un Problema de Valor Inicial (P.V.I.) para un sistema diferencial de primer orden es

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $x$ ,  $x_0$  y  $F$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

#### **Teorema 1.1. *Existencia y Unicidad.***

Considere el (P.V.I.) (1.1) donde  $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $J = (a, b)$ , con  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , abierto y conexo; las funciones  $F_i$  y  $D_{x_j}F_i$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) son continuas en el conjunto  $J \times \Omega$  del espacio  $t - x$ .  $F$  satisface una condición de Lipschitz con respecto a  $x \in \Omega$ ,  $(t_0, x_0)$  es un punto interior de  $J \times \Omega$ . Entonces existe  $h > 0$  tal que el (P.V.I.) (1.1) tiene una única solución definida en el intervalo  $[t_0 - h, t_0 + h]$ .

**Demostración:** Ver[14].

**Observaciones.** Recuerde que:

- $x_0$  es un punto interior del conjunto  $A$  si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $x_0 \in U \subset A$ .

- Un conjunto de puntos  $\Omega$  es conexo si no existen conjuntos  $A$  y  $B$  tal que  $A \cap B \cap \Omega = \emptyset$ ,  $A \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $B \cap \Omega \neq \emptyset$  y  $\Omega \subset A \cup B$ .
- Un conjunto de puntos  $\Omega$  es convexo si cualquier segmento de recta que una dos de sus puntos, también pertenezca al conjunto.
- Un subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  es un dominio si es un conjunto abierto y conexo.
- Una función  $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $J$  es un intervalo y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ; se dice que es globalmente lipschitziana, respecto a  $x \in \Omega$  y uniformemente en  $t \in J$ , sobre  $J \times \Omega$ , si existe una constante  $L > 0$  tal que  $|F(t, x) - F(t, y)| < L|x - y|$ , para todo  $x, y \in \Omega$ ,  $t \in J$ . A la constante  $L$  se le llama constante de Lipschitz para  $F$ .
- Se dice que  $F$  es una función localmente Lipschitz sobre  $J \times D$ , si para todo punto  $p \in J \times D$ , existe un entorno  $V_p$  del punto  $p$ , tal que la restricción de  $F$  a  $V_p$  es globalmente Lipschitz.

Más adelante, con el propósito de mostrar la existencia y unicidad se usa el siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en [15].

**Proposición 1.1.** *Sea  $F : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua, donde  $J$  es un intervalo, y  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $\frac{dF}{dx}$  existe, es continua y uniformemente acotada sobre  $J \times \Omega$ , con  $\Omega$  un conjunto convexo. Si  $J \times \Omega$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces  $F$  es globalmente Lipschitz sobre  $J \times \Omega$ .*

## 1.2 Principio de comparación.

El principio de comparación sirve para obtener cotas de la solución de (1.1) sin necesidad de calcular la solución. Se aplica a las desigualdades diferenciales de la forma  $v' \leq F(t, v(t))$  para todo  $t$  en un cierto intervalo. El principio de comparación compara la solución de la desigualdad diferencial  $v' \leq F(t, v(t))$  con la de la ecuación diferencial  $u' = F(t, u)$ .

**Lema 1.1. (Principio de comparación).** Considere la ecuación diferencial escalar

$$u' = F(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

donde  $F(t, u)$  es continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , para todo  $t \geq 0$  y todo  $u \in J \subset \mathbb{R}$ . Sea  $[t_0, T)$  ( $T$  puede ser infinito) el máximo intervalo de existencia de la solución  $u(t)$  y supongamos que  $u(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Sea  $v(t)$  una función diferenciable que satisface la desigualdad diferencial.

$$v' \leq F(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0$$

con  $v(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Entonces

$$v(t) \leq u(t)$$

para todo  $t \in [t_0, T)$ .

**Demostración.** Ver[16].

### 1.3 Estabilidad.

Considere el sistema (1.1) donde  $F$  es Lipschitz,  $F \in C[J \times \Omega, \mathbb{R}^n]$ ,  $J = (a, b)$ , con  $-\infty \leq a < b < +\infty$ ,  $\Omega$  un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $x(t)$  una solución del sistema.

**Definición 1.1.** La solución  $x(t)$  es llamada **estable** si: para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que cada solución  $\bar{x}(t)$  con  $|\bar{x}(0) - x(0)| < \delta$ , existe para todo  $t \geq 0$  y satisface la desigualdad

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \epsilon, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Si la solución  $x(t)$  no es estable se dice que es **inestable**.

**Definición 1.2.** Una solución  $x(t)$  es llamada **asintóticamente estable** si es estable y existe  $\beta > 0$  tal que cada solución  $\bar{x}(t)$  con  $|\bar{x}(0) - x(0)| < \beta$  satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - x(t)| = 0.$$

## 1.4 Estabilidad para sistemas lineales.

Considere el sistema lineal

$$x' = Ax, \quad (1.2)$$

donde  $A$  es una matriz real o compleja de dimensión  $n \times n$ .

### Teorema 1.2.

- (a) *Toda solución  $x(t)$  de (1.2) es asintóticamente estable si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.*
- (b) *Toda solución  $x(t)$  de (1.2) es inestable si al menos un autovalor de  $A$  tiene parte real positiva.*
- (c) *Suponga que  $n - l$  autovalores de  $A$  tienen parte real negativa y  $l$  tiene parte real cero; es decir,  $\lambda_1 = i\sigma_1, \dots, \lambda_l = i\sigma_l$ . Suponga además que  $\lambda_j = i\sigma_j$ , tiene multiplicidad  $k_j$ . Eso significa que el polinomio característico de  $A$  se puede factorizar como*

$$P(\lambda) = (\lambda - i\sigma_1)^{k_1} \dots (\lambda - i\sigma_l)^{k_l} q(\lambda)$$

*donde todas las raíces de  $q(\lambda)$  tiene parte real negativa. Entonces toda solución  $x(t)$  de (1.2) es estable si  $A$  tiene  $k_j$  autovectores, linealmente independientes para cada autovalor  $\lambda_j = i\sigma_j$ . De otro modo, todas las soluciones  $x(t)$  son inestables.*

**Demostración.** Ver[17].

## 1.5 Sistemas autónomos. Linealización.

**Definición 1.3.** *El sistema*

$$x' = F(x); \quad (1.3)$$

donde  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es llamado un sistema autónomo.

**Nota:** Observe que el lado derecho de (1.5) no depende explícitamente de la variable temporal  $t$ .

### Propiedades.

- Si  $x(t)$  es una solución de (1.3) sobre un intervalo  $I = (a, b)$ , entonces para cualquier número real  $\tau$ , la función  $x(t - \tau)$  es la solución de (1.3) sobre el intervalo  $I_\tau = (a + \tau, b + \tau)$ .
- Asuma que para todo  $x_0 \in \Omega$ , existe una única solución  $\phi(t, x_0)$  de (1.3) que pasa por  $x_0$  cuando  $t = 0$ . La función  $\phi(t, x_0)$  está definida sobre el abierto  $J \times \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y satisface las siguientes propiedades:

$$(i) \phi(0, x_0) = x_0;$$

$$(ii) \phi(t, x_0) \text{ es continua en } J \times \Omega;$$

$$(iii) \phi(t + s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0)) \text{ sobre } J \times \Omega.$$

**Definición 1.4.** Una **órbita**  $\gamma = \gamma(x_0)$  a través de un punto fijo  $x_0 \in \Omega$  es el conjunto de  $\mathbb{R}^n$  definido por

$$\gamma(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R}\}$$

### Observaciones.

- $\phi(t, x_0)$  y  $\phi(t + \tau, x_0)$  son diferentes parametrizaciones de la misma órbita  $\gamma(x_0)$ .
- Para cada  $x$  en  $\Omega$ , existe una única órbita.

**Definición 1.5.** Un **punto de equilibrio o punto crítico o punto singular** del campo vectorial  $F(x)$  es un punto  $p$  tal que  $F(p) = 0$ .

Si  $p$  es un punto de equilibrio del campo vectorial  $F(x)$ ; entonces  $x(t) = p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , es una solución de (1.3).

Las definiciones que vienen a continuación se refieren a conjuntos límites y conjuntos invariantes.

