UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

VARIACIONES DE FUNCIONES CONTINUAS
(Modalidad: Investigación)

NEYRA CAROLINA RAMÍREZ ESTEVIZ

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

CUMANÁ, 2008

VARIACIONES DE FUNCIONES CONTINUAS

APROBADO POR:

PROF. MARGOT SALAS
Asesora

INDICE

DEDICATORIA

A mi esposo Rodrigo y mis hijos Adrián y Adriana, por ser la fuente de energía que alimenta cada día de mi vida.

AGRADECIMIENTO

A Dios y la Virgen de Guadalupe, por siempre recordarme que están presentes en cada uno de mis pasos.

A la profesora Margot Salas, por su dedicación y asesoría brindada.

A mi esposo Rodrigo, por su apoyo incondicional y valiosa colaboración en el desarrollo de este trabajo.

A mi hijo Adrián, por representar la paciencia, comprensión y fortaleza que guían cada día de mi vida.

A mi hija Adriana, por ser la nueva luz que ilumina mi vida.

A mi madre Nubia, por su valiosa ayuda en los momentos culminantes de este trabajo.

A mi padre Miguel, por nunca desampararme.

A mis hermanas: Raqhel, Mónica, Lisseth y Vestalia por apoyarme siempre.

A mis suegros Carmen y Rodrigo, por darme su voto de confianza y ayuda desinteresada, lo cual permitió que fuese posible iniciar y culminar el presente trabajo.

LISTA DE FIGURA

RESUMEN

En este trabajo, se estudia una generalización de algunos tipos de funciones que guardan una relación con el concepto clásico de continuidad, usando los conceptos de operador e ideal topológico. Luego, utilizando la noción de estructura minimal, se define y se estudia una nueva clase de funciones que generaliza los conceptos antes mencionados.

INTRODUCCIÓN

El estudio de funciones continuas entre espacios abstractos se remonta a comienzos del siglo XX, cuando fueron consideradas por primera vez por Fréchet (1910), pero la primera exposición sistemática se debe a Hausdorff (1914). Desde ese entonces al presente, la investigación de funciones continuas entre espacios topológicos ha adquirido la más completa claridad y depuración jugando un papel muy importante dentro de las matemáticas, ya que mediante ellas se puede determinar y caracterizar las propiedades de ciertos espacios.

Por tal razón, muchos autores se han dedicado a estudiar y generalizar este concepto introduciendo nuevas formas de funciones continuas, entre las cuales podemos mencionar, por ejemplo, la función *weakly* continua introducida por Levine (1961), la función *almost* continua dada por Singal and Singal (1968), la función irresoluta introducida por Crossley and Hildebrand (1972), la función *weak almost* continua dada por Tong (1982), entre otras.

En el 2004, Vielma y Rosas, introducen un nuevo concepto de funciones continuas con la finalidad de generalizar y unificar las diferentes formas de funciones continuas antes mencionadas, entre otras, incluyendo el concepto clásico de función continua. Para esto, utilizan la noción de operador asociado a una topología definido por Kasahara (1979) y el concepto de ideal topológico, planteado por Jankovic and Hamlett (1990). De manera que, si (X,τ) y (Y,φ) son espacios topológicos, $f:X\to Y$ una función entre estos espacios, α y β los operadores asociados a la topología τ, θ y δ los operadores asociados a la topología φ e *I* un ideal topológico sobre *X*, se dice que *f* es una función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua si $\alpha\left(f^{-1}\left(\delta(V)\right)\right)\setminus\beta\left(f^{-1}\left(\theta(V)\right)\right)\in I$, para cada *V* abierto en Y.

En este trabajo, se estudia con detalle el concepto y las propiedades de las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas, se analiza bajo qué condiciones este concepto coincide con las diferentes formas de funciones continuas antes mencionadas. También, se estudia las imágenes directas de conjuntos compactos, bajo las distintas formas de funciones continuas y, cuáles pueden ser generalizadas mediante el concepto de funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas. Así mismo, haciendo uso de la noción de estructura minimal m_X sobre un conjunto no vacío *X*, dada por Maki (1996) y algunas de sus propiedades, se introducen dos nuevas definiciones: la de *m*-operador sobre m_X y la de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m-$continua, que generalizan, de manera natural, los conceptos de operador asociado a una topología y función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua; y además, se introduce una nueva generalización de algunos resultados obtenidos para las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)$-continuas.

A continuación, se describe brevemente el contenido de los capítulos de este trabajo.

El Capítulo 1 está constituido por algunas nociones básicas de los espacios topológicos, tales como conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjuntos compactos, conjuntos semi-abiertos y, algunas propiedades relacionadas con los mismos. Se presenta el concepto de función abierta y algunos resultados relacionados con la misma. A su vez, se introduce el concepto de operador asociado a una topología y algunas de sus propiedades. De igual manera, se introduce la definición de ideal sobre un conjunto *X*.

En el Capítulo 2, se estudian las nociones de funciones *weakly* continua, *almost* continua, irresoluta, *weak almost* continua, entre otras; y cómo están relacionadas con el concepto clásico de continuidad; además, se estudia cómo están relacionadas entre sí y bajo que condiciones pueden ser equivalentes. Así mismo, se desarrollan algunos resultados que involucran a las funciones *weakly* continuas y *almost* continuas con las imágenes directas de conjuntos compactos.

En el Capítulo 3, se estudian y desarrollan con detalle los conceptos y resultados obtenidos por Rosas y Vielma (2004), así como también, la relación que existe entre el concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua y las diferentes formas de funciones continuas introducidas en el Capítulo 2.

En el Capítulo 4, se plantea el concepto de estructura minimal m_X sobre un conjunto no vacío X y algunas de sus propiedades. Posteriormente, se introduce una nueva definición, la de un *m*-operador sobre una estructura minimal m_X, a partir del concepto de operador asociado a una topología dado en el Capítulo 1. Por último, se introduce una nueva definición, la de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m-$continua que generaliza el concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua y, además permite generalizar algunos teoremas dados en el Capítulo 3.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

En este capítulo, se introducen algunos conceptos básicos de la topología general necesarios para el desarrollo y comprensión de capítulos posteriores, también se introducen los conceptos de operador asociado a una topología y de ideal.

1.1 Espacios Topológicos

Definición 1.1.1. Una topología τ sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

(i) Los conjuntos $\varnothing$ y X son elementos de τ.

(ii) La unión arbitraria de elementos de τ es un elemento de τ.

(iii) La intersección finita de elementos de τ es un elemento de τ.

Un conjunto X, junto con una topología τ sobre X, se denomina espacio topológico y se denota por (X,τ).

Ejemplo 1.1.1. Las siguientes colecciones son topologías sobre un conjunto X:

(a) $\tau=\{\varnothing, X\}$, llamada la topología indiscreta.

(b) $\tau=\mathcal{P}(X)=\{A: A\subset X\}$, llamada la topología discreta.

(c) $\tau_{CF}=\{\varnothing\}\cup\{X-A: A\subset X, A \text{ es finito}\}$, llamada la topología complemento finito o cofinita.

(d) $\tau_{CC} = \{\varnothing\} \cup \{X - A : A \subset X, A \text{ es contable}\}$, llamada la topología complemento contable.

Definición 1.1.2: Sea (X,τ) un espacio topológico, se dice que un subconjunto *A* de X es abierto o τ-abierto si $A \in \tau$.

Observe que según la definición anterior, las propiedades de una topología se pueden expresar en términos de conjuntos abiertos de la siguiente manera:

(i) Los conjuntos $\varnothing$ y X son ambos conjuntos abiertos.
(ii) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
(iii) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Definición 1.1.3 Sea *X* un conjunto, una *base* para una topología τ sobre *X* es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de *X*, llamados elementos básicos, tales que:

(i) Para cada $x \in X$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
(ii) Si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface las dos condiciones de la Definición 1.1.3, se puede definir otra topología, la generada por la base $\mathcal{B}$.

Definición 1.1.4. Sea X un conjunto, se define la topología τ generada por una base $\mathcal{B}$ sobre *X* como sigue: Sea $U \subset X$, se dice que U es abierto en *X* ($U \in \tau$), si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Teorema 1.1.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología τ sobre X, entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$, es decir, $\tau = \left\{ U : U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, B_\alpha \in \mathcal{B} \right\}$.

Demostración: Sea U un abierto en X. Como $\mathcal{B}$ es una base para τ, entonces de la Definición 1.1.4, se tiene que para cada $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Así, $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} B_x \subseteq U$, es decir, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

Recíprocamente, dada cualquier colección de elementos de $\mathcal{B}$, estos también son elementos de τ y, como τ es una topología, la unión de ellos pertenece a τ. Y así, τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$. ■

El teorema anterior establece que cada conjunto abierto U en X puede expresarse como unión de elementos básicos.

Definición 1.1.5. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

(i) Si $\mathcal{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos $(a,b) = \{x : a < x < b\}$ en la recta real, la topología generada por $\mathcal{B}$ se define como la topología usual sobre $\mathbb{R}$, y se denota por $\mathbb{R}_{US}$.

(ii) Si $\mathcal{B}'$ es la colección de todos los intervalos semi-abiertos del tipo $[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$ donde $a < b$ en la recta real, la topología generada por $\mathcal{B}'$ se define como la topología límite inferior sobre $\mathbb{R}$, y se denota por $\mathbb{R}_l$.

Definición 1.1.6. Sea (X,τ) un espacio topológico, se dice que un subconjunto A de X es cerrado en X o τ -cerrado si $X - A \in \tau$.

En lo sucesivo el complemento del conjunto A respecto de X se denota por

X - A o $X \setminus A$.

En el siguiente teorema se enuncian algunas propiedades básicas de los conjuntos cerrados de un espacio topológico.

Teorema 1.1.2: Sea (X,τ) un espacio topológico, entonces

(i) $\varnothing$ y X son conjuntos cerrados.
(ii) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(iii) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 1.1.2, la Definición 1.1.6 y las leyes de De Morgan. ∎

Definición 1.1.7. Sean (X,τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X, se define

(i) El interior de A, denotado por $Int(A)$, como la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A, es decir, $Int(A) = \bigcup_{G\in\tau}\{G : G \subset A\}$.

(ii) La clausura de A, denotada por $Cl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a *A*, es decir, $Cl(A) = \bigcap_{X-F\in\tau}\{F : F \supset A\}$.

(iii) La frontera de *A*, denotada por *Fr*(*A*), como *Fr*(*A*) = *Cl*(*A*) $\cap$ *Cl*(*X* - *A*).

En el siguiente teorema, se muestran algunas propiedades del interior de un conjunto.

Teorema 1.1.3. Sean (X,τ) un espacio topológico y *A*, *B* subconjuntos de *X*, entonces

(i) *Int*(*A*) es el conjunto abierto más grande contenido en *A*.

(ii) $x \in Int(A)$ si y sólo si existe un abierto *G* tal que $x \in G \subset A$.

(iii) Si $A \subset B$, entonces $Int(A) \subset Int(B)$.

(iv) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

(v) *A* es abierto si y sólo si $Int(A) = A$.

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata de la Definición 1.1.2 y la Definición 1.1.7 (i).

(ii) Suponga que $x \in Int(A)$, entonces $x \in \bigcup_{G\in\tau}\{G : G \subset A\}$, es decir, $x \in G$ para algún $G \in \tau$ y $G \subset A$.

Recíprocamente, suponga que existe un abierto *G* tal que $x \in G \subset A$, entonces $x \in G \subset \bigcup_{G\in\tau}\{G : G \subset A\} = Int(A)$.

(iii) Como *Int*(*A*)$\subset A$ y por hipótesis $A \subset B$, se tiene que *Int*(*A*) es un conjunto abierto contenido en *B*, pero *Int*(*B*) es el conjunto abierto más grande contenido en *B*, por lo que *Int*(*A*)$\subset$*Int*(*B*).

(iv) Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$; por (iii), resulta que *Int*($A \cap B$)$\subset$*Int*(*A*) y *Int*($A \cap B$)$\subset$*Int*(*B*), por lo que *Int*($A \cap B$)$\subset$*Int*(*A*)$\cap$*Int*(*B*). Por otra parte, como *Int*(*A*)$\subset A$ y *Int*(*B*)$\subset B$, se tiene que *Int*(*A*)$\cap$*Int*(*B*)$\subset A \cap B$. Luego, como *Int*(*A*) y *Int*(*B*) son conjuntos abiertos, entonces su intersección es un conjunto abierto contenido en $A \cap B$. Pero, *Int*($A \cap B$) es el conjunto abierto más grande contenido en $A \cap B$, de modo que *Int*(*A*)$\cap$*Int*(*B*) $\subset$ *Int*($A \cap B$). Y así, resulta la igualdad que se quiere.

(v) Suponga que *A* es un conjunto abierto, entonces $A \subset \bigcup_{G \in \tau} \{G : G \subset A\} = Int(A)$ y como *Int*(*A*)$\subset A$ para todo *A* subconjunto de *X*, se concluye que *A* = *Int*(*A*). Recíprocamente, suponga que *Int*(*A*) = *A*, entonces *A* es un conjunto abierto, pues *Int*(*A*) es un conjunto abierto. ■

En el siguiente teorema, se muestran algunas propiedades de la clausura de un conjunto.

Teorema 1.1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y *A*, *B* subconjuntos de *X*, entonces

(i) $Cl(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a *A*.

(ii) $x \in Cl(A)$ si y sólo si para todo abierto *U* que contiene a *x*, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.

(iii) Si $A \subset B$, entonces $Cl(A) \subseteq Cl(B)$.

(iv) A es cerrado si y sólo si $A = Cl(A)$.

(v) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$.

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata de la Definición 1.1.7 (ii) y el Teorema 1.1.2.

(ii) Para probar esta proposición, se procede a demostrar su equivalente: $x \notin Cl(A)$ si y sólo si existe un abierto U que contiene a x tal que $U \cap A = \varnothing$. Suponga que $x \notin Cl(A)$, entonces $x \notin \bigcap_{X-F\in\tau}\{F : F \supset A\}$, lo cual significa que existe un cerrado F que contiene a A tal que $x \notin F$, es decir, $X - F$ es un abierto que contiene a x tal que $(X - F) \cap A = \varnothing$.

Recíprocamente, suponga que existe un abierto U que contiene a x tal que $U \cap A = \varnothing$, entonces $X - U$ es un cerrado que contiene a A, pero el cerrado más pequeño que contiene a A es $Cl(A)$, de modo que $Cl(A) \subset X - U$, pero $x \notin X - U$, por lo que se concluye que $x \notin Cl(A)$.

(iii) Como $B \subset Cl(B)$ y por hipótesis $A \subset B$, se tiene que $A \subset Cl(B)$; pero $Cl(B)$ es un conjunto cerrado y $Cl(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A, por lo cual se puede concluir que $Cl(A) \subset Cl(B)$.

(iv) Suponga que A es un conjunto cerrado, entonces $Cl(A) = \bigcap_{X-F\in\tau}\{F : F \supset A\} \subset A$ y como $A \subset Cl(A)$ para todo A subconjunto de X, resulta que $A = Cl(A)$. Recíprocamente, suponga que $A = Cl(A)$, entonces A es un conjunto cerrado, pues $Cl(A)$ es un conjunto cerrado, como se quería demostrar.

(v) Como $A \subset Cl(A)$ y $B \subset Cl(B)$, entonces $A \cup B \subset Cl(A) \bigcup Cl(B)$, de manera que, $Cl(A \cup B) \subset Cl(Cl(A) \bigcup Cl(B))$; pero, como $Cl(A)$, $Cl(B)$ son conjuntos cerrados, la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado y la clausura de un conjunto cerrado es el mismo conjunto, se deduce que $Cl(Cl(A) \bigcup Cl(B)) = Cl(A) \bigcup Cl(B)$. Y así, $Cl(A \cup B) \subset Cl(A) \bigcup Cl(B)$. Ahora bien, como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, entonces $Cl(A) \subset Cl(A \cup B)$ y $Cl(B) \subset Cl(A \cup B)$; por lo que, $Cl(A) \bigcup Cl(B) \subset Cl(A \cup B)$, de donde resulta la igualdad que se quiere. ■

La clausura y el interior de un conjunto pueden relacionarse, tal y como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.5. Sean (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X, entonces

(i) $X - Int(A) = Cl(X - A)$.

(ii) $X - Cl(A) = Int(X - A)$.

(iii) $Int(Cl(A) - A) = \varnothing$.

Demostración:

(i) Por la Definición 1.1.7 (i), se tiene que , $Int(A) = \bigcup_{G \in \tau} \{G : G \subset A\}$ por lo tanto, $X - Int(A) = X - \bigcup_{G \in \tau} \{G : G \subset A\} = \bigcap_{G \in \tau} \{X - G : G \subset A\}$; pero, como G es abierto y está contenido en A, entonces $X - G$ es cerrado y contiene a $X - A$; y como para cada cerrado que contenga a $X - A$ existe un abierto contenido en A, entonces al tomar esta intersección sobre todos los abiertos contenidos en A se está intersectando a todos los cerrados que contienen a $X-A$. Luego, $\bigcap_{G\in\tau}\{X-G : G\subset A\} = Cl(X-A).$ Por lo tanto, $X - Int(A) = Cl(X-A).$

(ii) Por la Definición 1.1.7 (ii), se tiene que $Cl(A) = \bigcap_{X-F\in\tau}\{F : F\supset A\};$ luego, $X - Cl(A) = X - \bigcap_{X-F\in\tau}\{F : F\supset A\} = \bigcup_{X-F\in\tau}\{X-F : F\supset A\};$ pero, como F es cerrado y contiene a A, entonces $X-F$ es abierto y está contenido en $X-A$; y como para cada abierto contenido en el complemento de A existe un cerrado que contiene a A, entonces al considerar esta unión sobre todos los cerrados que contienen a A se está uniendo a todos los abiertos contenidos en $X-A$, lo cual según la Definición 1.1.7 (i), es el interior de $X-A$. Por lo tanto, $X - Cl(A) = Int(X-A),$ como se quería probar.