**Definición 1.6.** *Un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , se dice que es un punto  $\omega$ -límite de la solución  $\varphi_t(x_0)$  si existe una sucesión  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$  con la propiedad que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = \infty$  y tal que*

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x_0) = p.$$

*Denotaremos por  $\omega(x_0)$  al conjunto de todos los puntos  $\omega$ -límites de la solución  $\varphi_t(x_0)$ ; es decir,*

$$\omega(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : \text{existe } \{t_n\} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow \infty, \varphi_{t_n}(x_0) \rightarrow p\}$$

**Definición 1.7.** *Diremos que un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , se dice que es un punto  $\alpha$ -límite de la solución  $\varphi_t(x_0)$  si existe una sucesión  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$  con la propiedad que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = -\infty$  y tal que*

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x_0) = p.$$

*Denotaremos por  $\alpha(x_0)$  al conjunto de todos los puntos  $\alpha$ -límites de la solución  $\varphi_t(x_0)$ , es decir.*

$$\alpha(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : \text{existe } \{t_n\} \subset \mathbb{R}, t_n \rightarrow -\infty, \varphi_{t_n}(x_0) \rightarrow p\}$$

**Definición 1.8.** *Sea  $\bar{x}(t)$  cualquier solución de (1.3) y sea*

$$x = \bar{x}(t) + y, \tag{1.4}$$

*Sustituyendo (1.4) en (1.3) y desarrollando en serie de Taylor alrededor de  $\bar{x}(t)$  resulta*

$$x' = \bar{x}' + y' = F(\bar{x}(t)) + D_x F(\bar{x}(t))y + O(|y|^2)$$

*donde  $D_x F$  es la matriz jacobiana de  $F$  y  $|\cdot|$  denota una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Luego, como  $\bar{x}' = F(\bar{x}(t))$ , se tiene que*

$$y' = D_x F(\bar{x}(t))y + O(|y|^2), \tag{1.5}$$

La ecuación  $D_x F(\bar{x}(t))$  y es llamada la primera aproximación a (1.5) alrededor de la solución  $\bar{x}(t)$  y la ecuación (1.5) describe la evolución de las órbitas cerca de  $\bar{x}(t)$ .

**Definición 1.9.** Sea  $F \in C^1(\Omega)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es una vecindad de 0, y 0 es un punto de equilibrio de  $F$ ; es decir,  $F(0) = 0$ . La ecuación  $x' = Ax$ , donde  $A$  es la matriz jacobiana  $D_x F(0)$ , es llamada la ecuación linealizada en el punto 0 y la transición de la ecuación no lineal (1.3) a la ecuación lineal  $x' = D_x F(0)x$  se denomina linealización.

**Teorema 1.3.** Sea  $x \equiv 0$  el punto de equilibrio del sistema no lineal (1.3) y considere la ecuación linealizada (1.2), con  $A = D_x F(0)$

- (a) Si el punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  de la ecuación linealizada (1.2) es asintóticamente estable, entonces el punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  de (1.3) también es asintóticamente estable. De manera equivalente, la solución  $x(t) \equiv 0$  de (1.3) es asintóticamente estable si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.
- (b) Si el punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  de la ecuación linealizada (1.2) es inestable, entonces el punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  del sistema no lineal (1.3) es inestable. De manera equivalente, la solución  $x(t) \equiv 0$  de (1.3) es inestable si al menos un autovalor de  $A$  tiene parte real positiva.
- (c) Si el punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  de la ecuación linealizada (1.2) es estable pero no asintóticamente estable, entonces el punto de equilibrio  $x(t) \equiv 0$  del sistema no lineal (1.3) puede ser estable, asintóticamente estable o inestable.

**Demostración.** Ver[17].

**Definición 1.10.** El origen es llamado punto de equilibrio hiperbólico de  $F$  si  $F(0) = 0$  y la matriz jacobiana  $A = D_x F(0)$  tiene solamente autovalores con  $\text{Re}\lambda \neq 0$ . Si  $\text{Re}\lambda = 0$  se dice que el punto de equilibrio es no hiperbólico.

**Definición 1.11.** Sea  $D$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 1$ , y sea  $x(t) = \varphi(t, x_0)$  tal que  $\varphi_t : D \rightarrow D$  el flujo de la ecuación diferencial (1.1) definida para



todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces un conjunto  $S \subset D$  es llamado invariante con respecto al flujo  $\varphi_t$  si  $\varphi_t(S) \subset S$  para todo,  $t \in \mathbb{R}$  y  $S$  es llamado positivamente (o negativamente) invariante con respecto al flujo  $\varphi_t$  si  $\varphi_t(S) \subset S$  para todo  $t \geq 0$  (o  $t \leq 0$ ).

**Definición 1.12.** Un sistema dinámico es puntualmente disipativo, si existe un conjunto acotado  $B \subset \mathbb{R}^n$  tal que, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , y todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $T = T(x_0, \varepsilon) > 0$  tal que  $\varphi_t(x_0) \in N(B, \varepsilon)$ , para todo  $t \geq T$ , donde  $N(B, \varepsilon)$  es una vecindad de  $B$ . Al conjunto  $B$  se le denomina conjunto absorbente.

## 1.6 Criterio negativo de Bendixson y criterio de Dulac.

En esta sección se enuncian dos criterios cuyas demostraciones se pueden obtener en [18], los cuales son únicamente válidos para sistemas de ecuaciones diferenciales autónomos en  $\mathbb{R}^2$ . Estos permiten descartar (o negar) la existencia de órbitas o soluciones periódicas.

Considere el sistema bidimensional

$$\begin{cases} x' = F(x, y), \\ y' = G(x, y), \end{cases} \quad (1.6)$$

con  $(x, y) \in \Omega$ , donde  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  son dos funciones continuas y globalmente lipschitzianas en  $\Omega$ .

**Teorema 1.4. (Teorema Negativo de Bendixson)** Sean  $F, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dos funciones diferenciables y considere el sistema de ecuaciones diferenciales (1.6). Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$ , simplemente conexo. Si la expresión

$$D_x F + D_y G$$

no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $\Omega$ , entonces el sistema dado no puede tener una órbita cerrada completamente contenida en  $\Omega$ .

**Observación.** Recuerde que: Un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es simplemente conexo si para toda curva simple cerrada contenida en  $\Omega$  el recinto encerrado por dicha curva también está contenido en  $\Omega$ .

A continuación se enunciará el criterio de Dulac que es una generalización del criterio negativo de Bendixson.

**Teorema 1.5. (Criterio de Dulac)** *Considere en el plano el sistema (1.6), suponga que  $F$  y  $G$  son funciones diferenciables y sea  $B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , abierto y simplemente conexo. Si*

$$D_x(BF) + D_y(BG)$$

*no es idénticamente cero y no cambia de signo en  $\Omega$  entonces el sistema no puede tener órbitas cerradas totalmente contenidas en  $\Omega$ .*

**Teorema 1.6. (Linealización y Estabilidad).**

*Supongamos que  $(x_e; y_e)$  es un punto de equilibrio del sistema bidimensional*

$$x' = f(x; y)$$

$$y' = g(x; y)$$

*El equilibrio es (local asintóticamente) estable si*

$$\text{tr}J(x_e; y_e) = \left( \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} \right) |_{(x_e; y_e)} < 0$$

$$\det J(x_e; y_e) = \left( \frac{df}{dx} \frac{dg}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{dg}{dx} \right) |_{(x_e; y_e)} > 0$$

*El equilibrio es inestable si alguna de las desigualdades se invierte.*

**Demostración.** Ver[19].

## 1.7 Persistencia.

La persistencia uniforme para modelos de interacciones de poblaciones (1.3) significa que las soluciones  $x = x(t)$  de (1.3) que inicialmente tienen componentes positivas se mantienen con componentes positivas asintóticamente uniformes; es decir, existen números positivos  $\delta_i$  tales que si  $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t))$  es cualquier solución de (1.3) con  $x_i(0) > 0$ ;  $i = 1, \dots, n$  entonces

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) > \delta_i$$

En (1.3),  $x_i(t)$  representa la densidad de población de la  $i$ -ésima especie en un tiempo  $t$  con su tasa neta (total) de crecimiento dada por (1.3). La persistencia para (1.3) corresponde a la supervivencia mutua para las especies representadas en el modelo. Generalmente, se espera que las poblaciones además sean acotadas. Más precisamente, si también (1.3) es puntualmente disipativa, es decir, si existe constantes  $M_i > 0$  tales que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < M_i$$

entonces (1.3) se dice que es uniformemente persistente. La persistencia uniforme surge como un concepto de estabilidad importante para la dinámica de modelos de poblaciones. Generalmente, la persistencia uniforme indica que un sostenido nivel de complejidad se mantiene en (1.3), en el que por lo menos, la dimensión del sistema es conservada durante un tiempo arbitrariamente grande.

**Corolario 1.1.** *Sea  $x(t)$  una solución del sistema (1.1) y existe un valor  $M$  tal que  $|x(t)| \leq M$ . Entonces  $x(t)$  existe para todo  $t \in \mathbb{R}$*

**CAPÍTULO 2**  
**MODELO DE CADENA ALIMENTARIA SIMPLE DE TRES**  
**ESLABONES EN EL QUIMIOSTATO SIN RETARDO**

En este capítulo se estudia el modelo de cadena alimentaria de tres eslabones en el quimiostato, demostrando que el primer octante es positivamente invariante. Además se determinan los puntos de equilibrio y se dan condiciones a los parámetros para que dichos puntos posean las propiedades de estabilidad local y global.

**2.1 Descripción del modelo.**

Considere el modelo de cadena alimentaria de tres eslabones en el quimiostato:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = D[S^0 - S] - \frac{b}{\gamma}SP, \\ \frac{dP}{dt} = P\left[bS - D - \frac{d}{\eta}Q\right], \\ \frac{dQ}{dt} = Q[dP - D], \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $S(0) = S_0 > 0$ ,  $P(0) = P_0 > 0$ ,  $Q(0) = Q_0 > 0$ ,  $t \geq 0$ , y  $b$ ,  $d$ ,  $S^0$ ,  $\gamma$ ,  $D$ , y  $\eta$  son parámetros positivos. La respuesta funcional de las especies presa y depredadora es de la forma Holling tipo I (o Lotka-Volterra) (ver [13]), donde los parámetros  $b$  y  $d$  denotan la tasa de crecimiento *per cápita* de la población presa y de la población depredadora, respectivamente;  $\gamma$  y  $\eta$  representan las constantes de rendimiento de crecimiento de los microorganismos presas y depredadores respectivamente. El parámetro  $S^0$  denota la concentración inicial de la botella alimentaria y  $D$  representa simultáneamente la tasa de desperdicio de la botella alimentaria; la tasa de mortalidad de la presa y la del depredador.

Con el propósito de facilitar la investigación adimensionemos el modelo dado por la ecuación (2.1), haciendo las sustituciones.

$$\bar{t} = tD, \quad \bar{S} = \frac{S}{S^0}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\gamma S^0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{\eta \gamma S^0},$$

$$\bar{b} = \frac{bS^0}{D}, \quad \bar{d} = \frac{\gamma dS^0}{D}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{D}.$$

Omitiendo las barras, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 1 - S - bSP = F_1(S, P, Q), \\ \frac{dP}{dt} = P(bS - 1 - dQ) = F_2(S, P, Q), \\ \frac{dQ}{dt} = Q(dP - 1) = F_3(S, P, Q). \end{cases} \quad (2.2)$$

El modelo (2.2) es más fácil de analizar ya que como se puede observar existen menos parámetros. A continuación se estudiarán las diferentes propiedades que posee dicho sistema. Se muestra que el punto de equilibrio de coordenada positiva del sistema (2.2) es globalmente asintóticamente estable. Con respecto al sistema (2.2) tenemos las propiedades de positividad y disipatividad, dado que, las densidades de las poblaciones presas y depredadoras y las concentraciones de sustrato que interviene en una cadena alimentaria, son cantidades positivas, esto requiere que las coordenadas de las trayectorias de las soluciones sean positivas y acotadas para todo tiempo.

## 2.2 Disipatividad

El siguiente lema nos garantiza que todas las soluciones de (2.2) que son tomadas en el primer octante de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(S, P, Q) \in \mathbb{R}^3 : S > 0, P > 0, Q > 0\}$$

permanecen en él.

**Lema 2.1.** *El cono positivo,  $\mathbb{R}_+^3$ , es positivamente invariante con respecto a las soluciones que genera el sistema (2.2). Es decir, toda solución con condiciones iniciales en  $\mathbb{R}_+^3$ , permanece en  $\mathbb{R}_+^3$ .*

**Demostración:** Note que la parte derecha del sistema (2.2) son funciones continuas, además poseen derivadas parciales y satisfacen

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = -1 - bP; \quad \frac{\partial F_1}{\partial P} = -bS; \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q} = 0;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial S} = bP; \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = bS - 1 - dQ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial Q} = -dP;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial F_3}{\partial P} = dQ; \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q} = dP - 1.$$

es claro que dichas derivadas parciales son continuas para todo  $t \geq 0$ ; por lo tanto, (2.2), con condiciones iniciales  $S(0) = S_0 > 0$ ,  $P(0) = P_0 > 0$  y  $Q(0) = Q_0 > 0$  tiene solución única para  $t \geq 0$ , como podemos ver existe un  $t^* \geq 0$  tal que  $S(t^*) = 0$ , debido a que existe un instante de tiempo en el cual la cantidad de nutrientes  $S$  es nula, de la primera ecuación del sistema (2.2) se tiene

$$S(t) = S_0 \exp\left\{-\int_{t_0}^t (1+bP(u))du\right\} + \exp\left\{-\int_{t_0}^t (1+bP(u))du\right\} \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_{t_0}^h (1+bP(u))du\right\} dh$$

por lo tanto  $S(t) \geq 0$  para todo  $t \geq t^*$ .

Ahora probaremos que  $P(t) > 0$  y  $Q(t) > 0$ , del sistema (2.2) tenemos que para  $P$  y  $Q$  distintos de cero

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = bS(t) - 1 - dQ(t),$$

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = dP(t) - 1,$$

ahora integrando de 0 a  $t$  obtenemos que  $P(t)$  y  $Q(t)$  están definidas de la siguiente manera:

$$P(t) = P_0 \exp\left(\int_0^t (bS(u) - 1 - dQ(u)) du\right)$$

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(\int_0^t (dP(u) - 1) du\right)$$

como  $P(0) = P_0 > 0$  y  $Q(0) = Q_0 > 0$ , entonces podemos deducir que  $P(t) > 0$  y  $Q(t) > 0$  para todo  $t > 0$ .

**Lema 2.2.** *Todas las soluciones del sistema (2.2) son acotadas.*

**Demostración:** Para efectuar la demostración, consideramos la función definida de la siguiente manera

$$W(t) = 1 - S(t) - P(t) - Q(t).$$

De las ecuaciones de (2.2) se puede observar que

$$W'(t) = -(S'(t) + P'(t) + Q'(t)) = -W(t),$$

lo cual es una ecuación diferencial lineal homogénea, con condición inicial

$$W(0) = 1 - (S(0) + P(0) + Q(0)).$$

Su solución viene dada por

$$W(t) = W_0 e^{-t};$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$$

Por la definición de límite, tenemos que dado  $\epsilon > 0$  existe  $T_1(\epsilon) > 0$  tal que

$$|W(t)| < \epsilon, \quad \forall t > T_1(\epsilon).$$

Ahora tomando

$$M_0 = \max\{W(t) : t \in [0, T_1(\epsilon)]\}$$

y como  $0 < W(t) < \epsilon, \forall t > T_1(\epsilon)$ , tomamos

$$M = \max\{M_0, \epsilon\}$$

de donde resulta que

$$W(t) \leq M, \quad \forall t > 0,$$

lo cual demuestra el lema.

**Lema 2.3.** *El sistema (2.2) es puntualmente disipativo.*

**Demostración:** Sea la norma

$$\|\varphi(t)\| = \max\{|S + P + Q|\} = \max\{S + P + Q\} < 1 + \epsilon \quad \forall t > T_1(\epsilon)$$

por lo tanto

$$\varphi(t) \in V(B, \epsilon) \quad \forall t > \epsilon$$

donde  $V(B, \epsilon)$  es una vecindad de  $B$  y

$$B = \{(S, P, Q) \in \mathbb{R}^3 : \|(S, P, Q)\| \leq 1\}.$$

**Lema 2.4.** *El conjunto  $\omega$ -límite de cualquier solución del problema de valor inicial (2.2) está contenido en el conjunto.*

$$\Gamma = \{(S, P, Q) \in \mathbb{R}^3 : S + P + Q = 1, S > 0, P > 0, Q > 0\}.$$

**Demostración:** Dado que el conjunto  $\omega$ -límite es el conjunto positivamente invariante más pequeño del sistema (2.2), cualquier otro conjunto positivamente invariante contiene al conjunto  $\omega$ -límite. Por lo tanto, para demostrar el lema, es suficiente con demostrar que  $\Gamma$  es invariante con respecto a las soluciones del sistema (2.2).

Sea  $(S^*(0), P^*(0), Q^*(0)) \in \Gamma$ , entonces  $S^*(0) + P^*(0) + Q^*(0) = 1$ , tomando estos puntos como condición inicial, para la solución del sistema (2.2) tendremos la solución

$$(S^*(t), P^*(t), Q^*(t))$$

ahora bien, si definimos la función

$$N(t) = 1 - S^*(t) - P^*(t) - Q^*(t), \quad t \geq 0$$

tenemos

$$N'(t) = -N(t)$$

cuya solución es

$$N(t) = N(0)e^{-t}$$



y así  $N(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; por lo tanto

$$(S^*(t), P^*(t), Q^*(t)) \in \Gamma \quad \forall t \geq 0,$$

lo que significa que la solución que se inicia en  $\Gamma$  permanece en  $\Gamma$ ; es decir,  $\Gamma$  es invariante.