(iii) Por la definición del complemento de un conjunto, se sabe que, $Cl(A) - A = Cl(A)\bigcap(X-A),$ de modo que $Int(Cl(A)-A) = Int(Cl(A)\bigcap(X-A))$. Luego, por el Teorema 1.1.3 parte (iv), se tiene que $Int(Cl(A)\bigcap(X-A)) = Int(Cl(A))\bigcap Int(X-A);$ pero, $Int(X-A) = X - Cl(A);$ así, $Int(Cl(A)\bigcap(X-A)) = Int(Cl(A))\bigcap(X - Cl(A)) = Int(Cl(A)) - Cl(A);$ y como $Int(Cl(A))\subset Cl(A);$ se sigue que $Int(Cl(A)\bigcap(X-A)) = \varnothing$ y esto prueba que $Int(Cl(A)-A) = \varnothing,$ como se quería demostrar. ■

Definición 1.1.8. Sean (X,τ) un espacio topológico y $A\subset X$, se dice que A es semi-abierto si Aì $Cl(Int(A))$.

De la Definición 1.1.8, se deduce que todo abierto es semi-abierto, sin embargo, existen conjuntos semi-abiertos que no son abiertos, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.2. Sea $X = \{a,b,c\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$.Observe que el conjunto $\{a,b\}$ es semi-abierto pero no es abierto en *X*.

En efecto, como $Int(\{a,b\}) = \{a\}$ y $Cl(Int(\{a,b\})) = X$, se tiene que $\{a,b\} \subset Cl(Int(\{a,b\}))$. Sin embargo, $\{a,b\}$ no es abierto en X, puesto que $\{a,b\} \notin \tau$.

El siguiente teorema muestra que la unión arbitraria de semi-abiertos es una operación cerrada.

Teorema 1.1.6. Sean (X,τ) un espacio topológico y $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos semi-abiertos de *X*, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es un conjunto semi-abierto en *X*.

Demostración: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de subconjuntos semi-abiertos de *X*; como $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, se tiene del Teorema 1.1.3 (iii) que $Int(A_\alpha) \subset Int(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)$ y, por el Teorema 1.1.4 (iii), se obtiene que $Cl(Int(A_\alpha)) \subset Cl(Int(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha))$. Más aún, como A_α es semi-abierto para todo $\alpha \in I$, se verifica que $A_\alpha \subset Cl(Int(A_\alpha))$ para todo $\alpha \in I$; así, $A_\alpha \subset Cl(Int(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha))$ para todo $\alpha \in I$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subset Cl(Int(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha))$, es decir, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ es un conjunto semi-abierto. ■

Definición 1.1.9. Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$, se dice que *A* es nunca denso en *X* si el interior de la clausura de *A* es vacío, es decir, $Int(Cl(A)) = \varnothing$.

Definición 1.1.10. Sean (X,τ) un espacio topológico y *A* un subconjunto de *X*, se define el *Kernel* de *A*, denotado por $Ker(A)$, como la intersección de todos los abiertos que contienen a *A*, es decir, $Ker(A) = \bigcap_{C\in\tau} \{C : C \supset A\}$.

En el siguiente teorema, se muestran algunas propiedades del *Kernel* de un conjunto.

Teorema 1.1.7. Sean (X,τ) un espacio topológico y *A* un subconjunto de *X*, entonces

(i) $A \subset Ker(A)$.

(ii) Si *A* es abierto, entonces $Ker(A) = A$.

(iii) Si *A* es abierto, entonces $A \bigcap Int(Ker(Cl(A))) = A$.

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata de la Definición 1.1.10.

(ii) Suponga que *A* es abierto, entonces $\bigcap_{C\in\tau} \{C : C \supset A\} = A$, es decir, $Ker(A) = A$.

(iii) Observe que $A \subset Cl(A)$ y $Cl(A) \subset Ker(Cl(A))$, de modo que

$A \subset Ker(Cl(A));$ y por tanto, $Int(A) \subset Int(Ker(Cl(A)));$ pero, como A es abierto, entonces $Int(A) = A;$ por lo que, $A \subset Int(Ker(Cl(A))).$ Y así, $A \bigcap Int(Ker(Cl(A))) = A.$ ■

Las siguientes definiciones establecen algunos de los axiomas de separación en un espacio topológico.

Definición 1.1.11. Un espacio topológico (X, τ) es de Fréchet o T_1, si para cada par de elementos distintos $x, y \in X$, existen *U* y *V* abiertos en *X*, tales que $x \in U$, $x \notin V$ y $y \in V$, $y \notin U$.

Definición 1.1.12. Un espacio topológico (X, τ) es de Hausdorff o T_2, si para cualesquiera dos elementos distintos $x, y \in X$, existen *U* y *V* abiertos disjuntos en *X*, tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Observe que, todo espacio T_2 es T_1, sin embargo, existen espacios topológicos que son T_1 pero no T_2, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.3. Sea (X, τ_{CF}) un espacio topológico, donde *X* es un conjunto infinito y τ_{CF} es la topología complemento finito. Observe que, *X* es T_1 pero no T_2. En efecto, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$; como los conjuntos unitarios $\{x\}, \{y\}$ son finitos, se tiene que $V = X - \{x\}$ y $W = X - \{y\}$ son conjuntos abiertos en *X* tales que $x \in W$, $x \notin V$ y $y \in V$, $y \notin W$, es decir, (X, τ_{CF}) es T_1. Por otro lado, si se supone que (X,τ_{CF}) es T_2, entonces para cada par de elementos $x,y\in X$ con $x\neq y$ existen abiertos V_1 y W_1 disjuntos en *X* que contienen a *x* e *y* respectivamente; por lo que, $X-V_1$ y $X-W_1$ son conjuntos finitos.

Así, $(X-V_1)\cup(X-W_1)=X-(V_1\cap W_1)=X-\varnothing=X$ es un conjunto finito, lo cual es una contradicción pues *X* es un conjunto infinito. En consecuencia, se verifica que (X,τ_{CF}) no es T_2.

El siguiente teorema muestra que en un espacio T_2 los conjuntos finitos son cerrados.

Teorema 1.1.8. Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff es cerrado.

Demostración: Sean (X,τ) un espacio topológico T_2 y $A=\{a_1,a_2,a_3\cdots a_n\}, n\in N$, un subconjunto finito de *X*; como *A* es finito, se puede escribir como la unión de todos sus elementos, es decir, $A=\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i\}$. Luego, para probar que *A* es cerrado, es suficiente mostrar que cualquier conjunto unitario $\{x_0\}, x_0\in X$, es cerrado en *X*, ya que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado según el Teorema 1.1.2 (iii).

Sea $x\in X$ con $x\neq x_0$, entonces existen *U* y *V* abiertos disjuntos en *X* tales que $x\in U$ y $x_0\in V$; y como $U\cap\{x_0\}\subset U\cap V=\varnothing$, se tiene que $x\notin Cl(\{x_0\})$. Así, $Cl(\{x_0\})=\{x_0\}$, es decir, que $\{x_0\}$ es un conjunto cerrado. Por lo tanto, *A* es un conjunto cerrado. ■

A continuación, se presentan los conceptos de función continua y función abierta.

Definición 1.1.13. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos. Una función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función continua, si para cada abierto V en Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Teorema 1.1.9. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos y $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ una función. Si f es continua y Y es Hausdorff, entonces las preimagenes de los conjuntos unitarios de Y son conjuntos cerrados.

Demostración: Sea $y\in Y,$ como Y es T_2, entonces del Teorema 1.1.8, se tiene que $\{y\}$ es un conjunto cerrado, es decir, $Y, \ \{y\}$ es abierto. Luego, como f es una función continua, se sigue que $f^{-1}(Y, \ \{y\})=X, \ \ f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto abierto. Y así, $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto cerrado. ■

Definición 1.1.14. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos. Una función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$, se dice abierta si para cada abierto U de X, $f(U)$ es abierto en Y.

El interior, la clausura y la imagen inversa de un conjunto pueden relacionarse utilizando la condición de que la función sea abierta como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.10. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos y B un subconjunto de Y. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función abierta, entonces

(i) $Int(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(Int(B))$.

(ii) $f^{-1}(Cl(B))\subset Cl(f^{-1}(B))$.

Demostración:

(i) Sea $B\subset Y$ y suponga que $x\in Int(f^{-1}(B))$, entonces existe un abierto U_x tal que $x\in U_x\subset f^{-1}(B)$, de modo que $f(U_x)\subset f(f^{-1}(B))\subset B$; y como *f* es abierta, también se tiene que $f(U_x)=W_{f(x)}$ es un abierto. Ahora bien, como $f(U_x)\subset B$ y $f(U_x)=W_{f(x)}$ es abierto, se obtiene que existe $f(x)\in W_{f(x)}\subset B$, lo cual implica que $f(x)\in Int(B)$; de donde resulta que $x\in f^{-1}(Int(B))$. Por lo tanto, $Int(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(Int(B))$.

(ii) Al sustituir B por $Y\setminus B$ en (i), se tiene que $Int(f^{-1}(Y\setminus B))\subset f^{-1}(Int(Y\setminus B))$, de donde $Int(X\setminus f^{-1}(B))\subset f^{-1}(Int(Y\setminus B))$. Así, en virtud del Teorema 1.1.5, resulta que $X\setminus Cl(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(Y\setminus Cl(B))= X\setminus f^{-1}(Cl(B))$, lo cual es equivalente a que $f^{-1}(Cl(B))\subset Cl(f^{-1}(B))$. ■

Una de las propiedades más importantes relacionada con el concepto de función continua es el hecho de preservar conjuntos compactos bajo imágenes directas. A continuación, se presenta el concepto de conjunto compacto y posteriormente se prueba dicha propiedad.

Definición 1.1.15. Sea X un conjunto no vacío. Un cubrimiento de un subconjunto $A \subset X$ es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, cuya unión contiene a A. Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de X, un subcubrimiento de $\mathcal{A}$ es una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, tal que $\mathcal{B}$ es también un cubrimiento de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}$ es un conjunto finito.

Definición 1.1.16. Sea (X,τ) un espacio topológico, se dice que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de X tal que cada elemento de $\mathcal{A}$ es un conjunto abierto.

Definición 1.1.17. Sean (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$, se dice que A es compacto si todo cubrimiento abierto de A posee un subcubrimiento finito. En otras palabras, A es compacto si cada cubrimiento abierto $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de A tiene una subcolección $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

El siguiente teorema muestra que los conjuntos compactos son invariantes topológicos bajo funciones continuas.

Teorema 1.1.11. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función continua y X es un conjunto compacto, entonces $f(X)$ es un conjunto compacto.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de $f(X)$, es decir,

$f(X) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$ entonces $X \subset f^{-1}(f(X)) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}(A)$ y esto significa que $\mathcal{H} = \left\{ f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A} \right\}$ es un cubrimiento de *X*. Ahora bien, como *f* es continua y todos los conjuntos *A* con $A \in \mathcal{A}$ son abiertos, entonces todas las preimagenes $f^{-1}(A)$ con $A \in \mathcal{A}$, también son abiertas. En otras palabras, $\mathcal{H}$ es un cubrimiento abierto de *X*. Además, como *X* es un conjunto compacto, se sigue que $\mathcal{H}$ posee un subcubrimiento finito, por ejemplo $\left\{ f^{-1}(A_i) \right\}_{i=1}^{n}$, que cubre a *X*, es decir, $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i).$ En consecuencia, $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$ Por lo tanto, $f(X)$ es compacto. ■

Definición 1.1.18. Un espacio topológico (X, τ) es Lindelöf si todo cubrimiento abierto de *X* contiene un subcubrimiento contable.

Definición 1.1.19. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$, se dice que

(i) *A* es contablemente compacto si cada cubrimiento abierto contable de *A* posee un subcubrimiento finito.

(ii) *A* es *almost* compacto o QHC si cada cubrimiento abierto $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de *A* tiene una subcolección finita $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} Cl(C_i).$

(iii) *A* es *nearly* compacto si cada cubrimiento abierto $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de *A* tiene una subcolección finita $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} Int\,(Cl(C_i)).$

La relación general entre conjuntos compactos, y los conjuntos contablemente compactos, Lindelöf, *nearly* compactos y *almost* compactos viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.1.12. Sean (X,τ) un espacio topológico y A un subconjunto compacto de X, entonces

(i) A es contablemente compacto.

(ii) A es Lindelöf.

(iii) A es *almost* compacto.

(iv) A es *nearly* compacto.

Demostración:

(i) Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto contable de A, como A es compacto, entonces $\mathcal{A}$ posee un subcubrimiento finito $\mathcal{B}$. Por lo que, A es contablemente compacto.

(ii) Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de A, como A es compacto, entonces $\mathcal{A}$ posee un subcubrimiento finito $\mathcal{B}$ y como todo conjunto finito es contable, se sigue que $\mathcal{B}$ es un subcubrimiento contable. Así, A es Lindelöf

(iii) Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de A, como A es compacto, entonces existe una subcolección finita $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ tal que $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}C_i$; pero, como $C_i \subseteq Cl(C_i)$, para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, se sigue que $A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n}C_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}Cl(C_i)$. Por lo tanto, A es *almost* compacto.

(iv) Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de *A*, como *A* es compacto, entonces existe una subcolección finita $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ tal que $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}C_i$ pero, como $C_i\subseteq Cl(C_i)$ y C_i es abierto para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, se tiene que $C_i\subseteq Int(Cl(C_i))$, por lo que $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}C_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}Int(Cl(C_i))$. En consecuencia, *A* es *nearly* compacto. ■

Observe que todo conjunto *nearly* compacto es *almost* compacto.

1.2 Operadores E Ideales

En esta sección, se introduce el concepto de operador asociado a una topología τ sobre un conjunto *X* y, algunas definiciones y resultados basados en dicho concepto. Además, se introduce el concepto de ideal topológico sobre un conjunto *X*.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto no vacío, se dice que una función $\alpha:\wp(X)\rightarrow\wp(X)$ es un operador expansivo sobre una familia Γ de subconjuntos de X si $U\subseteq\alpha(U)$ para todo $U\in\Gamma$. Si (X,τ) es un espacio topológico y α es un operador expansivo sobre la topología, entonces se dice que α es un operador asociado a la topología τ.

Ejemplo 1.2.1. Sea (X,τ) un espacio topológico, los siguientes son ejemplos de operadores asociados a la topología τ

(a) El operador identidad $\alpha:\wp(X)\rightarrow\wp(X)$ definido por: $\alpha(U)=Id(U)$.

(b) El operador interior $\alpha:\wp(X)\rightarrow\wp(X)$ definido por: $\alpha(U)=Int(U)$.

(c) El operador clausura $\alpha:\wp(X)\rightarrow\wp(X)$ definido por: $\alpha(U)=Cl(U)$.

(d) El operador clausura interior $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por: $\alpha(U) = Cl\,Int(U) = Cl\,(Int(U))$.

(e) El operador interior clausura $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por: $\alpha(U) = Int\,Cl(U) = Int\,(Cl(U))$.

(f) El operador complemento frontera $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por: $\alpha(U) = X \setminus Fr(U)$.

(g) El operador *kernel* $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por: $\alpha(U) = Ker(U)$.

(h) El operador *kernel* clausura $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por: $\alpha(U) = Ker\,Cl(U) = Ker(Cl(U))$.

(i) El operador interior *kernel* clausura $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por: $\alpha(U) = Int\,Ker\,Cl(U) = Int\big(Ker\,(Cl(U))\big)$.

Observe que si Ω es el conjunto formado por todos los operadores asociados a la topología τ y $\alpha, \beta \in \Omega$, la relación:

$\alpha \prec \beta$ si y sólo si $\alpha(A) \subset \beta(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, define una relación de orden parcial en Ω.

Definición 1.2.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y α un operador asociado a la topología τ, se dice que α es monótono si para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A \subset B$, se tiene que $\alpha(A) \subset \alpha(B)$.

Es de observar que los operadores identidad, interior y clausura son monótonos, mientras que el operador complemento frontera no es en general monótono.

Definición 1.2.3. Sean (X,τ) un espacio topológico, β y β^* operadores asociados a la topología τ, se define el operador intersección por $(\beta \wedge \beta^*)(A) := \beta(A) \cap \beta^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.2.4. Sean (X,τ) un espacio topológico**,** β y β^* operadores asociados a la topología τ, se dice que β y β^* son mutuamente duales en X**,** si $(\beta \wedge \beta^*)(U) = Id(U)$ para cada abierto U en X.

Ejemplo 1.2.2. Sea (X,τ) un espacio topológico, los siguientes son ejemplos de operadores mutuamente duales:

(a) $\omega(A) = Cl(A)$ y $\lambda(A) = Y \setminus Fr(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

(b) $\Lambda(A) = Int(Cl(A))$ y $\gamma(A) = A \cup \left(Y \setminus Int(Cl(A))\right)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

(c) $\rho(A) = Int\left(Ker(Cl(A))\right)$ y $\sigma(A) = A \cup \left(Y \setminus Int(Ker(Cl(A)))\right)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

En general, si α es cualquier operador asociado a la topología τ, entonces el operador β definido por $\beta(A) = A \cup \left(X \setminus \alpha(A)\right)$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ es mutuamente dual con α.

Definición 1.2.5. Sean (X,τ) un espacio topológico, β cualquier operador y el operador Int asociados a la topología τ. El operador β induce otro operador, denotado por $Int\beta$, definido como sigue: $(Int\beta)(A) = Int(\beta(A))$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.

Observe que $Int\beta \prec \beta$, ya que $Int(\beta(A)) \subset \beta(A)$ para cada $A \in \wp(X)$.

Definición 1.2.6. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos. Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ satisface la condición de abierto con respecto al operador α asociado a la topología τ, si $\alpha(f^{-1}(B)) \subset \alpha(f^{-1}(Int(B)))$ para cada $B \subset Y$.

Observe que la Definición 1.2.6 coincide con la Definición 1.1.14 (función abierta) cuando el operador es la identidad o el operador interior.

Teorema 1.2.1. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función abierta, entonces f satisface la condición de abierto con respecto al operador $\alpha = Int$ asociado a la topología τ.

Demostración: Sea $B \subset Y$ y suponga que f es una función abierta, entonces por el Teorema 1.1.10 (i) $Int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Int(B))$, lo cual implica que $Int\big(Int(f^{-1}(B))\big) \subset$

$Int\big(f^{-1}(Int(B))\big)$, pero como $Int(f^{-1}(B))$ es abierto, se obtiene que $Int(f^{-1}(B)) \subset$

$Int\big(f^{-1}(Int(B))\big)$. Así, al tomar $\alpha = Int$ como el operador asociado a la topología τ en la última expresión, resulta que $\alpha(f^{-1}(B)) \subset \alpha(f^{-1}(Int(B)))$, lo cual significa que f satisface la condición de abierto respecto al operador $\alpha = Int$. ■

Definición 1.2.7. Sean (X,τ) un espacio topológico y α un operador asociado a la topología τ, se dice que el espacio topológico (X,τ) es $\alpha - T_1$ si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen conjuntos abiertos V y W tales que $x \in V$ y $y \notin \alpha(V)$ y $y \in W$ y $x \notin \alpha(W)$.

Teorema 1.2.2. Sean (X,τ) un espacio topológico y $\alpha = Cl$ el operador asociado a la topología τ. Entonces, (X,τ) es T_2 si y sólo si es $Cl - T_1$.

Demostración: Sea $\alpha = Cl$ el operador asociado a la topología τ y suponga que (X,τ) es T_2, entonces para cada $x, y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos V y W tales que $x \in V$ y $y \in W$ con $V \cap W = \emptyset$. Por tanto, sólo resta verificar que $x \notin Cl(W)$ y $y \notin Cl(V)$, para mostrar que (X,τ) es $Cl - T_1$. Suponga lo contrario, es decir, $x \in Cl(W)$ o $y \in Cl(V)$. Si $x \in Cl(W)$, entonces para todo U abierto que contiene a x, se tiene que $U \cap W \neq \emptyset$. En particular, para el abierto $U = V$, lo cual conduce a una contradicción, puesto que V y W son disjuntos. Por tanto, $x \notin Cl(W)$. De igual manera, se muestra que $y \notin Cl(V)$. Y así, (X,τ) es $Cl - T_1$.

Recíprocamente, si (X,τ) es $Cl - T_1$, entonces para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen abiertos V y W tales que $x \in V$ y $y \notin Cl(V)$ y $y \in W$ y $x \notin Cl(W)$. Luego, como $y \notin Cl(V)$, existe un abierto U_y que contiene a *y* tal que $V \cap U_y = \emptyset$ (1) y, además como $x \in V$ y V es abierto, existe un abierto U_x que contiene a *x* tal que $U_x \subset V$, de modo que $U_x \cap U_y \subset V \cap U_y$, así de (1) se obtiene que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Por tanto, para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existen abiertos disjuntos que contienen a x y y respectivamente, con lo cual (X,τ) es T_2. De manera similar, cuando $x \notin Cl(W)$ se concluye que (X,τ) es T_2. ■

Definición 1.2.8. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos, α y θ operadores asociados a las topologías τ y φ respectivamente, se dice que una función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es (α,θ)- *weakly* continua si para cada abierto V en Y, $\alpha(f^{-1}(V)) \subset Int(f^{-1}(\theta(V)))$.

Definición 1.2.9. Sean (X,τ) un espacio topológico y α un operador asociado a la topología τ. Un subconjunto A de *X*, se dice α-compacto si para cada cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de A existe una subcolección finita $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ de $\mathcal{V}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n}\alpha(V_i)$.

Observe que esta definición generaliza los conceptos de compacidad vistos en la sección anterior pues si se considera el operador como el operador identidad, o el operador clausura o interior clausura, se obtienen los conjuntos compactos, *almost* compacto y *nearly* compacto respectivamente.

A continuación, se presenta el concepto de ideal.

Definición 1.2.10. Un ideal *I* sobre un conjunto *X* es una colección no vacía de subconjuntos de *X* que satisface las siguientes propiedades:

(i) Si $A \in I$ y $B \in I,$ entonces $A \cup B \in I$ (aditiva)

(ii) Si $A \in I$ y $B \subset A,$ entonces $B \in I$ (hereditaria)

Observe que si I es un ideal, entonces $\varnothing \in I,$ puesto que $\varnothing \subset A$ para cualquier

$A \in I.$ Además, si (X,τ) es un espacio topológico, entonces *I* es llamado ideal topológico (Jankovic and Hamlett, 1990).

Ejemplo 1.2.3. Las siguientes colecciones de conjuntos forman ideales sobre el espacio topológico (X,τ).

(a) La colección *I* formada por el conjunto vacío.

(b) La colección I_N formada por los subconjuntos nunca densos de *X*. En efecto, sean $A, B \in I_N$, se debe mostrar que $A \cup B \in I_N.$ Por reducción al absurdo, suponga que $A \cup B \notin I_N,$ entonces $Int(Cl(A \cup B)) \neq \varnothing$. Sea $x \in Int(Cl(A \cup B))$, entonces existe un abierto C en X tal que $x \in C \subset Cl(A \cup B),$ así $x \in C \subset Cl(A) \cup Cl(B)$. Ahora bien, como $A \in I_N,$ se tiene que *C* no esta totalmente contenido en $Cl(A),$ pues de no ser así, $Int(Cl(A)) \neq \varnothing,$ lo cual conduce a una contradicción. Sea $y \in C$ y suponga que $y \notin Cl(A),$ entonces existe un abierto *W* que contiene a *y* tal que $W \cap A = \varnothing.$ Luego, observe que $y \in Cl(B),$ pues $C \subset Cl(A) \bigcup Cl(B),$ por lo que para todo abierto *U* que contiene a *y*, se tiene que $U \cap B \neq \varnothing$ y, en particular, para el abierto *U*=*W* que contiene a *y*, $W \cap B \neq \varnothing.$ Por tanto, al tomar $V = C \cap W,$ el cual es un conjunto abierto en *X*, se verifica que $V \subset Cl(B).$ En efecto, suponga que existe un $z \in V$ tal que $z \notin Cl(B)$, entonces $z \in C,$ y en consecuencia $z \in Cl(A),$ pues $C \subset Cl(A) \bigcup Cl(B)$, de modo que para todo abierto *S* que contiene a *z* y en particular para el abierto *S*=*W*, resulta que

$W \cap A \neq \emptyset,$ lo cual es una contradicción, ya que $W \cap A = \emptyset.$ Así, existe un abierto V tal que $y \in V \subset Cl(B),$ es decir, $Int(Cl(B)) \neq \emptyset,$ lo cual es una contradicción con la hipótesis de que $B \in I_N.$ Por lo tanto, $Int(Cl(A \cup B)) = \emptyset$ y esto prueba que I_N cumple con la propiedad aditiva. Por otro lado, suponga que $B \subset A$ y $A \in I_N,$ entonces $Int(Cl(B)) \subset Int(Cl(A))$ y $Int(Cl(A)) = \emptyset,$ de modo que $Int(Cl(B)) = \emptyset$ y esto significa que $B \in I_N.$ Y así, se verifica que I_N cumple con la propiedad hereditaria.

CAPÍTULO II

FORMAS DÉBILES DE CONTINUIDAD

La noción de función continua es uno de los conceptos más importantes y utilizados en matemáticas, es por tal motivo el interés de muchos autores estudiar y generalizar tal concepto, obteniendo como resultado varias definiciones relativas a funciones que satisfacen ciertas propiedades y que generalizan el concepto clásico de continuidad. Estas definiciones, se pueden denominar como formas débiles de continuidad, entre las cuales se pueden mencionar, por ejemplo, las nociones de función *weakly* continua, función *almost* continua o función *very weakly* continua, entre otras.

En este capítulo, se estudia con detalle tales conceptos de continuidad y cómo están relacionados con el concepto tradicional de continuidad. Además, se estudia cómo están relacionados entre sí y bajo que condiciones pueden ser equivalentes. También, se estudia el comportamiento de las imágenes directas de conjuntos compactos bajo algunas de estas funciones.

2.1 Formas Débiles De Continuidad

En esta sección, se introducen los conceptos de ciertas formas débiles de continuidad.

Definición 2.1.1. Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos y $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función, se dice que:

(i) f es *densely approached* si para cada abierto V en Y, se tiene que

$f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\,(f^{-1}(V))\right)$, es decir, $f^{-1}(V)$ es pre-abierto.

(ii) *f* es *quasi*-continua si para cada abierto *V* en *Y*, se cumple que $f^{-1}(V)$ es semi-abierto en *X*, es decir, $f^{-1}(V) \subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)$.

(iii) *f* es *weakly* continua si para cada abierto *V* en *Y*, se tiene que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(Cl\,(V))\right)$.

(iv) *f* es *almost* continua si para cada abierto *V* en *Y*, se verifica que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\,(Cl\,(V))\right)\right)$.

(v) *f* es irresoluta si para cada semi-abierto *V* en *Y*, se cumple que $f^{-1}(V)$ es semi-abierto en *X*, es decir, $f^{-1}(V) \subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)$.

(vi) *f* es *weak almost* continua si para cada abierto *V* en *Y*, se tiene que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl\,(V))\right)\right)\right)$.

(vii) *f* es *very weakly* continua si para cada abierto *V* en *Y*, se cumple que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Ker\,(Cl(V))\right)\right)$.

(viii) *f* es *perfectly* continua si para cada abierto *V* en *Y*, se verifica que $f^{-1}(V)$ es abierto y cerrado en *X*, es decir, $f^{-1}(V)$ es *clopen*.

(ix) *f* es *almost weakly* continua si para cada abierto *V* en *Y*, se tiene que $f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$.

El siguiente teorema dice que todos los conceptos anteriores, excepto los de función irresoluta y *perfectly* continua generalizan la noción de función continua.

Teorema 2.1.1. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función continua, entonces

(i) f es *densely approached*.
(ii) f es *quasi*-continua.
(iii) f es *weakly* continua.
(iv) f es *almost* continua.
(v) f es *weak almost* continua.
(vi) f es *very weakly* continua.
(vii) f es *almost weakly* continua.

Demostración:

(i) Sea V un abierto en Y, como f es continua, entonces $f^{-1}(V) = Int\ f^{-1}(V)$; y como $f^{-1}(V) \subset Cl(f^{-1}(V))$, se sigue que $Int\ f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$, por lo que, $f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$. Y así, en virtud de la Definición 2.1.1 (i), se tiene que f es *densely approached*.

(ii) Suponga que f es continua y sea V un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X, es decir, $f^{-1}(V) = Int(f^{-1}(V))$, por lo que $Cl(f^{-1}(V)) \subset Cl\left(Int\ f^{-1}(V)\right)$. Pero, como $f^{-1}(V) \subset Cl(f^{-1}(V))$, se sigue que $f^{-1}(V) \subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)$, lo cual significa que $f^{-1}(V)$ es semi-abierto. Por lo tanto, según la Definición 2.1.1 (ii), f es *quasi*-continua.

(iii) Sea V un abierto en Y, como f es continua, entonces $f^{-1}(V) = Int\ f^{-1}(V)$. Además, como $V \subset Cl(V)$ para todo $V \subset Y$, se tiene que $Int(f^{-1}(V)) \subset Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$, de manera que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$. En consecuencia, de acuerdo con la Definición 2.1.1 (iii), se concluye que f es *weakly* continua.

(iv) Suponga que f es continua y sea V un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X, es decir, $f^{-1}(V) = Int(f^{-1}(V))$. Luego, como $Int(V) \subset Int(Cl(V))$ y V es abierto, se tiene que $V \subset Int(Cl(V))$; por lo que, $Int\left(f^{-1}(V)\right) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)$ y, por tanto $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)$. Y así, en virtud de la Definición 2.1.1 (iv), se tiene que f es *almost* continua.

(v) Sea V un abierto en Y, como f es continua, entonces $f^{-1}(V) = Int(f^{-1}(V))$. Además, como $A \subset Ker(A)$ para todo $A \subset Y$, entonces, $Cl(V) \subset Ker(Cl(V))$, por lo cual $V \subset Ker(Cl(V))$ y $Int(V) \subset Int(Ker(Cl(V)))$. Pero, como V es abierto, se obtiene que $V \subset Int(Ker(Cl(V)))$, lo cual implica que $Int(f^{-1}(V)) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl(V))\right)\right)\right)$. Así, $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl(V))\right)\right)\right)$. Por lo tanto, según la Definición 2.1.1 (vi), se deduce que f es *weak almost* continua.

(vi) Sea V un abierto en Y y suponga que f es continua, entonces $f^{-1}(V)=Int\,(f^{-1}(V))$. Luego, como $V\subset Ker\,(Cl(V))$, se sigue que $f^{-1}(V)\subset f^{-1}\left(Ker\,(Cl(V)\right)$, por lo que $Int\left(f^{-1}(V)\right)\subset Int\left(f^{-1}\left((Ker\,(Cl(V))\right)\right)$; así, $f^{-1}(V)\subset Int\left(f^{-1}\left(Ker\,(Cl(V))\right)\right)$. En consecuencia, de la Definición 2.1.1 (vii), se tiene que f es *very weakly* continua.

(vii) Sea V un abierto en Y, como f es continua, entonces $f^{-1}(V)=Int\,(f^{-1}(V))$. Además, como $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(Cl(V))$, se tiene que $Cl(f^{-1}(V))\subset Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$, por lo que $f^{-1}(V)\subset Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$, por tanto, $Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)\subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$. Así, $f^{-1}(V)\subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$, y en virtud de la Definición 2.1.1 (ix), se concluye que f es *almost weakly* continua. ■

Observe que no se puede establecer una implicación directa entre el concepto de función continua y función irresoluta, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, las topologías límite inferior y usual, $\mathbb{R}_\ell$, $\mathbb{R}_{US}$ respectivamente sobre $\mathbb{R}$, considere además la función $f:(\mathbb{R},\mathbb{R}_\ell)\to(\mathbb{R},\mathbb{R}_{US})$ definida por $f(x)=x,$ para todo $x\in\mathbb{R}.$.

Sea V un abierto en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathbb{R}_{US}$, entonces por el Teorema 1.1.1 $V=\bigcup_{x\in V}\left(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x\right)$ con $\varepsilon_x>0$.

Observe que $\left(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x\right)$ es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología límite inferior $\mathbb{R}_\ell$, de modo que $f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in V}\left(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x\right)$ es abierto R con la topología límite inferior R_ℓ. Por tanto, la función *f* es continua.

Sin embargo, *f* no es irresoluta, pues $V=\left(0,1\right]$ es semi-abierto en (R, R_{US}) y $f^{-1}\left(0,1\right]=\left(0,1\right]$ no es semi-abierto en (R, R_ℓ), ya que en este espacio, se tiene que $Cl\left(Int\left(0,1\right]\right)=\left[0,1\right)$ y este último no contiene a V.

Corolario 2.1.1. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función *perfectly* continua, entonces:

(i) *f* es continua.
(ii) *f* es *densely approached*.
(iii) *f* es *quasi*-continua.
(iv) *f* es *weakly* continua.
(v) *f* es *almost* continua.
(vi) *f* es *very weakly* continua.
(vii) *f* es *almost weakly* continua.
(viii) *f es weak almost* continua

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 2.1.1 (viii) y el Teorema 2.1.1. ■

A continuación, se presentan ejemplos que muestran que el recíproco del Teorema 2.1.1 en general no es cierto. En particular, el siguiente ejemplo muestra una función que es *densely approached*, pero no continua.

Ejemplo 2.1.2. Para el conjunto $X = Y = \{a,b\}$ y las topologías, $\tau_1 = \{X, \emptyset\}$ y $\tau_2 = \{\{b\}, X, \emptyset\}$ sobre X, considere la función $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in X$ y sea V un abierto en Y.

(a) Si $V = X$ ó $V = \emptyset$, entonces $f^{-1}(V) \subset Int\big(Cl(f^{-1}(V))\big)$.

(b) Si $V = \{b\}$, entonces $f^{-1}(V) = \{b\}$, $Cl(f^{-1}(V)) = X$ y $Int\big(Cl(f^{-1}(V))\big) = X$; de modo que $f^{-1}(V) \subset Int(Cl(f^{-1}(V)))$.

Es decir, en cualquiera de los casos,de acuerdo a la Definición 2.1.1 (i), se verifica que f es *densely approached*. Sin embargo, f no es continua, pues para $V = \{b\}$ abierto en (Y, τ_2), se tiene que $f^{-1}(V) = \{b\}$ no es abierto en (X, τ_1).

El próximo ejemplo muestra que existen funciones que son *quasi*-continuas, pero no continuas.

Ejemplo 2.1.3. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, las topologías límite inferior y usual, $\mathbb{R}_\ell$, $\mathbb{R}_{US}$ respectivamente sobre $\mathbb{R}$, considere además la función $f : (\mathbb{R}, \mathbb{R}_{US}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}_\ell)$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$..