Como una conclusión de éste lema se tiene que el sistema (2.2) puede ser simplificado a un sistema de dos ecuaciones eliminando una de las variables, lo cual proporciona mucha ventaja, como lo es poder utilizar la teoría disponible para sistema bidimensionales. Esto permitirá obtener el cuadro global del sistema utilizando el criterio negativo de Bendixson, criterio de Dulac y el teorema de Poincaré-Bendixson.

### 2.3 Reducción a un sistema bidimensional.

Como consecuencia del lema 2.4 y teniendo en cuenta que cada trayectoria del sistema (2.2) tiende al conjunto  $\Gamma$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , podemos restringir este estudio a la región  $\Gamma$ , de modo que, haciendo

$$S(t) = 1 - P(t) - Q(t)$$

en la segunda ecuación del sistema (2.2), conduce a

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = (b-1)P - bP^2 - (b+d)QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q(dP-1), \\ P(0) = P_0 > 0; Q(0) = Q_0 > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Con esta restricción a  $\Gamma$ , para el análisis, nos concentraremos en la región triangular

$$\Delta = \{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq P, Q; P + Q \leq 1\}.$$

## 2.4 Escenario de extinción

Vamos a demostrar algunos resultados que desde el punto de vista cualitativo reflejan el comportamiento de las poblaciones, conforme sea el rango de valores en el que se ubiquen las tasas de crecimiento de la población presa (parámetro  $b$ ) y la población depredadora (parámetro  $d$ ). Estos resultados constituyen propiedades del modelo referido a la supervivencia de las poblaciones que interactúan en la cadena alimentaria. Los rangos de valores de los parámetros  $b$  y  $d$  demuestran que el proceso de extinción es independiente del proceso de depredación y también son condicionantes para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema, así como su ubicación en el cono positivo  $\mathbb{R}_+^3$ .

**Lema 2.5.** *Si  $d \leq 1$  en el sistema (2.3), entonces la población depredadora se extingue; es decir,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0.$$

**Demostración:** De acuerdo a la región  $\Delta$ , se tiene que  $P(t) \leq 1$  y  $0 \leq Q(t)$  por consiguiente,

$$Q'(t) \leq Q(t)(d - 1) < 0$$

lo que significa que  $Q(t)$  es decreciente para todo  $t \geq 0$ , considere el Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \frac{dm(t)}{dt} = m(t)(d - 1); \\ m(0) = Q_0. \end{cases}$$

la solución del P.V.I. es

$$m(t) = Q_0 \exp(d - 1)t$$

usando el lema 1.1 (Principio de Comparación) se tiene que

$$Q(t) \leq m(t) = Q_0 \exp(d - 1)t; \quad \forall t > 0$$

entonces para  $d \leq 1$  se deduce que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) \leq 0;$$

como  $Q(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$  se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0.$$

**Lema 2.6.** *Si  $b \leq 1$  en el sistema (2.3), entonces la presa y el depredador se extinguen; es decir,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0.$$

**Demostración:** De acuerdo a la primera ecuación sistema (2.3) se tiene

$$P'(t) = (b - 1)P(t) - bP(t)^2 - (b + d)P(t)Q(t);$$

por lo tanto, considérese el caso  $b < 1$ , como  $Q(t)$  y  $P(t)$  son positivo se tiene

$$P'(t) \leq (b - 1)P(t).$$

Consideremos el Problema de Valor Inicial (P.V.I)

$$\begin{cases} m'(t) = (b - 1)m(t); \\ m(0) = P_0. \end{cases}$$

cuya solución es

$$m(t) = P_0 \exp(b - 1)t.$$

y procediendo de igual manera que en el lema anterior, se puede concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0.$$

Ahora considerando el caso cuando  $b = 1$ . Se tiene,

$$P'(t) \leq -P^2(t).$$

Sea el P.V.I.

$$\begin{cases} m'(t) = -m(t)^2; \\ m(0) = P_0. \end{cases}$$

cuya solución es

$$m(t) = \frac{P_0}{1 + P_0 t}.$$

de manera similar al caso anterior, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0.$$

quedando demostrado que cuando  $b \leq 1$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 0.$$

En particular, existe  $t_o > 0$  tal que  $P(t) < \frac{1}{2d}$  para todo  $t \geq t_o$ . La segunda ecuación diferencial de (2.3) implica entonces que

$$Q'(t) < -\frac{1}{2}Q(t); \quad \forall t \geq t_o.$$

Consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} m'(t) = -\frac{1}{2}m(t); \\ m(t_o) = Q(t_o). \end{cases}$$

cuya solución es

$$m(t) = Q(t_o) \exp\left(\frac{t_o - t}{2}\right),$$

Usando el principio de comparación se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0.$$

## 2.5 Puntos de equilibrio para el caso bidimensional

Los equilibrios del sistema (2.3) están dados por las soluciones de las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} (b-1)P - bP^2 - (b+d)QP = 0, \\ Q(dP-1) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Al factorizar,

$$\begin{cases} P[b-1-bP-(b+d)Q] = 0, \\ Q[dP-1] = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Es claro que  $E_0 = (0, 0)$  es un punto de equilibrio del sistema (2.5).

Por otro lado si  $Q = 0$  y  $P \neq 0$ , la primera ecuación de (2.5) impone  $P = \frac{b-1}{b}$  de aquí se tiene el punto de equilibrio

$$E_1 = \left(\frac{b-1}{b}, 0\right),$$

puede observarse que  $P_1 + Q_1 = \frac{b-1}{b} < 1$ : el punto  $E_1$  pertenece a  $\Delta$  si  $b > 1$ , además cuando  $b \rightarrow 1^+$ , el punto  $E_1$  tiende al punto  $E_0$ .

Ahora considere el caso cuando  $Q \neq 0$ ; entonces la segunda ecuación de (2.5) impone  $P = \frac{1}{d}$ . Al sustituir esto en la primera ecuación, se obtiene

$$(b-1) - \frac{b}{d} - (b+d)Q = 0,$$

de donde

$$Q = \frac{d(b-1) - b}{d(b+d)}.$$

Este valor es positivo sólo si  $b > 1$  y  $d > \frac{b}{b-1}$ .

Por lo tanto, existe un punto de equilibrio con ambas coordenadas positivas,

$$E_2 = \left(\frac{1}{d}, \frac{d(b-1) - b}{d(b+d)}\right)$$

puede observarse que  $P_2 + Q_2 = \frac{b}{b+d} < 1$ : el punto  $E_2$  dado pertenece a  $\Delta$  si  $b > 1$  y  $d > \frac{b}{b-1}$ . Dado  $b > 1$ , cuando  $d \rightarrow \left(\frac{b}{b-1}\right)^+$ , el punto  $E_2$  tiende al punto  $E_1$ .

## 2.6 Estabilidad local de los equilibrios para el caso bidimensional.

El estudio de la estabilidad asintótica local de los puntos de equilibrio en los sistemas biológicos adquiere relevancia porque nos permite establecer interesantes predicciones ecológicas.

Para el análisis de la estabilidad local de los puntos de equilibrio del sistema (2.3), se considerará la matriz jacobiana evaluada en cada punto de equilibrio. A tal efecto, la matriz Jacobiana del sistema (2.3) está dada por

$$J(P, Q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(P, Q)}{\partial P} & \frac{\partial F(P, Q)}{\partial Q} \\ \frac{\partial G(P, Q)}{\partial P} & \frac{\partial G(P, Q)}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} F(P, Q) &= (b-1)P - bP^2 - (b+d)QP, \\ G(P, Q) &= Q(dP - 1). \end{aligned}$$

Al calcular las cuatro derivadas parciales, la matriz jacobiana queda definida como

$$J(P, Q) = \begin{bmatrix} b-1-2bP-(b+d)Q & -(b+d)P \\ dQ & dP-1 \end{bmatrix}$$

En el siguiente lema, se analizará la estabilidad del punto de equilibrio  $E_0$ .

**Lema 2.7.**

- Si  $b < 1$  entonces el punto de equilibrio  $E_0$  es local asintóticamente estable.
- Si  $b > 1$  entonces el punto de equilibrio  $E_0$  es inestable.

**Demostración:** Al ser evaluada la matriz jacobiana en las coordenadas del punto de equilibrio  $E_0$ , toma la forma

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} b-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz jacobiana es diagonal se nota que los autovalores correspondientes son  $b-1$  y  $-1$ . Así se obtienen los siguientes casos:

- Si  $b < 1$  los dos autovalores son negativos, por lo tanto utilizando el teorema 1.2,  $E_0$  es local asintóticamente estable.
- Si  $b = 1$  un autovalor es negativo y el otro nulo. La linealización no permite concluir.
- Si  $b > 1$  un autovalor es negativo y el otro positivo; por lo tanto, de acuerdo con el teorema 1.2,  $E_0$  es inestable.