Sea V un abierto en $\mathbb{R}$ con la topología $\mathbb{R}_\ell$, entonces por el Teorema 1.1.1 $V = \bigcup_{x \in V} [x, x+\varepsilon_x)$ con $\varepsilon_x > 0$. Luego, $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in V} [x, x+\varepsilon_x)$. Observe que $[x, x+\varepsilon_x)$ es semi-abierto en $\mathbb{R}$ con la topología usual $\mathbb{R}_{US}$, pues para cada $x \in V$ y

$\varepsilon_x > 0$, se tiene que $[x, x+\varepsilon_x) \subset [x, x+\varepsilon_x] = Cl(Int([x, x+\varepsilon_x)))$. De modo que, $f^{-1}(V)$ se puede expresar como unión arbitraria de conjuntos semi-abiertos en R con la topología usual R_{US}, así, por Teorema 1.1.6, se sigue que $f^{-1}(V)$ es semi-abierto en R.. Por lo tanto, de acuerdo con la Definición 2.1.1 (ii), *f* es *quasi*-continua.

Sin embargo, *f* no es continua, pues para $V = [0,1)$ abierto en R con la topología límite inferior R_{ℓ}, se tiene que $f^{-1}(V) = [0,1)$ no es abierto R con la topología usual R_{US}.

A continuación, mediante un ejemplo se muestra que una función puede ser *almost* continua, pero no continua.

Ejemplo 2.1.4. Considere el conjunto de los números reales $\mathbf{R}$ con τ_{CC} la topología complemento contable y $\mathbf{Z}^{+}$ el conjunto de los enteros positivos con τ_{CF} la topología complemento finito. Sean $\mathbb{Q}$ el subconjunto de $\mathbf{R}$ formado por lo números racionales e I el subconjunto de $\mathbf{R}$ formado por los números irracionales y la función $f : (\mathbf{R}, \tau_{CC}) \to (\mathbf{Z}^{+}, \tau_{CF})$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \in I \end{cases}.$$

Sea V un abierto en $\mathbf{Z}^{+}$, no vacío, de la forma $V = \mathbb{Z}^{+} \setminus W$, con W un conjunto finito en $\mathbb{Z}^{+}$, entonces para obtener el valor de $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(W)$, se deben considerar los siguientes casos:

(a) Si $0 \in W$ y $1 \notin W$, entonces $f^{-1}(W) = \mathbb{Q}$. Por tanto, $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$.

(b) Si $1 \in W$ y $0 \notin W$, se tiene que $f^{-1}(W) = \mathbb{I}$. De modo que, $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$.

(c) Si $0 \in W$ ó $1 \in W$, se obtiene que $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}) = \emptyset$.

(d) Si $0 \notin W$ ó $1 \notin W$, resulta que $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

Luego, como $Cl(V) = \mathbb{Z}^+$, $Int(Cl(V)) = \mathbf{Z}^+$ y $f^{-1}\big(Int(Cl(V))\big) = \{x \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} : f(x) \in \mathbb{Z}^+\}$, se tiene que $Int\big(f^{-1}\big(Int(Cl(V))\big)\big) = Int(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$. Por lo que, para cualquier valor de $f^{-1}(V)$, resulta que $f^{-1}(V) \subseteq Int\big(f^{-1}\big(Int(Cl(V))\big)\big)$ y, esto significa, según la Definición 2.1.4, que f es *almost* continua.

Por otro lado, para $V = \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ abierto en $\mathbf{Z}^+$, se tiene que $f^{-1}(V) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$ no es abierto con la topología complemento contable, de donde resulta que f no es continua.

El siguiente ejemplo exhibe una función que es *weak almost* continua y *very weakly* continua, pero no continua.

Ejemplo 2.1.5. Considere el conjunto $X=\{a,b,c\}$, la topología $\tau=\{\emptyset,\{a\},X\}$ sobre X, y la función $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} c & si \quad x\in\{a,c\} \\ a & si \quad x=b \end{cases}.$$

Sea V un abierto en X y considere los siguientes casos:

(a) Si $V=\{a\}$, entonces $Ker(Cl(V))=X$, por lo cual $Int\big(Ker(Cl(V))\big)=X$, de modo que $Int\big(f^{-1}\big(Ker(Cl(V))\big)\big)=X$ y $Int\big(f^{-1}\big(Int\big(Ker(Cl(V))\big)\big)\big)=X$. Además, como $f^{-1}(V)=\{b\}$, se verifica que $f^{-1}(V)\subset Int\big(f^{-1}\big(Int\big(Ker(Cl(V))\big)\big)\big)$ y $f^{-1}(V)\subset Int\big(f^{-1}\big(Ker(Cl(V))\big)\big)$.

(b) Si $V=\emptyset$ ó $V=X$, entonces trivialmente $f^{-1}(V)\subset Int\big(f^{-1}\big(Int\big(Ker(Cl(V))\big)\big)\big)$ y $f^{-1}(V)\subset Int\big(f^{-1}\big(Ker(Cl(V))\big)\big)$.

Así, en cualquiera de los dos casos, según la Definición 2.1.1 (vi) y (vii), se concluye que f es *weak almost* continua y *very weakly* continua.

Por otro lado, si se considera el abierto $V=\{a\}$, entonces $f^{-1}(V)=\{b\}$, pero $\{b\}$ no es abierto en X, de modo que f no es continua.

Hasta el momento sólo se ha estudiado la relación entre las formas débiles de continuidad y el concepto clásico de continuidad. A continuación, se establece la relación existente entre las distintas formas de continuidad que se han presentado.

Teorema 2.1.2. Si $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función *almost* continua, entonces *f* es *weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que *f* es *almost* continua, entonces $f^{-1}(V)\subset Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)$ y, como $f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\subset f^{-1}\left(Cl(V)\right)$, se sigue que $Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)\subset Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$. Por lo que, $f^{-1}(V)\subset Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$. Y así, por la Definición 2.1.1 (iii), se concluye que *f* es *weakly* continua. ■

El recíproco del teorema anterior no es cierto, es decir, existen funciones *weakly* continuas, pero no *almost* continuas, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.6. Considere los conjuntos $X=\{x,y,z,w\}$ con la topología $\tau=\{\emptyset,\{x,y,z\},\{z\},\{z,w\},X\}$ y $Y=\{a,b,c,d\}$ con la topología $\varphi=\{\emptyset,\{a,b\},\{d\},\{b,d\},\{b\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},Y\}$ y la función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ definida por

$$f(t)=\begin{cases} a & si \quad t=x \\ b & si \quad t=y \\ c & si \quad t=z \\ d & si \quad t=w. \end{cases}$$

Sean V un abierto en Y y $\emptyset, Y, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$ y $\{a\}$ los subconjuntos cerrados de Y, entonces

(a) Si $V=\{a,b\}$ ó $V=\{b\}$, entonces $Cl(V)=\{a,b,c\}$ y $Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)=\{x,y,z\}$ y, además, $f^{-1}(V)=\{x,y\}$ para $V=\{a,b\}$ y $f^{-1}(V)=\{y\}$ para $V=\{b\}$.

(b) Si $V=\{d\}$, entonces $f^{-1}(V)=\{w\}$, $Cl(V)=\{c,d\}$ y $Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)=\{z,w\}$.

(c) Si $V=\{b,d\}$ ó $V=\{a,b,d\}$ ó $V=\{b,c,d\}$, se tiene que $Int(f^{-1}(Cl(V)))=X$ y ,además, $f^{-1}(V)=\{y,w\}$ para $V=\{b,d\}$, $f^{-1}(V)=\{x,y,w\}$ para $V=\{a,b,d\}$ y $f^{-1}(V)=\{y,z,w\}$ para $V=\{b,c,d\}$.

Por lo que, $f^{-1}(V)\subset Int\, f^{-1}(Cl\,(V))$ en cualquiera de los casos anteriores, inclu- yendo los casos en que $V=Y$ ó $V=\emptyset$, para los cuales se verifica trivialmente. Y así, en virtud de la Definición 2.1.1 (iii), se deduce que f es *weakly* continua.

Por otro lado, puesto que $f^{-1}(V)=\{w\}$, $Cl(V)=\{c,d\}$, $Int(Cl(V))=\{d\}$, $f^{-1}\left(Int\,(Cl(V))\right)=\{w\}$ y, además, $Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)=\emptyset$, para $V=\{d\}$ abierto en Y, se tiene que $f^{-1}(V)\not\subset Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)$, lo cual significa según la Definición 2.1.1 (iv) que, f no es *almost* continua.

Teorema 2.1.3. Si $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función *weakly* continua, entonces *f* es *almost weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que *f* es *weakly* continua, entonces $f^{-1}(V)\subseteq Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$. Pero, como $f^{-1}(Cl(V))\subseteq Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$, entonces $Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\subseteq Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$. De modo que, $f^{-1}(V)\subseteq Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$. Y así, según la Definición 2.1.1 (ix), se deduce que *f* es *almost weakly* continua. ■

El próximo ejemplo exhibe una función *almost weakly* continua, pero no *weakly* continua.

Ejemplo 2.1.7. Considere las siguientes topologías para el conjunto $X=Y=\{1,2,3\}$, $\tau=\{\varnothing,X\}$ y $\varphi=P(X)$, las cuales corresponden a las topologías indiscreta y discreta respectivamente. Sea $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ la función definida por $f(x)=x$ para cada $x\in X$ y *V* un abierto en *Y*; además, nótese que los subconjuntos cerrados en *Y* son los mismos abiertos; entonces

(a) Si $V=\{x\}$ con $x\in Y$, se tiene que $Cl(V)=\{x\}$, $f^{-1}(V)=f^{-1}(Cl(V))=\{x\}$ y $Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)=Int(Cl(\{x\}))=Int(X)=X$.

(b) Si $V=\{x,y\}$ con $x,y\in Y$, entonces $Cl(V)=\{x,y\}$, $f^{-1}(V)=f^{-1}(Cl(V))=$

$\{x, y\}$ y $Int\big(Cl\big(f^{-1}(Cl(V))\big)\big) = Int(Cl(\{x, y\})) = Int(X) = X$.

Por lo tanto, de cualquiera de los casos anteriores, incluyendo los casos $V = \emptyset$ ó $V = Y$, se deduce que $f^{-1}(V) \subset Int\big(Cl\big(f^{-1}(Cl(V))\big)\big)$. Así, según la Definición 2.1.1 (ix) f es *almost weakly* continua.

Por otra parte, sea $V = \{1\}$ abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) = \{1\}$ y $Int\big(f^{-1}(Cl(V))\big) = Int(\{1\}) = \emptyset$, de modo que $f^{-1}(V) \not\subset Int\big(f^{-1}(Cl(V))\big)$, es decir, f no es *weakly* continua, según la Definición 2.1.1 (iii).

Observe que la función f definida en el Ejemplo 2.1.4, es *almost* continua entonces haciendo uso de los Teoremas 2.1.2 y 2.1.3, se obtiene que f es *weakly* continua y *almost weakly* continua. Sin embargo, como se mostró en el Ejemplo 2.1.4 f no es continua. Esta última observación completa la serie de ejemplos que muestran que el recíproco del Teorema 2.1.1 en general no es cierto.

Corolario 2.1.2. Si $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es una función *almost* continua, entonces f es *almost weakly* continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 2.1.1 (ii) y el Teorema 2.1.3. ■

Teorema 2.1.4. Si $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es una función *weak almost* continua, entonces f es *very weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es *weak almost* continua, entonces $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl(V))\right)\right)\right)$. Luego, como $f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl(V))\right)\right) \subset f^{-1}\left(Ker(Cl(V))\right)$, se tiene que $Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl(V))\right)\right)\right) \subset Int\left(f^{-1}\left(Ker(Cl(V))\right)\right)$. De manera que, $f^{-1}(V) \subset Int(f^{-1}(Ker\,Cl(V)))$. Y así, en virtud de la definición 2.1.1 (vii), se concluye que f es *very weakly* continua. ■

Teorema 2.1.5. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función *densely approached*, entonces f es *almost weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y, como f es *densely approached*, se tiene que $f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$ y, como $Cl(f^{-1}(V)) \subset Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$, entonces $Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$; así, $f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$. Por lo tanto, según la Definición 2.1.1 (ix), resulta que f es *almost weakly* continua. ■

La aplicación f definida en el Ejemplo 2.1.4 es *almost* continua y por el Corolario 2.1.2, se obtiene que f es *almost weakly* continua. Sin embargo, f no es *densely approached*, pues si se considera el abierto $V = \mathbf{Z}^{+}, \{1\}$ en $\mathbf{Z}^{+}$, entonces $f^{-1}(V)=\square \not\subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)=\varnothing$. Este último comentario indica que el recíproco del teorema anterior no es cierto.

Teorema 2.1.6. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función irresoluta, entonces f es *quasi*-continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata del hecho que todo conjunto abierto es semi-abierto, la Definición 2.1.1 (v) y la Definición 2.1.1 (ii). ■

El Ejemplo 2.1.1 muestra una función continua pero no irresoluta, como toda función continua es *quasi*-continua, según Teorema 2.1.1 (ii), entonces el Ejemplo 2.1.1 también muestra la existencia de funciones *quasi*-continuas que no son irresolutas. Este comentario evidencia que el recíproco del Teorema 2.1.6 no es cierto.

Todas las relaciones estudiadas entre las formas débiles de continuidad mencionadas pueden resumirse a través del diagrama dado en la figura 1.

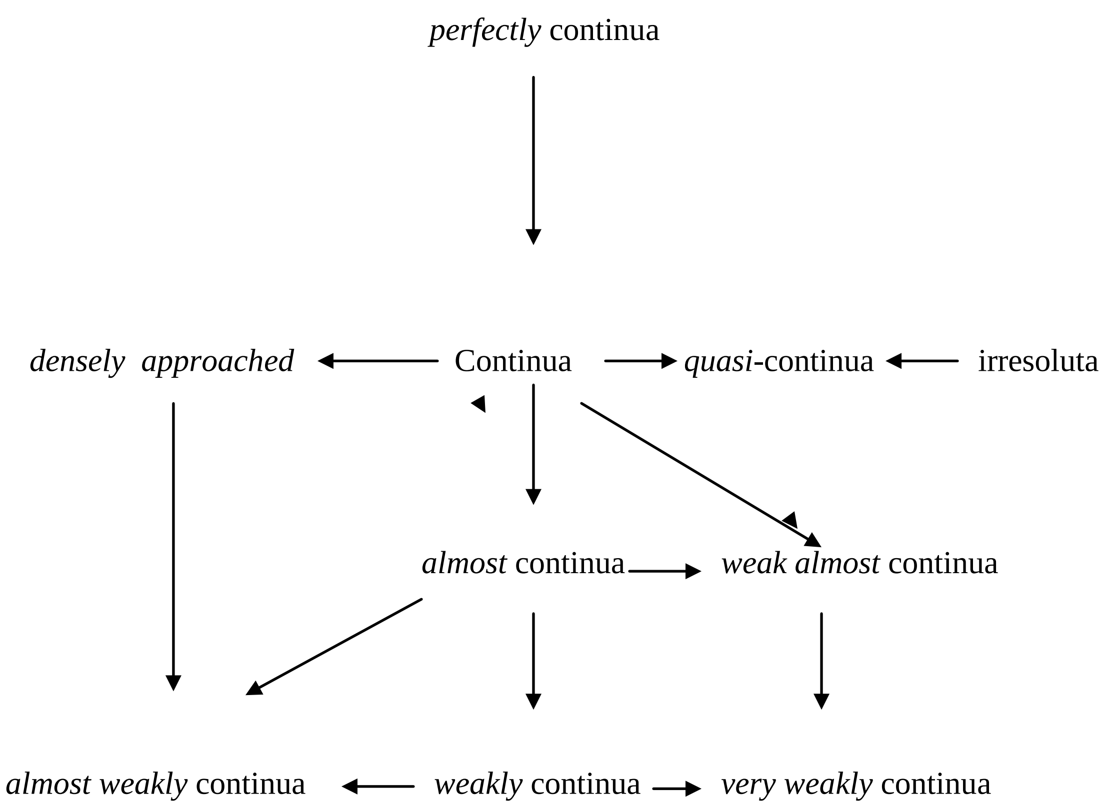

Figura 1. Relación entre las formas débiles de continuidad

Como se ha visto mediante los teoremas y ejemplos hasta ahora presentados, las implicaciones entre las formas débiles de continuidad sugeridas en el diagrama anterior no son recíprocas, los recíprocos de los Teoremas 2.1.2, 2.1.4 y 2.1.5 en general, no se satisfacen, sin embargo, si se exige que la función sea una función abierta obtenemos ciertas equivalencias.

Teorema 2.1.7. Si $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función *weakly* continua y abierta, entonces *f* es *almost* continua.

Demostración: Sea *V* un abierto en Y; como *f* es *weakly* continua, entonces $f^{-1}(V)\subseteq Int\big(f^{-1}(Cl(V))\big)$ y como *f* es abierta, entonces según el Teorema 1.1.10 (i) $Int\big(f^{-1}(Cl(V))\big)\subseteq f^{-1}\big(Int(Cl(V))\big)$; por tanto, $Int\big(f^{-1}(Cl(V))\big)\subseteq Int\big(f^{-1}\big(Int(Cl(V))\big)\big)$. Así, $f^{-1}(V)\subseteq Int\big(f^{-1}\big(Int(Cl(V))\big)\big)$. Por consiguiente, en virtud de la Definición 2.1.1 (iv), se concluye que *f* es *almost* continua. ■

Teorema 2.1.8. Si $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función *very weakly* continua y abierta, entonces *f* es *weak almost* continua.

Demostración: Sea *V* un abierto en Y; como *f* es *very weakly* continua, se tiene que $f^{-1}(V)\subseteq Int\big(f^{-1}\big(Ker(Cl(V))\big)\big)$ y, como *f* es abierta, entonces por el Teorema 1.1.10(i) $Int\big(f^{-1}\big(Ker(Cl(V))\big)\big)\subseteq f^{-1}\big(Int\big(Ker(Cl(V))\big)\big)$, de modo que $Int\big(f^{-1}\big(Ker(Cl(V))\big)\big)\subseteq Int\big(f^{-1}\big(Int\big(Ker(Cl(V))\big)\big)\big)$. Por lo tanto,

$f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker(Cl(V))\right)\right)\right)$, lo cual significa según la Definición 2.1.1 (vi) que f es *weak almost* continua. ■

Teorema 2.1.9. Si $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función *almost weakly* continua y abierta, entonces *f* es *densely approached*.

Demostración: Sea V un abierto en Y, como f es *almost weakly* continua, entonces $f^{-1}(V)\subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$, y a su vez, como f es abierta, resulta que $f^{-1}(Cl(V)) \subset Cl(f^{-1}(V))$, por el Teorema 1.1.10 (ii); lo cual implica que $Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right) \subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$. Por lo tanto, $f^{-1}(V)\subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$, y esto significa que *f* es *densely approached* . ■

A continuación, se introducen los conceptos de algunas formas débiles de continuidad que satisfacen una propiedad determinada (P).

Definición 2.1.10. Sea $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ una función, se dice que

(i) *f* es C-continua si para cada abierto V en Y, tal que $Y\setminus V$ es compacto, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(ii) *f* es C^*-continua si para cada abierto V en Y, tal que $Y\setminus V$ es numerablemente compacto, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(iii) *f* es L-continua si para cada abierto V en Y, tal que $Y\setminus V$ es Lindelöff, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(iv) f es N-continua si para cada abierto V en Y, tal que $Y \setminus V$ es *nearly* compacto, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(v) f es H-continua si para cada abierto V en Y, tal que $Y \setminus V$ es *almost* compacto, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Observe que si f es una función continua, entonces f es C-continua, C^*-continua, L- continua, N- continua y H-continua. La relación existente entre este tipo de funciones se muestra en los siguientes teoremas.

Teorema 2.1.10. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función C^*-continua, entonces f es C-continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y, tal que $Y \setminus V$ es compacto, entonces $Y \setminus V$ es contablemente compacto, por el Teorema 1.1.12 (i) y, como f es C^*-continua, de acuerdo con la Definición 2.1.10 (ii), se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en X. Por lo tanto, según la Definición 2.1.10 (i), resulta que f es C-continua ■

Teorema 2.1.11. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función L-continua, entonces f es C-continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y, tal que $Y \setminus V$ es compacto, entonces $Y \setminus V$ es Lindelöff, por el Teorema 1.1.12 (ii) y, como f es L-continua, según la

Definición 2.1.10 (iii), se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en *X*. En consecuencia, por la Definición 2.1.10 (i), se deduce que *f* es C-continua. ■

Teorema 2.1.12. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función N-continua, entonces f es C-continua.

Demostración: Sea *V* un abierto en Y, con $Y\setminus V$ compacto, entonces $Y\setminus V$ es *nearly* compacto, por el Teorema 1.1.12 (iv). Luego, como *f* es N-continua, de acuerdo con la Definición 2.1.10 (iv), se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en *X*. Por lo tanto, según la Definición 2.1.10 (i), se obtiene que *f* es C-continua ■

Teorema 2.1.13. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función H-continua, entonces f es C-continua.

Demostración: Sea *V* un abierto en Y, con $Y\setminus V$ compacto, entonces $Y\setminus V$ es almost compacto, por el Teorema 1.1.12 (iii). Luego, como *f* es H-continua, resulta que $f^{-1}(V)$ es abierto en *X*, por la Definición 2.1.10 (v). Y así, de acuerdo con la Definición 2.1.10 (i), se concluye que *f* es C-continua. ■

Teorema 2.1.14. Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función H-continua, entonces f es N-continua.

Demostración: Sea *V* un abierto en Y, $Y\setminus V$ *nearly* compacto, entonces $Y\setminus V$ es *almost* compacto. Luego, como *f* es H-continua, se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en *X*, por la Definición 2.1.10 (v). Por lo tanto, según la Definición 2.1.10 (iv), se concluye que f es N-continua. ■

A continuación, se presenta, en la Figura 2, un diagrama que relaciona las formas débiles de continuidad que satisfacen una propiedad determinada (P).

$$
\begin{tikzcd}
C^{*}\text{- continua} \arrow[drr] & L\text{- continua} \arrow[dr] & & N\text{- continua} \arrow[dl] & H\text{- continua} \arrow[l] \arrow[dll] \\
& & C\text{- continua} & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2. Formas débiles de continuidad que satisfacen una propiedad (P).

La siguiente definición unifica las formas débiles de continuidad que satisfacen una propiedad determinada (P).

Definición 2.1.11. Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ se dice P-continua si para cada abierto V en Y que satisface la condición P, se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

2.2 Algunas Propiedades De Las Formas Débiles De Continuidad.

Es un resultado clásico que si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función continua y K es un subconjunto compacto de X, entonces la imagen de K mediante *f*, $f(K)$, es un subconjunto compacto de Y. Tal propiedad es ampliamente utilizada en las matemáticas, sólo por nombrar un ejemplo, esta propiedad se utiliza en la prueba del Teorema de los Valores Extremos. Por tal motivo es interesante estudiar si las formas débiles de continuidad satisfacen propiedades, sino bien iguales, parecidas. Dicho estudio se realiza en la presente sección.

Teorema 2.2.1. Sean $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función *weakly* continua y K un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es un subconjunto *almost* compacto de Y.

Demostración: Sean $\mathcal{V}$ un cubrimiento abierto de $f(K)$ y $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : V \cap f(K) \neq \emptyset\}$, entonces para cada $k \in K$, existe $V_k \in \mathcal{V}'$ tal que $f(k) \in V_k$. Luego, como f es una función *weakly* continua, se tiene que para cada abierto V en Y, se cumple que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$, en particular, para cada abierto V_k, $f^{-1}(V_k) \subset Int\left(f^{-1}(Cl(V_k))\right)$; pero, como $f(k) \in V_k$ y $W_k = Int\left(f^{-1}(Cl(V_k))\right)$ es un abierto en X, entonces se ha conseguido un abierto W_k para cada $k \in K$ tal que $k \in W_k$ y $f(W_k) = f\left(Int\left(f^{-1}(Cl(V_k))\right)\right) \subset f\left(f^{-1}(Cl(V_k))\right) \subset Cl(V_k)$, es decir, para cada $k \in K$, $f(k) \in W_k$ y $f(W_k) \subset Cl(V_k)$. (1)

Ahora bien, como $K = \bigcup_{k\in K}\{k\} \subset \bigcup_{k \in K} W_k$, la colección $\{W_k\}_{k\in K}$ es un cubrimiento abierto de K, y como K es compacto, entonces existe una subcolección finita de $\{W_k\}_{k\in K}$ que cubre a K, es decir, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{k_i}$; de modo que $f(K) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{k_i})$ y, como $\bigcup_{i=1}^{n} f(W_{k_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Cl(V_{k_i})$, por (1), resulta que $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} Cl(V_{k_i})$. Y así, en virtud de la Definición 1.1.19 (ii), $f(K)$ es *almost* compacto. ■

Teorema 2.2.2. Sean $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función *almost* continua y K un subconjunto compacto de X, entonces $f(K)$ es un subconjunto *nearly* compacto de Y.

Demostración: Sean $\mathcal{V}$ un cubrimiento abierto de $f(K)$ y $\mathcal{V}'=\{V\in\mathcal{V}:V\cap f(K)\neq\varnothing\}$, entonces para cada $k\in K$ existe $V_k\in\mathcal{V}'$ tal que $f(k)\in V_k$. Luego, como f es una función *almost* continua, se tiene que para cada abierto V en Y, se satisface que $f^{-1}(V)\subseteq Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)$, en particular, para cada abierto V_k, $f^{-1}(V_k)\subseteq Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V_k))\right)\right)$; pero, como $f(k)\in V_k$ y $W_k=Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V_k))\right)\right)$ es un abierto en X, entonces se ha conseguido un abierto W_k para cada $k\in K$ tal que $k\in W_k$ y $f(W_k)=f\left(Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V_k))\right)\right)\right)\subseteq f\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V_k))\right)\right)\subseteq Int(Cl(V_k))$, es decir, para cada $k\in K$,

$$f(k)\in W_k \text{ y } f(W_k)\subseteq Int(Cl(V_k)). \qquad (1).$$

Ahora, como $K=\bigcup_{k\in K}\{k\}\subseteq\bigcup_{k\in K}W_k$, la colección $\{W_k\}_{k\in K}$ es un cubrimiento abierto de K, y como K es compacto, entonces existe una subcolección finita de $\{W_k\}_{k\in K}$ que cubre a K, es decir, $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}W_{k_i}$, de modo que, $f(K)\subseteq f(\bigcup_{i=1}^{n}W_{k_i})$ y, como $\bigcup_{i=1}^{n}f(W_{k_i})\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}Int(Cl(V_{k_i}))$, por (1), se tiene que $f(K)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}Int(Cl(V_{k_i}))$. Por lo tanto, según la Definición 1.1.19 (iii), se concluye f es *nearly* compacto. ∎

Teorema 2.2.3. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función *weakly* continua .Si Y es un espacio de Hausdorff, entonces las preimagenes de los conjuntos unitarios de Y son conjuntos cerrados.

Demostración: Sea $q\in Y$, entonces para mostrar que $f^{-1}(\{q\})$ es cerrado en X se prueba que su complemento $A=\{x\in X: f(x)\neq q\}$ es abierto en X. Si $A=X$ ó $A=\emptyset$, entonces es inmediato que A es abierto en X. Ahora, si $A\neq\emptyset$ y $x\in A$, se tiene que $f(x)\neq q$; pero, como Y es un espacio de Hausdorff, se tiene que existen abiertos V y V' en Y tales que $f(x)\in V$, $q\in V'$ y $V\cap V'=\emptyset$. Más aún, se verifica que $q\notin Cl(V)$. Por otra parte, como f es *weakly* continua, entonces para cada abierto V en Y se cumple que $f^{-1}(V)\subset Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$; luego, como $f(x)\in V$ y $U=Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)$ es abierto en X, resulta que se ha conseguido un abierto U que contiene a x. Por consiguiente, sólo resta verificar que $U\subset A$ o equivalentemente que $U\cap(X\setminus A)=\emptyset$. Para probar esto suponga que $U\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$, entonces existe $x'\in U$ y $x'\in X\setminus A$; por lo que, $f(x')\in f(U)$ y $f(x')=q$, pero $f(U)\subset Cl(V)$, ya que $f(U)=f\left(Int\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)\subset f\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\subset Cl(V)$, por tanto $q\in Cl(V)$, lo cual es una contradicción ya que $q\notin Cl(V)$. Así, existe un abierto U tal que $x\in A$ y $U\subset A$, lo cual significa que A es un abierto en X. ■

CAPÍTULO III

GENERALIZACIÓN DE LAS FORMAS DÉBILES DE CONTINUIDADVÍA OPERADORES E IDEALES

Desde hace algún tiempo se han utilizado conceptos algebraicos para generalizar algunas nociones topológicas clásicas, tal es el caso de operadores asociados a una topología o de ideales topológicos definidos en el Capítulo 1.

En el 2004, Vielma y Rosas, utilizan estas nociones para introducir una nueva clase de funciones, las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas. Este tipo de funciones abarca y generaliza todos los conceptos de continuidad débil estudiados en el capítulo anterior y sus propiedades.

En este capítulo, se estudian y se desarrollan con detalle los conceptos y resultados obtenidos en el trabajo antes mencionado.

3.1 Funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)$ Continuas

Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos, α y β operadores asociados a la topología τ, θ y δ operadores asociados a la topología φ e *I* un ideal topológico sobre *X*. En esta sección, se introduce el concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua, su relación con la noción de función continua y las formas débiles de continuidad, incluyendo las que satisfacen cierta propiedad P**,** introducidas en el Capítulo 2. Además, se dan ciertos resultados sobre las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas, cuando se hace uso del operador intersección, operadores mutuamente duales y un operador monótono.

Definición 3.1.1. Una función $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ se dice $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua si para cada abierto V en Y, se tiene que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I$.

El siguiente teorema muestra que la clase de las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas es no vacía.

Teorema 3.1.1. Si $\delta\prec\theta, \alpha(\emptyset)=\emptyset$ y $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función definida por $f(x)=y_0$ para todo $x\in X$, entonces f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua.

Demostración: Suponga que $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función constante, es decir $f(x)=y_0$ para todo $x\in X$, $\delta\prec\theta,\ \alpha(\emptyset)=\emptyset.$ Sea V un conjunto abierto en Y y considere los siguientes casos

Caso I: $y_0\in V.$

En este caso, como $f(x)=y_0$, para todo $x\in X$ y $y_0\in V$, se tiene que $x\in f^{-1}(V)$ para todo $x\in X$, es decir, $X\subset f^{-1}(V)$ y como $f^{-1}(V)\subset X$ se obtiene que $f^{-1}(V)=X$.

Luego, como δ y θ son operadores asociados a la topología φ, se tiene que $V\subset\delta(V)$ y $V\subset\theta(V)$, lo cual implica que $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(\delta(V))$ y $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(\theta(V))$. Pero, como $f^{-1}(V)=X$, $f^{-1}(\delta(V))\subset X$ y $f^{-1}(\theta(V))\subset X$, se obtiene que $f^{-1}(\delta(V))=X$ y $f^{-1}(\theta(V))=X$, de modo que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))=\alpha(X)$ y

$\beta(f^{-1}(\theta(V))) = \beta(X)$.

Por otro lado, $\alpha(X) = X$ y $\beta(X) = X$, puesto que α y β son operadores asociados a la topología τ, por tanto, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) = X$ y $\beta(f^{-1}(\theta(V))) = X$. En consecuencia, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) = X \setminus X = \varnothing$ y como $\varnothing \in I$, resulta que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in I$. Y así, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua.

Caso II: $y_0 \notin V$, pero $y_0 \in \delta(V)$ y $y_0 \in \theta(V)$.

En este caso, como $y_0 \in \delta(V)$, $y_0 \in \theta(V)$ y $f(x) = y_0$, para todo $x \in X$, se tiene que $X \subset f^{-1}(\delta(V))$ y $X \subset f^{-1}(\theta(V))$. Luego, como $f^{-1}(\delta(V)) \subset X$ y $f^{-1}(\theta(V)) \subset X$, se obtiene que $f^{-1}(\delta(V)) = X$ y $f^{-1}(\theta(V)) = X$, lo cual implica que $\alpha(X) = \alpha(f^{-1}(\delta(V)))$ y $\beta(X) = \beta(f^{-1}(\theta(V)))$, pero $\alpha(X) = X$ y $\beta(X) = X$; así, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) = X$ y $\beta(f^{-1}(\theta(V))) = X$. Por tanto, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) = \varnothing$ y como $\varnothing \in I$, se deduce que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in I$. En consecuencia, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua.

Caso III: $y_0 \notin \theta(V)$.

En este caso, como $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$ y $y_0 \notin \theta(V)$, se tiene que $f^{-1}(\theta(V)) = \varnothing$. Como $\delta \prec \theta$, entonces $\delta(V) \subset \theta(V)$ y en consecuencia $y_0 \notin \delta(V)$, así $f^{-1}(\delta(V)) = \varnothing$.

Ahora bien, como $f^{-1}(\theta(V)) = f^{-1}(\delta(V)) = \varnothing$, se tiene que $\beta(f^{-1}(\theta(V))) = \beta(\varnothing)$ y $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) = \alpha(\varnothing)$, así, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) = \varnothing;$ pues $\alpha(\varnothing) = \varnothing$, de donde $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in I$. Por lo tanto, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua.

Caso IV: $y_0 \notin \delta(V)$ y $y_0 \in \theta(V)$.

En este caso, como $y_0 \notin \delta(V)$ y $\alpha(\varnothing) = \varnothing$, se tiene que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) = \alpha(\varnothing)$. Luego, como $y_0 \in \theta(V)$ y $\beta(X) = X$, se sigue que $\beta(f^{-1}(\theta(V))) = X$. Así, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) = \varnothing.$ Por lo tanto, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta(V))) \in I,$ lo cual significa que *f* es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua. ■

El siguiente teorema muestra que para ciertos operadores e ideales determinados, las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas, generalizan todas las formas débiles de continuidad vistas hasta ahora, junto con la noción de función continua y además también muestra que tales funciones coinciden con algunas de estas formas débiles de continuidad.

Teorema 3.1.2. Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ una función, entonces

(i) *f* es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua si y sólo si *f* es continua.

(ii) *f* es $(Id, Int\,Cl, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua si y sólo si *f* es *densely approached*.

(iii) Si f es *quasi*-continua, entonces f es $(Id, Cl\,Int, Id, Id, I_N)-$ continua.

(iv) f es $(Id, Int, Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es *weakly* continua.

(v) f es $(Id, Int, Int\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es *almost* continua.

(vi) Si f es irresoluta, entonces f es $(Id, Cl\,Int, Id, Id, I_N)-$ continua.

(vii) f es $(Id, Int, Int\,Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es *weak almost* continua.

(viii) f es $(Id, Int, Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es *very weakly* continua.

(ix) f es $(Cl, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es *perfectly* continua.

(x) f es $(Id, Int\,Cl, Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es *almost weakly* continua.

(xi) f es $(\alpha, Int, \theta, Id, \{\varnothing\})-$ continua si y sólo si f es $(\alpha, \theta)-$ *weakly* continua.

Demostración:

(i) Suponga que $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$ continua y sea

V un abierto en Y, entonces $Id(f^{-1}(Id(V)))\setminus Int(f^{-1}(Id(V)))\in\{\varnothing\}$. Por lo que, $f^{-1}(V)\subset Int(f^{-1}(V))$ y como $Int(f^{-1}(V))\subset f^{-1}(V)$, se obtiene que $Int(f^{-1}(V))=f^{-1}(V)$. Así, $f^{-1}(V)$ es abierto en X y, en consecuencia, f es continua.