**Lema 2.8.**

- Si  $b > 1$  y  $d < \frac{b}{b-1}$ , entonces el punto de equilibrio  $E_1$  es local asintóticamente estable.
- Si  $b > 1$  y  $d > \frac{b}{b-1}$ , entonces el punto de equilibrio  $E_1$  es inestable.

**Demostración:** Al ser evaluada la matriz jacobiana en las coordenadas del punto de equilibrio  $E_1$ , toma la forma

$$J\left(\frac{b-1}{b}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1-b & -\frac{(b+d)(b-1)}{b} \\ 0 & \frac{d(b-1)}{b} - 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz jacobiana es triangular se nota que los autovalores correspondientes son  $(1-b)$  y  $\frac{d(b-1)-b}{b}$ . Así se obtiene los siguientes casos:

- Si  $b > 1$  y  $d < \frac{b}{b-1}$  los dos autovalores son negativos, por lo tanto utilizando el teorema 1.2,  $E_1$  es local asintóticamente estable.
- Si  $d = \frac{b}{b-1}$  y  $b > 1$ , un autovalor es negativo y el otro nulo.
- Si  $b > 1$  y  $d > \frac{b}{b-1}$ , un autovalor es negativo y el otro positivo, por lo tanto de acuerdo con el teorema 1.2,  $E_1$  es inestable.

**Lema 2.9.**

- Si  $b > 1$  y  $d > \frac{b}{b-1}$ , entonces el punto de equilibrio  $E_2$  es local asintóticamente estable.

**Demostración:** Al ser evaluada la matriz jacobiana en las coordenadas del punto de equilibrio  $E_2$ , toma la forma

$$J\left(\frac{1}{d}, \frac{d(b-1)-b}{d(b+d)}\right) = \begin{bmatrix} b-1 - 2\frac{b}{d} - (b+d)\frac{d(b-1)-b}{d(b+d)} & -\frac{b+d}{d} \\ \frac{d(b-1)-b}{b+d} & 0 \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} -\frac{b}{d} & -\frac{b+d}{d} \\ \frac{d(b-1)-b}{b+d} & 0 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\text{tr} J \left( \frac{1}{d}; \frac{d(b-1)-b}{d(b+d)} \right) = -\frac{b}{d} < 0$$

y

$$\det J \left( \frac{1}{d}; \frac{d(b-1)-b}{d(b+d)} \right) = b-1 - \frac{b}{d} > 0$$

son las condiciones de estabilidad para el sistema. Por lo tanto  $E_2$  es local asintóticamente estable.

## 2.7 Estabilidad global de los equilibrios para el sistema bidimensional.

En los siguiente teoremas se muestra que los equilibrios  $E_0$ ,  $E_1$  y  $E_2$  son global asintóticamente estable bajo ciertos valores de los parámetros.

### Lema 2.10.

- Si  $b < 1$  entonces el punto de equilibrio  $E_0$  es global asintóticamente estable.
- Si  $b = 1$  entonces el punto de equilibrio  $E_0$  pierde estabilidad.
- Si  $b > 1$  entonces el punto de equilibrio  $E_0$  es inestable.

**Demostración:** Ver lema 2.6

### Lema 2.11.

- Si  $b > 1$  y  $d < \frac{b}{b-1}$  entonces el punto de equilibrio  $E_1$  es global asintóticamente estable para  $P_0 > 0$ .

- Si  $d = \frac{b}{b-1}$  entonces el punto de equilibrio  $E_1$  pierde estabilidad.
- Si  $b > 1$  y  $d > \frac{b}{b-1}$  entonces el punto de equilibrio  $E_1$  es inestable.

**Demostración:** De la primera ecuación del sistema (2.3) se obtiene

$$P'(t) = (b-1)P(t) - bP^2(t) - (b+d)P(t)Q(t).$$

Eliminando el último término de la parte derecha de la igualdad tenemos lo siguiente

$$P'(t) \leq (b-1)P(t) - bP^2(t)$$

Consideremos el P.V.I.

$$\begin{cases} m(t)' = (b-1)m(t) - bm^2(t); \\ m(0) = P_0. \end{cases}$$

aplicando factor común se tiene

$$m(t)' = m(t)((b-1) - bm(t))$$

La solución del P.V.I es

$$m(t) = \frac{a}{1 + \left(\frac{a}{P_0} - 1\right) e^{-(b-1)t}}$$

donde  $a = \frac{b-1}{b} > 0$ , usando el principio de comparación se tiene

$$P(t) \leq m(t), \quad \forall t > 0$$

entonces

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P(t) \leq a = \frac{b-1}{b}.$$

Dado  $\epsilon > 0$  existe un  $T \geq 0$  tal que  $P(t) \leq \frac{b-1}{b} + \epsilon$  para todo  $t > T$ . Sustituyendo  $P$  en la segunda ecuación del sistema (2.3), tenemos

$$Q' \leq Q \left( d \left( \frac{b-1}{b} + \epsilon \right) - 1 \right).$$

Considere el P.V.I.

$$\begin{cases} m'(t) = m(t) \left( d \left( \frac{b-1}{b} + \epsilon \right) - 1 \right); \\ m(T) = Q(T). \end{cases}$$

Despejando  $m(t)$

$$\frac{dm}{m} = \left( d \left( \frac{b-1}{b} + \epsilon \right) - 1 \right) dt = k dt$$

con  $k = \left( d \left( \frac{b-1}{b} + \epsilon \right) - 1 \right)$ , integrando de ambos lados se tiene que la solución de la ecuación diferencial es:

$$m(t) = Q_0 e^{k(t-T)}$$

usando el método de comparación se tiene que

$$Q(t) < m(t), \quad \forall t > T,$$

entonces tomando  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño se tiene que:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} Q(t) \leq 0,$$

cuando  $d < \frac{b}{b-1}$ , por lo que se puede concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0.$$

Por lo tanto se tiene que dado un  $\epsilon > 0$  existe un  $T > T_1$  tal que  $Q < \epsilon$  para todo  $t > T$ . Sustituyendo  $Q$  en la segunda ecuación del sistema (2.3) tenemos

$$P'(t) > (b-1)P(t) - bP^2(t) - \epsilon(b+d)P(t)$$

entonces

$$P'(t) - P(t)((b-1) - \epsilon(b+d)) > -bP^2(t)$$

sea el problema de valor inicial P.V.I

$$\begin{cases} m'(t) - m(t)((b-1) - \epsilon(b+d)) = -bm^2(t); \\ m(T) = P_0 > 0. \end{cases}$$

Entonces dividiendo en ambos lados de la ecuación por  $m^2(t)$  nos queda

$$m'(t)m^{-2}(t) - m^{-1}(t)[(b-1) - \epsilon(b+d)] = -b$$

tomando el cambio de variable  $u = m^{-1}$  y aplicando el método Bernoulli se tiene

$$u'(t) + u(t)[(b-1) - \epsilon(b+d)] = b$$

posteriormente calculamos el factor integrante que viene dado por

$$I = e^{\int[(b-1) - \epsilon(b+d)]dt} = e^{[(b-1) - \epsilon(b+d)]t}$$

multiplicando la ecuación por el factor integrante nos queda

$$\frac{d(u(t)e^{[(b-1) - \epsilon(b+d)]t})}{dt} = be^{[(b-1) - \epsilon(b+d)]t}$$

integrando tenemos que  $u(t)$  está definida de la siguiente manera

$$u(t) = \frac{b}{(b-1) - \epsilon(b+d)} + \left( u_0 - \frac{b}{(b-1) - \epsilon(b+d)} \right) e^{-[(b-1) - \epsilon(b+d)]t}$$

entonces  $m(t)$  está definida de la siguiente manera

$$m(t) = \frac{1}{\frac{b}{(b-1) - \epsilon(b+d)} + \left( P_0 - \frac{b}{(b-1) - \epsilon(b+d)} \right) e^{-[(b-1) - \epsilon(b+d)]t}}$$

usando el método de comparación se tiene

$$P(t) \geq m(t); \quad \forall t > T$$

entonces para  $\epsilon$  arbitrariamente pequeño se tiene que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P(t) \geq \frac{b-1}{b}$$

por lo que se puede concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{b-1}{b}.$$

quedando demostrado que el punto  $E_1$  es global asintóticamente estable cuando  $b > 1$  y  $d < \frac{b}{b-1}$ .

**Lema 2.12.**

- Si  $d > \frac{b}{b-1}$  entonces el punto de equilibrio  $E_2$  es global asintóticamente estable.