Recíprocamente, suponga que f es continua, y sea V un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en X, es decir, $f^{-1}(V)=Int(f^{-1}(V))$. De donde, $f^{-1}(V)\subset Int(f^{-1}(V))$, lo cual implica que $Id(f^{-1}(Id(V)))\setminus Int(f^{-1}(Id(V)))\in\{\varnothing\}$. Por lo tanto, f es $(Id, Int, Id, Id,\{\varnothing\})-$continua.

(ii) Sea V un abierto en Y y suponga que f es $(Id, Int\,Cl, Id, Id,\{\varnothing\})-$continua, entonces $f^{-1}(V)\setminus Int\,Cl(f^{-1}(V))\in\{\varnothing\}$ y, por tanto $f^{-1}(V)\subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$, lo cual, según la Definición 2.1.1 (i), indica que f es *densely approached*.

Recíprocamente, sea V un abierto en Y y suponga que f es *densely approached*, entonces $f^{-1}(V)\subset Int\left(Cl(f^{-1}(V))\right)$; así $f^{-1}(V)\setminus Int\,Cl(f^{-1}(V))\in\{\varnothing\}$. Por lo tanto, f es $(Id, Int\,Cl, Id, Id,\{\varnothing\})-$continua.

(iii) Sea V un abierto en Y y suponga que f es *quasi*-continua, entonces $f^{-1}(V)$ es semi-abierto, es decir, $f^{-1}(V)\subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)$, lo cual implica que, $f^{-1}(V)\setminus Int(f^{-1}(V))\subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)\setminus Int(f^{-1}(V))$. Ahora bien, como

$Int\left\{Cl\left\{Cl\,(Int(f^{-1}(V)), \quad Int(f^{-1}(V))\right\}\right\} = Int\left\{Cl\left(Int\,(f^{-1}(V))\right)\setminus Int\,(f^{-1}(V))\right\}$ e $Int\left(Cl\left(Int\,(f^{-1}(V))\right)\setminus Int(f^{-1}(V)\right) = \varnothing$, se obtiene que $Cl\left(Int\,(f^{-1}(V))\right)\setminus Int\,(f^{-1}(V)) \in I_N$ y, como $f^{-1}(V)\setminus Cl\left(Int\,(f^{-1}(V))\right) \subset f^{-1}(V)\setminus Int\,(f^{-1}(V)) \subset Cl\left(Int\,(f^{-1}(V))\right)\setminus Int\,(f^{-1}(V))$ e I_N es un ideal, se tiene de la propiedad hereditaria de I_N que $f^{-1}(V)\setminus Cl\,Int\,(f^{-1}(V)) \in I_N$. Por consiguiente, *f* es $(Id, Cl\,Int, Id, Id, I_N)$-continua.

(iv) Suponga que *f* es $(Id, Int, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua y sea *V* un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)\setminus Int\,(f^{-1}(Cl\,(V))) \in \{\varnothing\}$, por lo que $f^{-1}(V) \subset Int(f^{-1}(Cl(V)))$. Y así, por la Definición 2.1.1 (iii), se concluye que *f* es *weakly* continua.

Recíprocamente, suponga que *f* es *weakly* continua y sea *V* un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \subset Int(f^{-1}(Cl(V)))$, de modo que $f^{-1}(V)\setminus Int\,(f^{-1}(Cl(V))) \in \{\varnothing\}$. Por lo tanto, *f* es $(Id, Int, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua.

(v) Suponga que *f* es $(Id, Int, Int\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua y sea *V* un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)\setminus Int\,(f^{-1}(Int\,Cl\,(V))) \in \{\varnothing\}$, lo cual implica que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\,(Cl(V))\right)\right)$. En consecuencia, de acuerdo con la Definición 2.1.1 (iv), se obtiene que *f* es *almost* continua.

Recíprocamente, suponga que *f* es *almost* continua y sea *V* un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int(Cl(V))\right)\right)$, así $f^{-1}(V)\setminus Int(f^{-1}(IntCl(V))) \in \{\varnothing\}$. Por consiguiente, f es $(Id, Int, Int\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua.

(vi) Sea V un abierto en Y, como todo abierto es semi-abierto y f es irresoluta, entonces $f^{-1}(V)$ es semi-abierto en X, es decir, $f^{-1}(V) \subset Cl\left(Int\,(f^{-1}(V))\right)$. Así, por la parte (iii), f es $(Id, Cl\,Int, Id, Id, I_N)-$ continua.

(vii) Suponga que f es $(Id, Int, Int\,Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua y sea V un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \setminus Int\left(f^{-1}(Int\,Ker\,Cl(V))\right) \in \{\varnothing\}$, y esto significa que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker\,(Cl(V))\right)\right)\right)$, de modo que, por la Definición 2.1.1 (vi), f es *weak almost*.

Recíprocamente, suponga que f es *weak almost* continua y sea V un abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Int\left(Ker\,Cl(V)\right)\right)\right)$, lo cual implica que $f^{-1}(V) \setminus Int\,(f^{-1}(Int\,Ker\,Cl\,(V))) \in \{\varnothing\}$. Y así, f es $(Id, Int, Int\,Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})$ -continua.

(viii) Suponga que f es $(Id, Int, Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$ continua y sea V un conjunto abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \setminus Int\left(f^{-1}(Ker\,Cl\,(V))\right) \in \{\varnothing\}$, y esto implica que $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Ker\,(Cl(V))\right)\right)$. Así, en virtud de la Definición 2.1.1 (vii), se tiene que f es *very weakly* continua.

Recíprocamente, suponga que, f es *very weakly* continua y sea V un conjunto abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}\left(Ker(Cl(V))\right)\right)$, lo cual implica que $f^{-1}(V) \setminus Int\left(f^{-1}(Ker\,Cl(V))\right) \in \{\varnothing\}$. Así, *f* es $(Id, Int, Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua.

(ix) Suponga que *f* es $(Cl, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua y sea *V* un conjunto abierto en Y, entonces $Cl(f^{-1}(V)) \setminus Int(f^{-1}(V)) \in \{\varnothing\}$, de modo que $Cl(f^{-1}(V)) \subset Int(f^{-1}(V))$ y como $Int(f^{-1}(V)) \subset Cl(f^{-1}(V))$, se sigue que $Cl(f^{-1}(V)) = Int(f^{-1}(V))$. Ahora bien, puesto que $Int(f^{-1}(V)) \subset f^{-1}(V) \subset Cl(f^{-1}(V))$ y $Cl(f^{-1}(V)) = Int(f^{-1}(V))$, resulta que $Int(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V) = Cl(f^{-1}(V))$, es decir, $f^{-1}(V)$ es abierto y cerrado. Por lo tanto, según la Definición 2.1.1 (viii), *f* es *perfectly* continua.

Recíprocamente, suponga que *f* es *perfectly* continua y sea *V* un conjunto abierto en Y, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto y cerrado, es decir, $Int(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ y $Cl(f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$. Por lo que, $Cl(f^{-1}(V)) \subset Int(f^{-1}(V))$, lo cual implica que $Cl(f^{-1}(V)) \setminus Int(f^{-1}(V)) \in \{\varnothing\}$. Y así, *f* es $(Cl, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua.

(x) Suponga que *f* es $(Id, Int\,Cl, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua y sea *V* un abierto en *Y*, entonces $f^{-1}(V) \setminus Int\,Cl(f^{-1}(Cl(V))) \in \{\varnothing\}$, lo cual implica que $f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$. Por tanto, de acuerdo con la Definición 2.1.1 (ix), se tiene que *f* es *almost weakly* continua.

Recíprocamente, suponga que *f* es *almost weakly* continua y sea *V* un conjunto abierto en Y, entonces $f^{-1}(V) \subset Int\left(Cl\left(f^{-1}(Cl(V))\right)\right)$, de modo que $f^{-1}(V) \setminus Int\,Cl(f^{-1}(Cl(V))) \in \{\varnothing\}$. Y así, f es $(Id, Int\,Cl, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua.

(xi) Suponga que f es $(\alpha, Int, \theta, Id, \{\varnothing\})-$continua y sea V un conjunto abierto en Y, entonces $\alpha(f^{-1}(V)) \setminus Int(f^{-1}(\theta(V))) \in \{\varnothing\}$, lo cual implica que $\alpha(f^{-1}(V)) \subset Int(f^{-1}(\theta(V)))$. En consecuencia, por la Definición 1.2.8, f es (α, θ)-*weakly* continua.

Recíprocamente, suponga que f es (α, θ)-*weakly* continua y sea V un conjunto abierto en Y, entonces $\alpha(f^{-1}(V)) \subset Int(f^{-1}(\theta(V)))$, de modo que $\alpha(f^{-1}(V)) \setminus Int(f^{-1}(\theta(V))) \in \{\varnothing\}$. Por lo tanto, f es $(\alpha, Int, \theta, Id, \{\varnothing\})$-continua. ■

El siguiente ejemplo muestra que una función es $(Id, Cl\,Int, Id, Id, I_N)$-continua, pero no es *quasi*-continua.

Ejemplo 3.1.1. Considere el siguiente conjunto $X = \{a, b, c\}$ con la topología $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}, \{b\}, \{b,c\}\}$ y $f:(X,\tau) \to (X,\tau)$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} b & si \;\; x = c \\ c & si \;\; x = b \\ a & si \;\; x = a. \end{cases}$$

Sean V un abierto en Y y $\varnothing, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$ y $\{a\}$ los subconjuntos cerrados de X, entonces

(a) Si $V=\{a\}$, se tiene que $f^{-1}(V)=\{a\}$, por tanto $f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)=\varnothing$, así $Int\left[Cl\big(f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)\big)\right]=\varnothing$.

(b) Si $V=\{b\}$, entonces $f^{-1}(V)=\{c\}$ y $f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)=\{c\}$, de modo que $Int\left[Cl\big(f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)\big)\right]=Int\left[Cl\big(\{c\}\big)\right]=\varnothing$.

(c) Si $V=\{b,c\}$, se tiene que $f^{-1}\big(V\big)=\{b,c\}$; así, $f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)=\varnothing$, luego $Int\left[Cl\big(f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)\big)\right]=\varnothing$.

(d) Si $V=\{a,b\}$, entonces $f^{-1}(V)=\{a,c\}$, por lo que, $f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)=\{a,c\}\setminus\{a\}=\{c\}$, por tanto $Int\left[Cl\big(f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)\big)\right]=Int\left[Cl(\{c\})\right]=\varnothing$. Es claro que si $V=\varnothing$ ó $V=X$, entonces $Int\left[Cl\big(f^{-1}(V)\setminus Cl\big(Int(f^{-1}(V))\big)\big)\right]=\varnothing$.

Así, en cualquiera de estos casos se cumple que $f^{-1}(V)\setminus Cl\,Int(f^{-1}(V))\in I_N$, es decir, f es $(Id, Cl\,Int, Id, Id, I_N)-$ continua.

Para mostrar que f no es *quasi*-continua es suficiente considerar el abierto $V=\{b\}$ y observar que $f^{-1}(V)=\{c\}$ y $Cl(Int(f^{-1}(V)))=\varnothing$, por lo que $f^{-1}(V)\not\subset Cl(Int(f^{-1}(V)))$.

Observe que, el Ejemplo 3.1.1, también sirve para mostrar que f no es irresoluta, puesto que f no es *quasi*-continua.

El concepto de funciones continuas que satisfacen una propiedad P también puede ser generalizado, a través de la definición de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua para ciertos operadores, en particular, uno de ellos se define como sigue.

Definición 3.1.2. Sea (Y,φ) un espacio topológico, se define el operador $\Theta_P : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(Y)$ asociado a la topología φ por

$$\Theta_P(A) = \begin{cases} A, \text{ si A es abierto y satisface la propiedad P} \\ Y, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Teorema 3.1.3. Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es P-continua si y sólo si f es $(Id, Int, \Theta_P, Id, \{\varnothing\})-$continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es P-continua, entonces para mostrar que f es $(Id, Int, \Theta_P, Id, \{\varnothing\})-$continua, se deben considerar los siguientes casos.

Caso I: Si V satisface la propiedad P, se tiene que $\Theta_P(V)=V$ y $f^{-1}(V)$ es abierto en X, por lo que $f^{-1}(V)\subset Int(f^{-1}(\Theta_P(V)))$, y esto implica que $f^{-1}(V)\setminus Int(f^{-1}(\Theta_P(V)))\in\{\varnothing\}$.

En consecuencia, f es $(Id, Int, \Theta_P, Id, \{\varnothing\})-$continua.

Caso II: Si V no satisface la propiedad P, se tiene que $\Theta_P(V)=Y$. Pero, como $f^{-1}(Y)=X$, entonces $f^{-1}(V) \subset X = Int(X) = Int(f^{-1}(Y)) = Int(f^{-1}(\Theta_P(Y)))$; por lo que, $f^{-1}(V) \setminus Int\left(f^{-1}(\Theta_P(V))\right) \in \{\varnothing\}$. Por lo tanto, f es $(Id, Int, \Theta_P, Id, \{\varnothing\})-$continua.

Recíprocamente, sea V un abierto en Y que satisface la propiedad P y suponga que f es $(Id, Int, \Theta_P, Id, \{\varnothing\})-$continua, entonces $\Theta_P(V)=V$ y, además, $f^{-1}(V) \setminus Int\left(f^{-1}(\Theta_P(V))\right) \in \{\varnothing\}$, por lo que $f^{-1}(V) \subset Int\, f^{-1}(\Theta_P(V))$. Por tanto, $f^{-1}(V) \subset Int(f^{-1}(V))$, es decir, $f^{-1}(V)$ es abierto. En consecuencia, f es P-continua. ■

Observe que si $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es una función C-continua con la propiedad C de que cada abierto V en Y tiene complemento compacto, entonces f es $(Id, Int, \Theta_C, Id, \{\varnothing\})$-continua. De igual forma, si f es L continua con la propiedad L de que cada abierto V en Y tiene complemento Lindelöff, entonces f es $(Id, Int, \Theta_L, Id, \{\varnothing\})$-continua.

3.2 Propiedades De Las Funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)$ Continuas

En esta sección, se presentan algunas propiedades de las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas.

Teorema 3.2.1. Si $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ y $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es una función, entonces f es $(\alpha, \beta, \theta \wedge \theta^*, \delta, I)-$continua si y sólo si f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$ continua y $(\alpha,\beta,\theta^*,\delta,I)-$ continua.

Demostración: Suponga que f es $(\alpha,\beta,\theta\wedge\theta^*,\delta,I)-$ continua y sea V un abierto en $Y,$ entonces

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}\left((\theta\wedge\theta^*)(V)\right)\right)\in I.$$

Pero, por definición

$(\theta\wedge\theta^*)(V)=\theta(V)\cap\theta^*(V)$.

Por tanto,

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}\left(\theta(V)\cap\theta^*(V)\right)\right)\in I,$$

es decir,

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\cap\left\{X\setminus\beta\left[f^{-1}\left(\theta(V)\right)\cap f^{-1}\left(\theta^*(V)\right)\right]\right\}\in I.$$

Pero, por hipótesis

$$\beta\left[f^{-1}\left(\theta(V)\right)\cap f^{-1}\left(\theta^*(V)\right)\right]=\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\cap\beta\left(f^{-1}(\theta^*(V))\right).$$

De modo que,

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\cap\left\{X\setminus\left\{\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\cap\beta\left(f^{-1}(\theta^*(V))\right)\right\}\right\}\in I$$

y esto implica que

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\cap\left\{\left\{X\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\right\}\cup\left\{X\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right\}\right\}\in I.$$

Así,

$$\left\{\left\{\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\right\}\cup\left\{\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right\}\right\}\in I.$$

Luego, como

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\subset\left\{\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\right\}\cup\left\{\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right\}$$

y

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\subset\left\{\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\right\}\cup\left\{\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right\}$$

,

se sigue de la propiedad hereditaria del ideal *I* que

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\in I \text{ y } \alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\in I.$$

En consecuencia, *f* es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua y $(\alpha,\beta,\theta^{*},\delta,I)-$continua.

Recíprocamente, sea V un abierto en Y y suponga que f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)$-continua y $(\alpha,\beta,\theta^{*},\delta,I)-$continua, entonces

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I \text{ y } \alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta^{*}(V)))\in I.$$

De modo que, por la propiedad aditiva del ideal

$$\left\{\left[\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\right]\cup\left[\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right]\right\}\in I.$$

Por tanto,

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\cap\left\{\left[X\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\right]\cup\left[X\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right]\right\}\in I,$$

lo cual implica que

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\cap\left\{X\setminus\left\{\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\cap\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\right\}\right\}\in I.$$

Pero, por hipótesis

$$\beta\left[f^{-1}\left(\theta(V)\right)\cap f^{-1}\left(\theta^{*}(V)\right)\right]=\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)\cap\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right).$$

Así,

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\cap\left\{X\setminus\beta\left[f^{-1}\left(\theta(V)\right)\cap f^{-1}\left(\theta^{*}(V)\right)\right]\right\}\in I,$$

lo cual implica que

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}\left(\theta(V)\cap\theta^{*}(V)\right)\right)\in I.$$

Luego, como

$$(\theta \wedge \theta^*)(V) = \theta(V) \cap \theta^*(V),$$

se tiene que

$$\alpha\left(f^{-1}\left(\delta(V)\right)\right) \setminus \beta\left(f^{-1}\left((\theta \wedge \theta^*)(V)\right)\right) \in I.$$

Por consiguiente, *f* es $(\alpha, \beta, \theta \wedge \theta^*, \delta, I)-$ continua. ■

Los siguientes corolarios caracterizan a las funciones continuas, a través de formas débiles de continuidad y de operadores.

Corolario 3.2.1. Sean q y q^* dos operadores mutuamente duales en Y. Una función $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es continua si y sólo si f es (Id, q)-*weakly* continua e (Id, q^*) *weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que *f* es continua, entonces en virtud del Teorema 3.1.2 (i), se tiene que *f* es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$ continua; pero, como q y q^* son dos operadores mutuamente duales en Y, se tiene que $(\theta \wedge \theta^*)(V) = V$. Por tanto, f es $(Id, Int, \theta \wedge \theta^*, Id, \{\varnothing\})-$ continua y, como $Int(R \cap S) = Int(R) \cap Int(S)$ para todo $R, S \in \mathcal{P}(X)$, entonces por el Teorema 3.2.1 *f* es $(Id, Int, \theta, Id, \{\varnothing\})-$ continua y f es $(Id, Int, \theta^*, Id, \{\varnothing\})-$ continua. Y así, en virtud del Teorema 3.1.2 (xi), se deduce que *f* es (Id, q) *weakly* continua y (Id, q^*)-*weakly* continua.

Recíprocamente, sea V un abierto en Y y suponga que f es (Id,θ) *weakly* continua y (Id,θ^{*})- *weakly* continua, entonces por el Teorema 3.1.2 (xi), se sigue que f es $(Id,Int,\theta,Id,\{\varnothing\})-$ continua y f es $(Id,Int,\theta^{*},Id,\{\varnothing\})-$ continua y, como $Int(R\cap S)=Int(R)\cap Int(S)$ para todo $R,S\in\mathcal{P}(X)$, resulta del Teorema 3.2.1, que f es $(Id,Int,\theta\wedge\theta^{*},Id,\{\varnothing\})-$ continua; pero, por hipótesis, $\theta\wedge\theta^{*}=Id$, lo cual implica que f es $(Id,Int,Id,Id,\{\varnothing\})-$ continua. Por lo tanto, según el Teorema 3.1.2 (i), se concluye que f es continua.

■

Corolario 3.2.2. Una función $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es continua si y sólo si, f es *almost* continua y $f^{-1}(V)\subset Int\left(f^{-1}(\gamma(V))\right)$ para cada abierto V en Y, donde γ es un operador asociado a la topología φ definido por $\gamma(A)=A\cup(Y\setminus Int\,Cl(A))$ para todo $A\in\mathcal{P}(Y)$.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es continua, entonces en virtud del Teorema 3.1.2 (i), se tiene que f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$ continua con $\alpha=$ operador identidad, $\beta=$ operador interior, $\theta=\delta=$ operador identidad e $I=\{\varnothing\}$. Sean Λ y γ operadores asociados a la topología φ definidos por $\Lambda(A)=Int\,Cl(A)$ y $\gamma(A)=A\cup(Y\setminus Int\,Cl(A))$ para todo $A\in\mathcal{P}(Y)$, observe que tales operadores son mutuamente duales en Y, es decir, $\Lambda\wedge\gamma= Id= \theta$, por lo que f es $(Id,Int,\Lambda\wedge\gamma,Id,\{\varnothing\})-$ continua, y como $\beta(E\cap F)=Int(E\cap F)=Int(E)\cap Int(F)$ para todo $E,F\in\mathcal{P}(X)$, resulta en virtud del Teorema 3.2.1, f es $(Id,Int,\Lambda,Id,\{\varnothing\})-$ continua y f es $(Id,Int,\gamma,Id,\{\varnothing\})-$ continua, esto significa que

f es *almost* continua, según el Teorema 3.1.2 (v), y $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(\gamma(V))\right)$, por la Definición 3.1.1.

Recíprocamente, sea V un abierto en Y y suponga que f es *almost* continua y $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(\gamma(V))\right)$, con γ un operador asociado a la topología φ definido por $\gamma(A) = A \cup (Y \setminus Int\,Cl(A))$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, entonces usando el Teorema 3.1.2.(v) y la Definición 3.1.1, se obtiene que f es $(Id, Int, Int\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua e $(Id, Int, \gamma, Id, \{\varnothing\})-$continua, respectivamente. Además, como $Int(E \cap F) =$ $Int(E) \cap Int(F)$ para todo $E, F \in \mathcal{P}(X)$, se tiene que f es $(Id, Int, Int\,Cl \wedge \gamma, Id, \{\varnothing\})-$ continua, por el Teorema 3.2.1. Pero, como los operadores $Int\,Cl$ y γ son mutuamente duales en Y, se obtiene que f es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua. Por lo tanto, en virtud del Teorema 3.2.1 (i), se concluye que f es continua. ■

Corolario 3.2.3. Una función $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es continua si y sólo si f es *weakly* continua y $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(Y \setminus Fr(V))\right)$ para cada abierto V en Y.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es continua, entonces por el Teorema 3.2.2 (i), f es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua. Sean ω y λ operadores asociados a la topología φ definidos por $\omega(A) = Cl(A)$ y $\lambda(A) = Y \setminus Fr(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, observe que tales operadores son mutuamente duales en Y, es decir, $\omega \wedge \lambda = Id$, por lo que f es $(Id, Int, \omega \wedge \lambda, Id, \{\varnothing\})-$continua, y como $Int(R \cap S) = Int(R) \cap Int(S)$ para todo $R, S \in \mathcal{P}(Y)$, se tiene del Teorema 3.2.1, que *f* es $(Id, Int, \omega, Id, \{\varnothing\})-$continua e $(Id, Int, \lambda, Id, \{\varnothing\})-$continua, lo cual significa, por el Teorema 3.1.2 (iv) y según la Definición 3.1.1, que *f* es *weakly* continua, y $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(Y \setminus Fr(V))\right)$ respectivamente.

Recíprocamente, sea *V* un abierto en Y y suponga que *f* es *weakly* continua y $f^{-1}(V) \subset Int\, f^{-1}(Y \setminus Fr(V))$, entonces por el Teorema 3.1.2 (v) y la Definición 3.1.1, se sigue que *f* es $(Id, Int, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua e $(Id, Int, \lambda, Id, \{\varnothing\})-$continua respectivamente, con $\lambda(A) = Y \setminus Fr(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$. Y además, como $Int(R \cap S) = Int(R) \cap Int(S)$ para todo $R, S \in \mathcal{P}(X)$, se obtiene, en virtud del Teorema 3.2.1, que *f* es $(Id, Int, Int\,Cl \wedge \lambda, Id, \{\varnothing\})-$continua. Pero, como Cl y λ son mutuamente duales en *Y*, se tiene que *f* es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua. Y así, según el Teorema 3.1.2 (i), se concluye que *f* es continua. ■

Corolario 3.2.4. Una función $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es continua si y sólo si *f* es *weak almost* continua y $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(\sigma(V))\right)$ para cada abierto *V* en Y, con σ un operador asociado a la topología φ definido por $\sigma(A) = A \cup (Y \setminus Int\,Ker\,Cl(A))$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$.

Demostración: Sea *V* un abierto en Y y suponga que *f* es continua, entonces *f* es $(\alpha, \beta, \theta, \delta, I)-$continua con $\alpha =$ operador identidad, $\beta =$ operador interior, $\theta = \delta =$ operador identidad e $I = \{\varnothing\}$. Sean ρ y σ operadores asociados a la topología φ definidos por $\rho(A) = Int\,Ker\,Cl(A)$ y $\sigma(A) = A \cup (Y \setminus Int\,Ker\,Cl(A))$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, observe que tales operadores son mutuamente duales en *Y*, es decir, $\rho \wedge \sigma = Id = \theta,$ por lo que f es $(\alpha, \beta, \rho \wedge \sigma, \delta, I)-$continua y puesto que $\beta(M \cap N) =$

$Int(M \cap N) = Int(M) \cap Int(N)$, para todo $M, N \in \mathcal{P}(X)$, resulta en virtud del Teorema 3.2.1 que f es $(\alpha, \beta, \rho, \delta, I)-$continua y $(\alpha, \beta, \sigma, \delta, I)-$continua. Por consiguiente, de acuerdo con el Teorema 3.1.2 (vii), f es *weak almost* continua y por la Definición 3.1.1 $f^{-1}(V) \subset Int\left(f^{-1}(\sigma(V))\right)$.

Recíprocamente, sea V un abierto en Y y suponga que f es *weak almost* continua y $f^{-1}(V) \subset Int\, f^{-1}(\sigma(V))$, con σ un operador asociado a la topología φ definido por $\sigma(A) = A \cup (Y \setminus Int\, Ker\, Cl(A))$ para todo $A \in \mathcal{P}(Y)$, entonces por el Teorema 3.1.2 (vii), se sigue que f es $(Id, Int, Int\, Ker\, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua y por la Definición 3.1.1, que f es $(Id, Int, \sigma, Id, \{\varnothing\})-$ continua. A su vez, como $Int(M \cap N) = Int(M) \cap Int(N)$ para todo $M, N \in \mathcal{P}(X)$, se deduce que f es $(Id, Int, Int\, Ker\, Cl \wedge \sigma, Id, \{\varnothing\})-$continua, por el Teorema 3.2.1. Pero, como $Int\, Ker\, Cl$ y σ son mutuamente duales en *Y*, se sigue que f es $(Id, Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua. En consecuencia, por el Teorema 3.1.2 (i), se concluye que f es continua. ■

A continuación, se muestra que a partir de una función $(\alpha, \beta, \theta, \delta, I)-$continua se puede obtener otra función de la misma clase, si los operadores satisfacen ciertas condiciones.

Teorema 3.2.2. Si β es un operador monótono, $\theta \prec \theta^*$ y $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ es una función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua, entonces *f* es $(\alpha,\beta,\theta^{*},\delta,I)-$continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua, entonces

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I, \qquad (1)$$

como $\theta\prec\theta^{*}$, se tiene que

$\theta(V)\subset\theta^{*}(V),$

de donde

$f^{-1}(\theta(V))\subset f^{-1}(\theta^{*}(V)).$

Pero, como β es un operador monótono

$\beta(f^{-1}(\theta(V)))\subset\beta(f^{-1}(\theta^{*}(V))).$

Por lo que,

$X\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\subset X\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right)$

y por tanto

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta^{*}(V))\right)\subset\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right). \qquad (2)$$

Así, por (1) y (2) y la propiedad hereditaria del ideal *I*, se obtiene que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus \beta(f^{-1}(\theta^{*}(V)))\in I.$$

Por lo tanto, f es $(\alpha,\beta,\theta^{*},\delta,I)-$continua. ■

Teorema 3.2.3. Si $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ es una función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua y satisface la condición de abierto, dada en la Definición 1.2.6, con respecto al operador β, entonces *f* es $(\alpha,\beta,Int\,\theta,\delta,I)-$continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua, entonces

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I. \qquad (1)$$

Luego, como f satisface la condición de abierto con respecto al operador β, se tiene por la Definición 1.2.6 que

$$\beta(f^{-1}(\theta(V)))\subset\beta(f^{-1}(Int\,\theta(V))).$$

De donde,

$$X\setminus\beta(f^{-1}(Int\,\theta(V)))\subset X\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)));$$

de manera que

$$[\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(Int\,\theta(V)))]\subset[\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))]. \qquad (2)$$

Así, por (1), (2) y la propiedad hereditaria de I, resulta que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(Int\,\theta(V)) \in I.$$

Por lo tanto, f es $(\alpha,\beta,Int\,\theta,\delta,I)-$continua. ■

Como consecuencia del Teorema 3.2.2, se obtiene otra manera de demostrar los resultados vistos en el Capítulo 2 correspondiente a los Teoremas 2.1.2 y 2.1.4; de igual manera como resultado del Teorema 3.2.3, se obtiene otra versión para las demostraciones de los Teoremas 2.1.7 y 2.1.8, las cuales son dadas a continuación.

Corolario 3.2.5 (Teorema 2.1.2). Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es *almost* continua, entonces f es *weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es *almost* continua, entonces por el Teorema 3.1.2 (v) f es $(Id,Int,Int\,Cl,Id,\{\varnothing\})-$continua, observe que $Int\,Cl \prec Cl$ y además que el operador interior es monótono. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 3.2.2, se tiene que f es $(Id,Int,Cl,Id,\{\varnothing\})-$continua, ahora al usar el Teorema 3.1.2 (iv) se concluye que f es *weakly* continua. ■

Corolario 3.2.6 (Teorema 2.1.4). Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es *weak almost* continua, entonces f es *very weakly* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es *weak almost* continua, entonces por el Teorema 3.1.2 (vii) f es $(Id, Int, Int\,Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua, observe que $Int\,Ker\,Cl \prec Ker\,Cl$ y que el operador interior es monótono. Por tanto, en virtud del Teorema 3.2.2, se obtiene que f es $(Id, Int, Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua y, por el Teorema 3.1.2 (viii), se deduce que f es *very weakly* continua. ■

Corolario 3.2.7 (Teorema 2.1.7). Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es *weakly* continua y abierta, entonces f es *almost* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es *weakly* continua y abierta, entonces por el Teorema 3.1.2 (iv) f es $(Id, Int, Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua, y como f es abierta, se tiene que f satisface la condición de abierto con respecto al operador interior, en virtud del Teorema 1.2.1; de manera que, según el Teorema 3.2.3, f es $(Id, Int, Int\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua. Y así, por el Teorema 3.1.2 (v), se concluye que f es *almost* continua. ■

Corolario 3.2.8 (Teorema 2.1.8). Si $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es *very weakly* continua y abierta, entonces f es *weak almost* continua.

Demostración: Sea V un abierto en Y y suponga que f es *very weakly* continua, entonces f es $(Id, Int, Ker\,Cl, Id, \{\varnothing\})-$continua, por el Teorema 3.1.2 (viii), a su vez como f es abierta, se tiene que f satisface la condición de abierto con respecto al operador interior. Por tanto, f es $(Id, Int, IntKer\,Cl, Id, \{\varnothing\})$-continua, en virtud del Teorema 3.2.3. Y así, por el Teorema 3.1.2 (vii), resulta que f es *weak almost* continua. ■

3.3 Algunos Resultados De Funciones ($\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\}$)Continuas

En esta sección, se estudia el comportamiento de las imágenes de los subconjuntos compactos bajo funciones $(\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})-$ continuas, generalizando así los resultados de la sección 2 del capítulo anterior.

Teorema 3.3.1. Sea $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\varphi)$ una función $(\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})-$ continua. Si $Id \prec \alpha$ y K es un subconjunto compacto de *X*, entonces $f(K)$ es $\theta-$compacto en *Y*.

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento abierto de $f(K)$ y $\mathcal{V}'=\{V\in\mathcal{V}: V\cap f(K)\neq\varnothing\}$, entonces existe $V_k\in\mathcal{V}'$ tal que

$$f(k)\in V_k, \text{ para cada } k\in K. \qquad (1)$$

Luego, como f es $(\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})-$ continua, se tiene que para cada abierto *V* en Y $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\subset Int(f^{-1}(\theta(V)))$, en particular para cada abierto V_k, con $k\in K$ $\alpha(f^{-1}(\delta(V_k)))\subset Int(f^{-1}(\theta(V_k)))$. Así, al tomar $W_k=Int(f^{-1}(\theta(V_k)))$, se sigue que W_k es un abierto en X tal que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V_k)))\subset W_k\subset f^{-1}(\theta(V_k)), \text{ para cada } k\in K. \qquad (2)$$

Por otra parte, como $f^{-1}(\delta(V_k))\subset X$, para cada $k\in K$, entonces por hipótesis

$$f^{-1}(\delta(V_k))\subset\alpha(f^{-1}(\delta(V_k))), \qquad (3)$$

y a su vez, como $V_k \subset \delta(V_k)$ para cada $k \in K$, pues δ es un operador asociado a la topología φ, se tiene que $f^{-1}(V_k) \subset f^{-1}(\delta(V_k))$.

Luego, como $k \in f^{-1}(V_k)$ para cada $k \in K$, por (1), se sigue que $k \in f^{-1}(\delta(V_k))$, de modo que $k \in \alpha(f^{-1}(\delta(V_k)))$, por (3), lo cual implica que $k \in W_k$, por (2). Así, $K = \bigcup_{k \in K}\{k\} \subset \bigcup_{k \in K} W_k$. Por consiguiente, la colección $\{W_k : k \in K\}$ es un cubrimiento abierto de *K* y como *K* es compacto, existe una subcolección finita de $\{W_k : k \in K\}$, tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{k_i}$, entonces

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(W_{k_i}). \tag{4}$$

Ahora bien, $f(W_{k_i}) \subset f(f^{-1}(\theta(V_{k_i}))) \subset \theta(V_{k_i})$ para cada $1 \leq i \leq n$, por (2); así,

$$\bigcup_{i=1}^{n} f(W_{k_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \theta(V_{k_i}). \tag{5}$$

Por tanto, de (4) y (5), se tiene que $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \theta(V_{k_i})$, y como consecuencia de la Definición 1.2.9, se concluye que $f(K)$ es $\theta-$compacto. ■

Si en el teorema anterior se consideran operadores específicos, entonces se obtienen los teoremas enunciados en la sección 2 del capítulo anterior.

Corolario 3.3.1. Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \varphi)$ una función *weakly* continua y sea *K* un subconjunto compacto de *X*, entonces $f(K)$ es un subconjunto *almost* compacto de *Y*.

Demostración: Como $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función *weakly* continua, entonces, f es $(\alpha,Int,\theta,\delta,I)-$continua, con $\alpha=$operador identidad, $\theta=$operador clausura, $\delta=$ operador identidad e $I=\{\varnothing\}$, por el Teorema 3.1.2 (iv) y, a su vez, como *K* es un subconjunto compacto de *X* y $Id\prec\alpha$, se concluye por el Teorema 3.3.1 que $f(K)$ es Cl- compacto, es decir, $f(K)$ es *almost* compacto. ■

Corolario 3.3.2. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función *almost* continua y *K* un subconjunto compacto de *X*, entonces $f(K)$ es *nearly* compacto.