**Demostración:** Para demostrar la estabilidad asintótica global, basta con probar la no existencia de soluciones periódicas y para esto se aplicará el criterio de Dulac.

Sea  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$B(P, Q) = \frac{1}{PQ}$$

Note que  $B(P, Q) > 0$  en el interior del primer cuadrante debido que  $P$  y  $Q$  son positivamente invariantes. Por el Criterio de Dulac, se sabe que la no existencia de soluciones periódicas ocurre cuando la expresión

$$\Delta(P, Q) = D_P(BF) + D_Q(BG)$$

no cambia de signo. Calculando esta expresión se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta(P, Q) &= D_P \left( \frac{1}{PQ} [(b-1)P - bP^2 - (b+d)PQ] \right) + D_Q \left( \frac{1}{PQ} Q(dP - 1) \right) \\ \Delta(P, Q) &= D_P \left( \frac{1}{Q} [(b-1) - bP - (b+d)Q] \right) + D_Q \left( \frac{1}{P} (dP - 1) \right) \\ \Delta(P, Q) &= -\frac{b}{Q} + 0 = -\frac{b}{Q} < 0 \end{aligned}$$

$\Delta(P, Q)$  no cambia de signo y no es idénticamente cero en el cuadrante positivo del plano P-Q, ya que  $b > 0$  y  $Q$  es definida positiva para todo  $t$ . Por lo tanto, resulta claro que se cumple la hipótesis del Criterio de Dulac la cual nos garantiza la no existencia de soluciones periódicas para las configuraciones de parámetros dada y del teorema de Bendixson se deduce que el conjunto  $\omega$ -límite esta formado únicamente por el equilibrio positivo  $E_2$ . Así, el punto  $E_2$  es global asintóticamente estable en el interior del cuadrante positivo del plano P-Q.

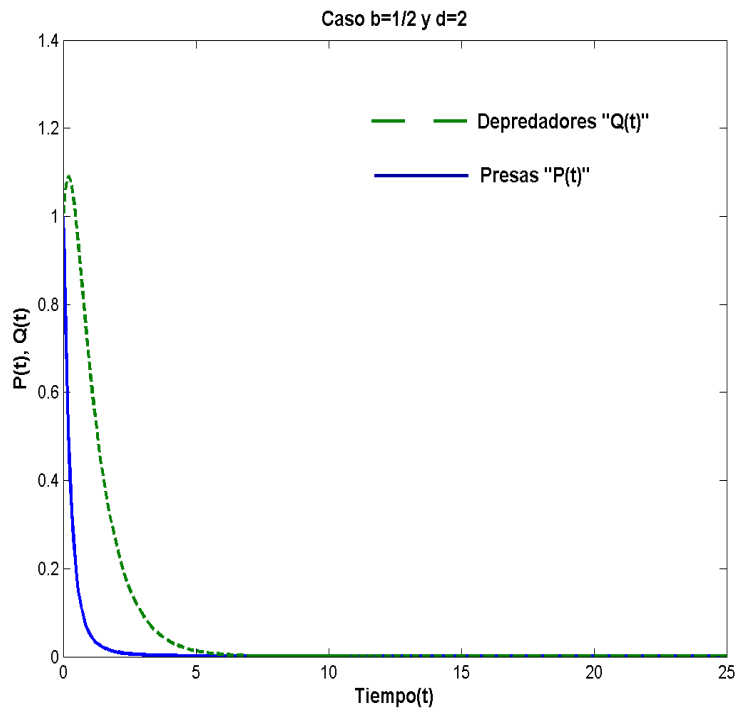
## 2.8 Simulación numérica

En esta sección, se presentan algunas simulaciones numéricas, hechas a través de un programa realizado con el software Matlab 6.5, dirigidas a investigar la dinámica del sistema (2.3).

Se pudo observar en la sección 2.5 que el sistema dinámico posee tres puntos de equilibrio  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (\frac{b-1}{b}, 0)$ ,  $E_2 = (\frac{1}{d}, \frac{d(b-1)-b}{d(b+d)})$ ; estos dependen directamente de los valores que posean los parámetros  $b$  y  $d$ ; de esto se derivan diferentes casos.

**Ejemplo 1.** Si se consideran los valores  $b = 1/2$ ,  $d = 3/2$  y las condiciones iniciales  $P(0) = 1$  y  $Q(0) = 1$ , se puede ver que, el único punto de equilibrio perteneciente a la región  $\Delta$  es  $E_0 = (0, 0)$ . El sistema (2.3) queda definido de la siguiente manera:

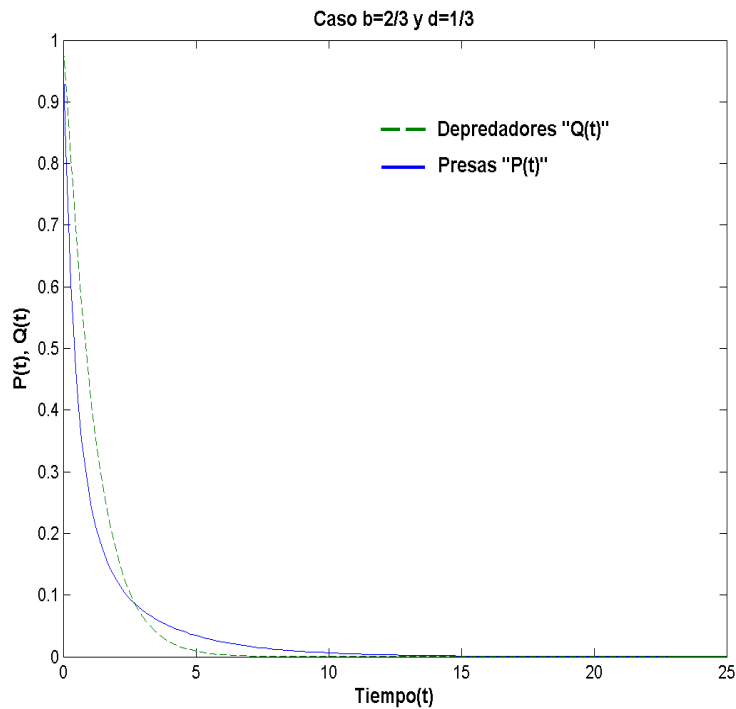
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P^2 - \frac{5}{2}QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q(2P - 1), \\ P(0) = 1; Q(0) = 1, \end{cases} \quad (2.6)$$



La solución del sistema tiende al estado estable; se puede ver cómo las curvas que representan el estado de la presa  $P(t)$  (color azul) y el depredador  $Q(t)$  (color verde) tienden a cero, es decir la presa y el depredador se extingue a medida que transcurre el tiempo.

**Ejemplo 2.** Si se considera los valores  $b = \frac{2}{3}$ ,  $d = \frac{1}{3}$  y las condiciones iniciales  $P(0) = 1$  y  $Q(0) = 1$ , se puede ver que el único punto de equilibrio perteneciente a la región  $\Delta$  es  $E_0 = (0, 0)$  y el sistema (2.3) queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = -\frac{1}{3}P - \frac{2}{3}P^2 - QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q \left( \frac{1}{3}P - 1 \right), \\ P(0) = 1; Q(0) = 1, \end{cases} \quad (2.7)$$

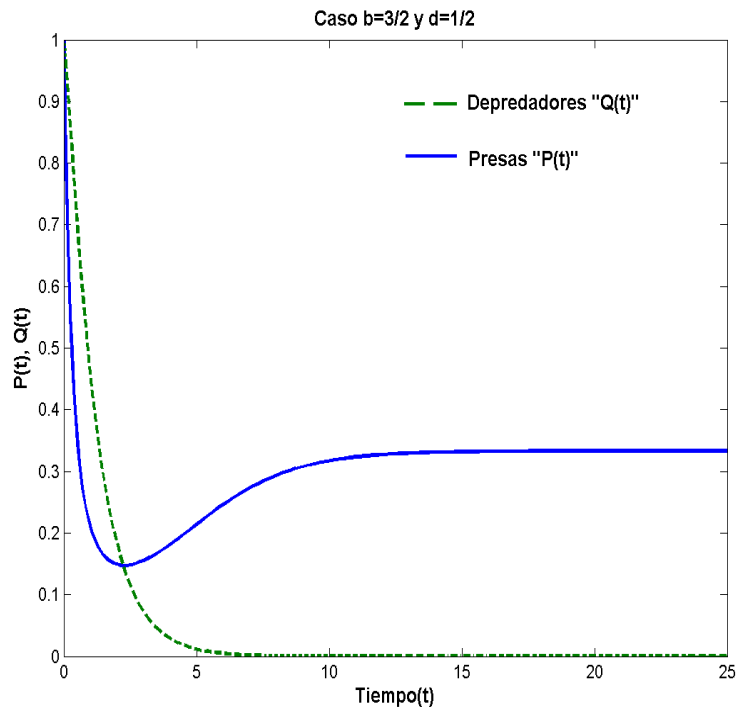


Similar al ejemplo anterior al solución del sistema tiende la estado estable, se puede ver como las curvas que representan el estado de la presa  $P(t)$  (color azul) y el depredador  $Q(t)$  (color verde) tiende a cero, es decir al igual que en el ejemplo anterior la presa y el depredador se extingue a medida que transcurre el tiempo.

**Ejemplo 3.** Si se consideran los valores  $b = \frac{3}{2}$ ,  $d = \frac{1}{2}$  y las condiciones iniciales  $P(0) = 1$  y  $Q(0) = 1$ , se puede ver que los puntos de equilibrio pertenecientes a la región  $\Delta$  son  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (\frac{1}{3}, 0)$  y el sistema (2.3) queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{2}P^2 - 2QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q \left( \frac{1}{2}P - 1 \right), \\ P(0) = 1; Q(0) = 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

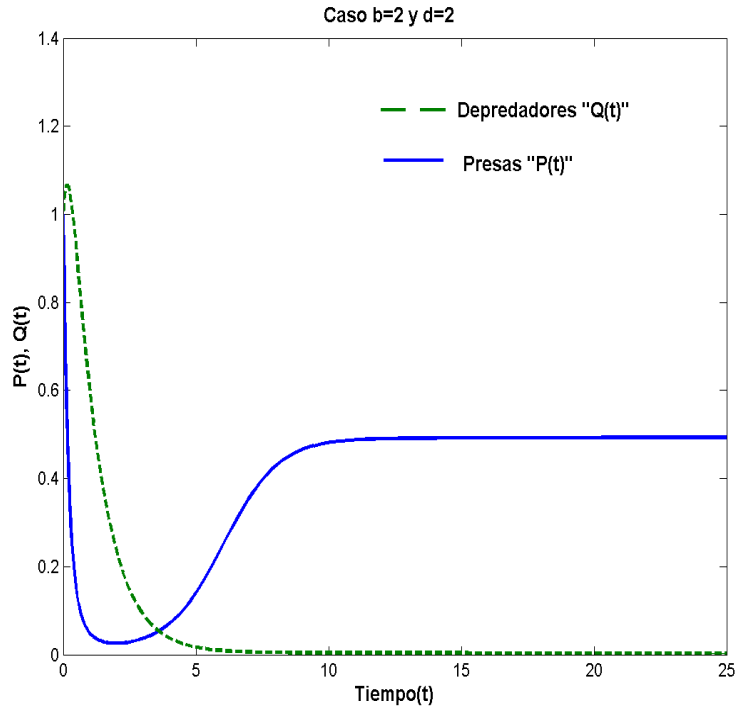




La solución del sistema tiende al estado estable, se puede ver como la curva que representa el estado de la presa  $P(t)$  (color azul) tiende a  $\frac{1}{3}$ , por otro lado la curva que representa el estado del depredador  $Q(t)$  (color verde) tiende a cero, es decir, se extingue. Por lo tanto el punto  $E_1$  es global asintóticamente estable.

**Ejemplo 4.** Si se consideran los valores  $b = 2$ ,  $d = 2$  y las condiciones iniciales  $P(0) = 1$  y  $Q(0) = 1$ , se puede ver que los puntos de equilibrio pertenecientes a la región  $\Delta$  son  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (\frac{1}{2}, 0) = E_2$  y el sistema (2.3) queda definido de la siguiente manera:

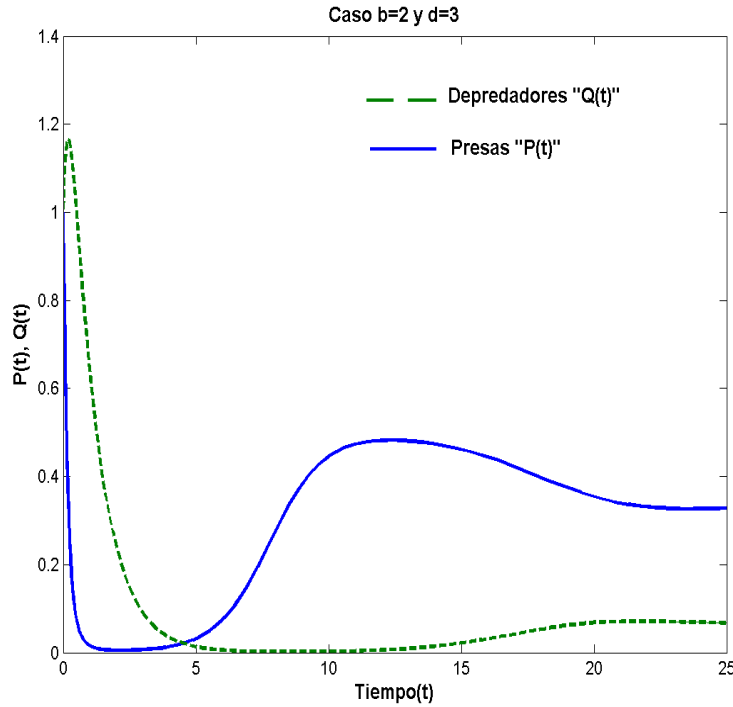
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P - 2P^2 - 4QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q(2P - 1), \\ P(0) = 1; Q(0) = 1, \end{cases} \quad (2.9)$$



La solución del sistema tiende al estado estable, se puede ver como la curva que representa el estado de la presa  $P(t)$  (color azul) tiende a  $\frac{1}{2}$  y la curva que representa el estado del depredador  $Q(t)$  (color verde) tiende a cero, es decir, el punto  $E_1$  es global asintóticamente estable.

**Ejemplo 5.** Si se consideran los valores  $b = 2$ ,  $d = 3$  y las condiciones iniciales  $P(0) = 1$  y  $Q(0) = 1$ , se puede ver que los puntos de equilibrio pertenecientes a la región  $\Delta$  son  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (\frac{1}{2}, 0)$  y  $E_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{15})$  el sistema (2.3) queda definido de la siguiente manera:

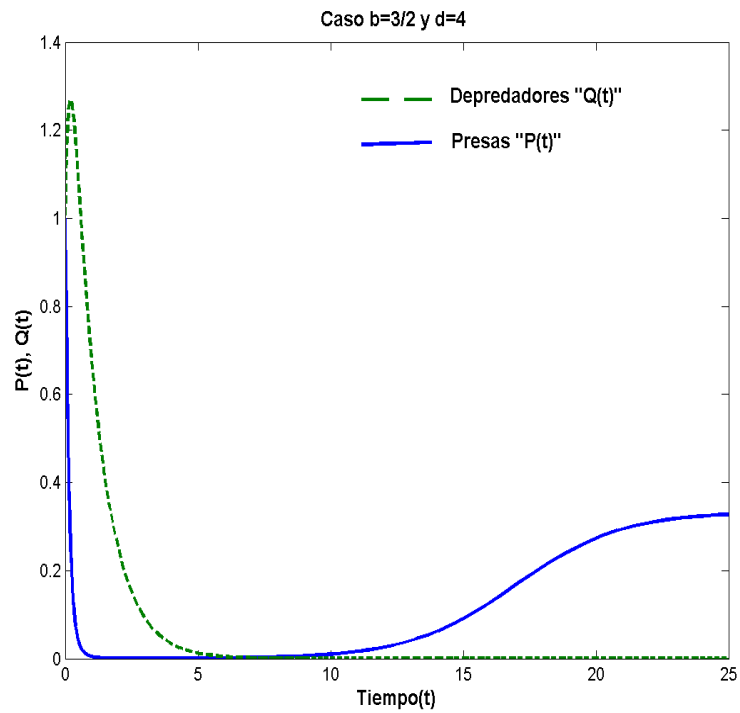
$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P - 2P^2 - 5QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q(3P - 1), \\ P(0) = 1; Q(0) = 1, \end{cases} \quad (2.10)$$



La solución del sistema tiende al estado estable, se puede ver como la curva que representa el estado de la presa  $P(t)$  (color azul) tiende a  $\frac{1}{3}$ , por otro lado la curva que representa el estado del depredador  $Q(t)$  (color verde) tiende a  $\frac{1}{15}$ ; es decir, el punto  $E_2$  es global asintóticamente estable.

**Ejemplo 6.** Si se consideran los valores  $b = \frac{3}{2}$ ,  $d = 4$  y las condiciones iniciales  $P(0) = 1$  y  $Q(0) = 1$ , se puede ver que los puntos de equilibrio pertenecientes a la región  $\Delta$  son  $E_0 = (0, 0)$ ,  $E_1 = (\frac{1}{2}, 0)$  y  $E_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{44})$  el sistema (2.3) queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{2}P^2 - \frac{11}{2}QP, \\ \frac{dQ}{dt} = Q(4P - 1), \\ P(0) = 1; Q(0) = 1, \end{cases} \quad (2.11)$$



La solución del sistema tiende al estado estable, se puede ver como la curva que representa el estado de la presa  $P(t)$  (color azul) tiende a  $\frac{1}{4}$ , por otro lado la curva que representa el estado del depredador  $Q(t)$  (color verde) tiende a  $\frac{1}{44}$  es decir el punto  $E_2$  es global asintóticamente estable.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado una cadena alimentaria en el quimiostato. Aquí se trata de un modelo constituido por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, y se describe completamente el cuadro global de las soluciones para todas las configuraciones posibles de los parámetros. El rasgo resaltante es cuando el sistema posee un punto de equilibrio de coordenadas positivas (en cuyo caso es único): este es un atractor global para las soluciones del sistema.

Se puede observar que en modelos de esta naturaleza existe un nivel de jerarquía de los puntos de equilibrio, en el sentido de que bajo ciertas condiciones, con la variación de algunos parámetros, la estabilidad global se transfiere de un primer punto a otro segundo y así sucesivamente.

En la naturaleza los ejemplos de respuestas funcionales de tipo I, como es nuestro caso, que alcanza el máximo estable, son raros. En general la tasa de consumo se incrementa en forma lineal para un amplio rango de disponibilidad de nutrientes. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la tasa con que la presa consume el alimento, expresado en el modelo que hemos estudiado. Esto se debe a que el alimento es extraído de un volumen constante de agua que pasa a través de un aparato filtrador. La cantidad de alimento se incrementa en forma constante con la concentración, hasta alcanzar el máximo que puede deglutir, y a partir de ahí el consumo permanece constante.

Nosotros hemos dado condiciones a los parámetros del modelo estudiado para su coexistencia.

Se prueba la no existencias de órbitas periódicas en las simulaciones realizadas con el programa matlab se puede percibir que cuando la tasa de crecimiento per cápita de la población presa ( $b$ ) es menor que la tasa de crecimiento per cápita de la población depredadora ( $d$ ), la población depredadora incrementa rápidamente por un intervalo de tiempo, posteriormente al disminuir la población, producto de la caza, disminuye de manera más drástica la población depredadora y en muchas ocasiones

se extingue.

Por Ultimo, se puede observar en las simulaciones numéricas que, cuando la presa alcanza la misma densidad que la especie depredadora, la densidad de la presa se incrementa.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Christian Jost, comparaison qualitative et quantitative de modèles proie-prédateur à des données chronologique en ecologie. THÈSE pour obtenir le grade de Docteur de l'Institut national agronomique paris-Grignon, décembre 1998
- [2] M. Farkas, *Dinamical Models in Biology*, Academic Press, New York. 2001.
- [3] M. Farkas and H. I. Freedman, The stable coexistence of competing species on a renewable resource. *J. Math. Analysis Appl.* 138: 461-472.
- [4] Hsu S.B., Hubbel S.P. and Waltman P., A contribution to the theory of competing predators. *Ecological Monographs* 48, p.p. 337-349,(1978).
- [5] J. M. Cushing, *Integro-differential Equations and Delay Models in Populations Dynamics*, Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 20, Springer (Berlin, 1977).
- [6] M. Farkas, *Periodic Motion*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [7] M. Farkas and H. I. freedman, Stability conditions for two predator-one prey systems. *Acta Appl. Math.* 14: 3-10 (1989b).
- [8] H.L. Smith, P, Waltman, *The Theory of the Chemostat*, Cambridge University press, Cambridge, UK, 1995.
- [9] N. Mac Donald, Time lag in simple Chemostat Models. *Biotechnol. Bioengr.*, 18 (1976), pp 805-812.
- [10] N. Mac Donald, Time lag in Biological Models. *Lectures note in Bio-mathematics* 27, Springer-Verlag, New York. 1978.
- [11] B. Li and Y. Kuang, Simple Food Chain in a Chemostat with Distint Removal Rates. *Jounal of Mathematical Analysis and Applications* 242. pp 75-92 (2000).
- [12] S. B. Hsu, T. W. Hwang and Y. Kuang, A radio-dependent food chain model and its applications to biological control. *Mathematical Biosciences* 181, pp 55-83(2003).
- [13] C. S. Holling, The components of predation as revealed by study of small-mammal predation of the European pine sawfly, *Canadian Entomologist*, 91. pp 293-320 (1959).
- [14] R. Borrelli y C. Coleman, *Differential equations, a modelling perspective*. John Wiley and Sons, Ins. Canada. 1996.
- [15] S. Ross, *Differential equations*. Blaisdell Publishing company, a divison of ginn and company. United States of America. 1964.

- [16] M. Seron and J. Brasslavsky, Sistemas no lineales, notas de clases. Universidad Nacional de Rosario. Argentina. 2001.
- [17] M. Braun, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamericana, S. A. de C. V. Mexico. 1991.
- [18] M. Cavani, Ecuaciones diferenciales ordinarias. IV Talleres de Formación Matemática. Cumaná. 2003.
- [19] J. M. Cushing, Differential Equations an applied approach. Pearson (Prentice Hall). New jesity. 2004.



## **HOJA DE METADATOS**



## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

### Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	Matemáticas

### Resumen (abstract):

En esta tesis se analiza un sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional que representa un modelo de cadena alimentaria simple. El trabajo está presentado en dos capítulos. En el primero, se expone la teoría preliminar tratando en lo posible que el trabajo sea autocontenido. Aquí se destaca de manera primordial la teoría de los sistemas dinámicos, así como también los criterios de Poincare-Bendixson y Dulac. En el capítulo 2 se considera un modelo del tipo que ocurre en el quimiostato para una cadena alimentaria de tres eslabones. El sistema descrito por el modelo consiste de: Una sustancia de nutrientes bien agitada es el primer eslabón de la cadena; los nutrientes sirven de alimento a la población de microorganismos que se encuentra en el nivel intermedio de la cadena alimentaria, y en el tercer eslabón se encuentran otros microorganismos que crecen a expensas de los anteriores. La respuesta de funcionamiento, es decir la manera en que las especies consumen su alimento, es de la forma Holling tipo I (o Lotka-Volterra). Se muestra la existencia de un atractor global para las soluciones del modelo y también que el único punto de equilibrio con coordenadas positivas es global asintóticamente estable para las soluciones del sistema.

**Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6**

**Contribuidores:**

<b>Apellidos y Nombres</b>	<b>ROL / Código CVLAC / e-mail</b>	
<b>Sael Romero</b>	<b>ROL</b>	CA <input type="checkbox"/> AS <input checked="" type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	<b>CVLAC</b>	<b>5.473.357</b>
	<b>e-mail</b>	Sjromero05@gmail.com
	<b>e-mail</b>	
<b>Julio Marin</b>	<b>ROL</b>	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	<b>CVLAC</b>	<b>9427575</b>
	<b>e-mail</b>	jjmarinv@gmail.com
	<b>e-mail</b>	
<b>Juan González</b>	<b>ROL</b>	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	<b>CVLAC</b>	<b>4.005.057</b>
	<b>e-mail</b>	Jrgmarcano21@hotmail.com
	<b>e-mail</b>	

**Fecha de discusión y aprobación:**

<b>Año</b>	<b>Mes</b>	<b>Día</b>
2011	08	05

**Lenguaje:** spa

**Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6****Archivo(s):**

<b>Nombre de archivo</b>	<b>Tipo MIME</b>
<b>Tesis-prueba.doc</b>	<b>winedt/Word</b>

Alcance:

Espacial : Nacional (Opcional)Temporal: Temporal (Opcional)**Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciado Matemáticas**  
\_\_\_\_\_**Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciado**  
\_\_\_\_\_**Área de Estudio: Matemáticas**  
\_\_\_\_\_**Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:****Universidad de Oriente**  
\_\_\_\_\_

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
CONSEJO UNIVERSITARIO  
RECTORADO

CUN°0975

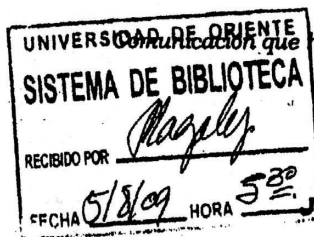
Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano  
**Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ**  
Vicerrector Académico  
Universidad de Oriente  
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Letido el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.



Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

**JUAN A. BOLANOS CUNELLE**  
Secretario



C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009): "Los trabajos de grados son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y solo podrá ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización"



---

Calderín G. Arnoldo R.  
Autor



---

Saúl Romero  
Asesor