Demostración: Como $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ es una función *almost* continua, entonces f es $(\alpha,Int,\theta,\delta,I)-$continua, con $\alpha=$operador identidad, $\theta=$operador interior clausura, $\delta=$operador identidad e $I=\{\varnothing\}$, en virtud del Teorema 3.1.2 (v); ahora, como *K* es un subconjunto compacto de *X* y $Id\prec\alpha$, se tiene por el Teorema 3.3.1 que $f(K)$ es $IntCl$-compacto, lo cual significa que $f(K)$ es *nearly* compacto. ■

Teorema 3.3.2. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función $(\alpha,Int,\theta,\delta,\{\varnothing\})-$continua. Si (Y,φ) es $\theta-T_1$ y $Id\prec\alpha$, entonces las preimagenes de los conjuntos unitarios de *Y* son conjuntos cerrados.

Demostración: Sea $q\in Y$, para mostrar que $f^{-1}(\{q\})$ es un cerrado se prueba que su complemento $A=\{x\in X: f(x)\neq q\}$ es abierto en *X*. Si $A=X$ ó $A=\varnothing$, se tiene que *A* es abierto en *X* en ambos casos. Suponga que $A \varnothing X$, $A \neq \varnothing$ y sea $a \in A$, entonces $f(a) \neq q$ para cada $a \in A$ y como Y es $\theta - T_1$, existe según la Definición 1.2.7 un abierto V en Y tal que

$$f(a) \in V \text{ y } q \notin \theta(V). \qquad (1)$$

Además, como f es $(\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})-$continua, también se tiene que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset Int\left(f^{-1}(\theta(V))\right)$; así, al tomar $U = Int\left(f^{-1}(\theta(V))\right)$, se sigue que *U* es un abierto en *X* tal que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset U \subset f^{-1}(\theta(V)), \qquad (2)$$

de modo que $f(U) \subset f(f^{-1}(\theta(V)))$ y como $f(f^{-1}(\theta(V))) \subset \theta(V)$, se obtiene que

$$f(U) \subset \theta(V). \qquad (3)$$

Por otro lado, como $f(a) \in V$ y $V \subset \delta(V)$, pues δ es un operador asociado a la topología φ, resulta que $a \in f^{-1}(V)$ y $a \in f^{-1}(\delta(V))$. Luego, como $f^{-1}(\delta(V)) \subset X$, se sigue que $f^{-1}(\delta(V)) \subset \alpha(f^{-1}(\delta(V)))$ por hipótesis, por tanto, $a \in \alpha(f^{-1}(\delta(V)))$. Así, de esto y el hecho de que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset U$, por (2), se obtiene que $a \in U$. Ahora, sólo resta verificar que $U \subset A$ o equivalentemente que $U \cap X \setminus A = \varnothing$. Suponga lo contrario que $U \cap X \setminus A \neq \varnothing$ y sea $b \in U \cap X \setminus A$, entonces $b \in U$ y $b \in X \setminus A$, de manera que $f(b) \in f(U)$ y $f(b) = q$, respectivamente; por lo que $q \in f(U)$; pero, según (3) $f(U) \subset \theta(V)$, así $q \in \theta(V)$, lo cual es una contradicción, ya que de (1) $q \notin \theta(V)$; por tanto, $U \subset A$. En consecuencia, existe un abierto *U* en *X*, tal que $a \in U \subset A$, es decir, *A* es abierto en *X*.

■

Corolario 3.3.3. Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ una función *weakly* continua. Si *Y* es Hausdorff, entonces las preimagenes de los conjuntos unitarios son conjuntos cerrados.

Demostración: Sea $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ una función *weakly* continua, entonces según el Teorema 3.1.2 (iv), *f* es $(\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})-$continua, con $\alpha =$operador identidad, $\theta =$operador clausura, $\delta =$operador identidad. Luego, como (Y,φ) es T_2, se sigue en virtud del Teorema 1.2.2 que (Y,φ) es $Cl - T_1$, y como $Id \prec \alpha$, se concluye del Teorema 3.3.2 que las preimagenes de los conjuntos unitarios de *Y* son conjuntos cerrados.

CAPÍTULO IV

FUNCIONES $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)$-CONTINUAS EN *m*-ESPACIOS

En este capítulo, se plantea el concepto de estructura minimal m_X sobre un conjunto no vacío *X* y algunas de sus propiedades. Posteriormente, se introduce la definición de *m*-operador sobre m_X. Por último, se define el concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua, la cual generaliza la noción de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$ continua y algunos resultados dados en el Capítulo 3.

4.1 Estructuras Minimales

En esta sección, se introduce el concepto de estructura minimal sobre un conjunto *X* no vacío, la noción de *m*-operador y se estudian algunas propiedades.

Definición 4.1.1. Una estructura minimal o una m_X-estructura sobre un conjunto no vacío *X*, es una familia m_X de subconjuntos de X tal que $\varnothing \in m_X$ y $X \in m_X$.

El par (X, m_X) formado por un conjunto no vacío X y una m_X-estructura, se denomina $m-$espacio.

Observe que toda topología es una estructura minimal, de modo que todo espacio topológico es un $m-$espacio.

Definición 4.1.2. Sea (X, m_X) un *m*-espacio, se dice que un subconjunto *A* de *X* es m_X-abierto si $A \in m_X$ y el complemento de un conjunto m_X-abierto se denomina m_X -cerrado.

Al igual que en un espacio topológico, se pueden definir ciertas operaciones de conjuntos en un m -espacio.

Definición 4.1.3. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y *A* un subconjunto de *X*, se define el m_X -interior de *A*, denotado por m_X - $Int(A)$, como la unión de todos conjuntos m_X - abiertos que están contenidos en *A*, es decir, $m_X - Int(A) = \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\}$.

Definición 4.1.4. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y *A* un subconjunto de *X*, se define la m_X -clausura de *A*, denotada por m_X -*Cl*(*A*), como la intersección de todos conjuntos m_X -cerrados que contienen a *A*, es decir, $m_X - Cl(A) = \bigcap_{X-F \in m_X} \{F : F \supset A\}$.

Observe que cuando la estructura minimal es una topología se recuperan las nociones clásicas de interior y clausura de un conjunto.

Los siguientes teoremas muestran algunas propiedades del m_X -interior y de la m_X -clausura de un conjunto.

Teorema 4.1.1. Sean (X, m_X) un *m*-espacio, *A* y *B* subconjuntos de *X*, entonces

(i) $m_X - Int(A) \subset A.$

(ii) Si A es m_X-abierto, entonces $m_X - Int(A) = A.$

(iii) $m_X - Int(\varnothing) = \varnothing$ y $m_X - Int(X) = X$.

(iv) $x \in m_X - Int(A)$ si y sólo si existe un m_X-abierto G tal que $x \in G \subset A.$

(v) Si $A \subset B$, entonces $m_X - Int(A) \subset m_X - Int(B).$

(vi) $m_X - Int(m_X - Int(A)) = m_X - Int(A).$

(vii) $m_X - Int(A \cap B) \subset m_X - Int(A) \cap m_X - Int(B).$

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata de la Definición 4.1.3.

(ii) Suponga que A es un conjunto m_X-abierto, entonces $A \subset \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\}$ $m_X - Int(A)$ y como $m_X - Int(A) \subset A$ para todo $A \subset X$, se deduce que $A = m_X - Int(A).$

(iii) Como $\varnothing$ y X son conjuntos m_X-abiertos, se tiene que $m_X - Int(\varnothing) = \varnothing$ y $m_X - Int(X) = X$, por (ii).

(iv) Suponga que $x \in m_X - Int(A)$, entonces $x \in \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\}$, es decir, $x \in G$ para algún $G \in m_X$ y $G \subset A$.

Recíprocamente, suponga que existe un abierto G tal que $x \in G \subset A$, entonces

$x \in \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\} = m_X$ -*Int*(A).

(v) Suponga que $x \in m_X - Int(A)$, entonces existe $G \in m_X$ tal que $x \in G \subset A$, y como $A \subset B$, se tiene que $x \in G \subset B$ para algún $G \in m_X$. Así, por (iv), $x \in m_X - Int(B)$. En consecuencia , $m_X - Int(A) \subset m_X - Int(B)$.

(vi) Como $m_X - Int(A) \subset A$ para todo $A \subset X$, por (i); es inmediato de la proposición anterior que m_X - $Int(m_X - Int(A)) \subset m_X - Int(A)$. Por tanto, sólo resta verificar que $m_X -$ $Int(A) \subset m_X - Int(m_X - Int(A))$. Sea $x \in m_X - Int(A)$, entonces $x \in G$ para algún $G \in m_X$ y $G \subset A$, por (iv); luego, como $G \subset A$, se tiene que m_X -*Int*(G)$\subset$ m_X -*Int*(A); además, como G es m_X -abierto, se sigue que $G \subset m_X - Int(A)$ por (ii), así, $x \in G$ para algún $G \in m_X$ y $G \subset m_X - Int(A)$, lo cual implica que $x \in m_X - Int$ (m_X -*Int*(A)), por (iv); de donde $m_X - Int(A) \subset m_X - Int(m_X - Int(A))$, con lo cual resulta la igualdad que se quiere.

(vii) Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, entonces $m_X - Int\ (A \cap B\ ) \subset m_X - Int\ (A)$ y $m_X - Int\ (A \cap B\ ) \subset m_X - Int\ (B)$ $m_X - Int\ (A \cap B\ ) \subset m_X - Int\ (B)$, por (v), de modo que $m_X - Int\ (A \cap B\ ) \subset m_X - Int\ (A) \cap m_X - Int\ (B)$. ■

El siguiente ejemplo muestra que la contención de la Proposición (vii) del Teorema 4.1.1 es estricta.

Ejemplo 4.1.1. Considere el conjunto $X=\{a,b,c,d\}$ con la siguiente m_X-estructura $m_X=\{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$. Observe que existen A y B subconjuntos de X tales .que $m_X-Int(A)\cap m_X-Int(B)\not\subset m_X-Int(A\cap B)$. En efecto, sean $A=\{b,c,d\}$ y $B=\{a,b,c\}$, entonces m_X-$Int(A\cap B)$ $=m_X-Int(\{b,c\})=\emptyset$, m_X-$Int(A)$ $=\{b,c,d\}$ y $m_X-Int(B)=\{a,b,c\}$. Por tanto, m_X-$Int(A)\cap m_X$-$Int(B)=\{b,c\}\not\subset m_X$-$Int(A\cap B)$.

Teorema 4.1.2. Sean (X,m_X) un m-espacio, A y B subconjuntos de X, entonces

(i) $A\subset m_X-Cl(A)$.

(ii) Si A es m_X-cerrado , entonces $m_X-Cl(A)=A$.

(iii) $m_X-Cl(\emptyset)=\emptyset$ y $m_X-Cl(X)=X$.

(iv) $x\in m_X-Cl(A)$ si sólo si para todo m_X-abierto U que contiene a x, se tiene que $U\cap A\neq\emptyset$.

(v) Si $A\subset B$, entonces $m_X-Cl(A)\subset m_X-Cl(B)$.

(vi) $m_X-Cl(m_X-Cl(A))=m_X-Cl(A)$.

(vii) $m_X-Cl(A\cup B)\supset m_X-Cl(A)\cup m_X-Cl(B)$.

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata de la Definición 4.1.4.

(ii) Suponga que A es un m_X-cerrado, entonces $m_X - Cl(A) = \bigcap_{X-F \in m_X} \{ F : F \supset A \} \subset A$ y como $A \subset m_X - Cl(A)$ para todo A subconjunto de X, se obtiene que $m_X - Cl(A) = A.$

(iii) Como $\varnothing$ y X son m_X-cerrados porque son los complementos de los conjuntos m_X-abiertos, entonces $m_X - Cl(\varnothing) = \varnothing$ y $m_X - Cl(X) = X$, por (ii).

(iv) Para probar esta proposición se procede a mostrar su equivalente: $x \notin m_X - Cl(A)$ si sólo si existe un m_X-abierto U que contiene a x tal que $U \cap A = \varnothing.$

Suponga que $x \notin m_X - Cl(A)$, entonces $x \notin \bigcap_{X-F \in m_X} \{F : F \supset A\}$, lo cual significa que existe un $m_X -$cerrado F que contiene a A tal que $x \notin F$, es decir, $X - F$ es un $m_X -$abierto que contiene a x tal que $(X - F) \cap A = \varnothing$.

Recíprocamente, suponga que existe un $m_X -$abierto U que contiene a x tal que $U \cap A = \varnothing$, entonces $A \subset X - U$ y $X - (X - U) = U \in m_X$. Por lo tanto, $m_X - Cl(A) \subset X - U$ y como $x \in U$, se concluye que $x \notin m_X - Cl(A).$

(v) Suponga que $x \in m_X - Cl(A)$, entonces para todo $m_X -$abierto U que contiene a x, se tiene que $U \cap A \neq \varnothing$, por (iv), y así, $B \cap U \neq \varnothing$ para cada $m_X -$abierto U que contiene a x, es decir, $x \in m_X - Cl(B).$ Y así, $m_X - Cl(A) \subset m_X - Cl(B).$

(vi) Como $A \subset m_X - Cl(A)$ para todo $A \subset X$, entonces usando (v), se tiene que $m_X - Cl(A) \subset m_X - Cl(m_X - Cl(A))$. De modo que, sólo resta probar que $m_X - Cl(m_X - Cl(A)) \subset m_X - Cl(A)$. Sea $x \in m_X - Cl(m_X - Cl(A))$, entonces $x \in F$ para cada $F \supset m_X - Cl(A)$ tal que $X - F \in m_X$; pero, como $A \subset m_X - Cl(A)$, se sigue que $x \in F$ para cada $F \supset A$ y $X - F \in m_X$, lo cual significa que $x \in m_X - Cl(A)$. Por tanto, $m_X - Cl(m_X\text{-}Cl(A)) \subset m_X - Cl(A)$, de donde resulta la igualdad que se quiere.

(vii) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, entonces $m_X - Cl(A) \subset m_X - Cl(A \cup B)$ y $m_X - Cl(B) \subset m_X - Cl(A \cup B)$, por (v). En consecuencia, $m_X - Cl(A \cup B) \supset m_X - Cl(A) \cup m_X - Cl(B)$. ■

El siguiente ejemplo muestra que la contención en el Teorema 4.1.2 (vii) es estricta.

Ejemplo 4.1.2. Considere el conjunto $X = \{a,b,c,d\}$ con la siguiente m_X-estructura $m_X = \{\varnothing, X, \{a\}, \{d\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$. Observe que existen A y B subconjuntos de X tales que $m_X - Cl(A \cup B) \not\subset m_X - Cl(A) \cup m_X - Cl(B)$. En efecto, sean $A = \{a\}$ y $B = \{d\}$, entonces $m_X\text{-}Cl(A \cup B) = X$, $m_X - Cl(A) = \{a\}$ y $m_X\text{-}Cl(B) = \{d\}$. Por tanto, $m_X - Cl(A \cup B) \not\subset m_X - Cl(A) \cup m_X - Cl(B)$.

La m_X-clausura y el m_X-interior de un conjunto pueden relacionarse tal y como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y *A* un subconjunto de *X*, entonces

(i) $m_X - Cl(X-A) = X - (m_X - Int(A))$.

(ii) $m_X - Int(X-A) = X - (m_X - Cl(A))$.

Demostración:

(i) Por la Definición 4.1.3, se tiene que $m_X - Int(A) = \bigcup_{G\in m_X}\{G : G \subset A\}$; de modo que, $X - (m_X - Int(A)) = X - \bigcup_{G\in m_X}\{G : G \subset A\} = \bigcap_{X-(X-G)\in m_X}\{X - G : X - A \subset X - G\}$; pero, como *G* es m_X-abierto y esta contenido en *A*, entonces $X - G$ es m_X-cerrado y contiene a $X - A$; y como para cada m_X-cerrado que contenga a $X - A$ existe un m_X-abierto contenido en *A*, entonces al tomar esta intersección sobre todos los m_X-abiertos contenidos en *A* se esta intersectando a todos los m_X-cerrados que contienen a $X - A$. Luego, $\bigcap_{X-(X-G)\in m_X}\{X - G : X - A \subset X - G\} = m_X - Cl(X - A)$. Por lo tanto, $m_X - Cl(X - A) = X - (m_X - Int(A))$.

(ii) Por la Definición 4.1.4, se tiene que $m_X - Cl(A) = \bigcap_{X-F\in m_X}\{F : F \supset A\}$; de modo que, $X - (m_X - Cl(A)) = X - \bigcap_{X-F\in m_X}\{F : F \supset A\} = \bigcup_{X-F\in m_X}\{X - F \subset X - A\} = m_X - Int(X - A)$, según la Definición 4.1.3. Por lo tanto, $m_X - Int(X - A) = X - (m_X - Cl(A))$.

■

Es importante destacar que a diferencia de cómo ocurre con el interior y la clausura de un conjunto en un espacio topológico, el m_X -interior no necesariamente es un conjunto m_X -abierto ni la m_X -clausura es necesariamente un conjunto m_X -cerrado.

Sin embargo, si a la estructura minimal se le exige cierta condición se pueden obtener estos resultados. Dicha condición se especifica a continuación.

Definición 4.1.5. Una estructura minimal m_X sobre un conjunto *X*, se dice que satisface la condición (*B)* de Maki si la unión arbitraria de elementos de la m_X -estructura es un elemento de la m_X -estructura.

Observe que si m_X satisface la condición (*B*) de Maki, entonces intersección de conjuntos m_X -cerrados es un conjunto m_X -cerrado. De modo que, si m_X satisface la condición (*B*) de Maki y si $A \subset X$, entonces m_X -*Int*(*A*) es un conjunto m_X -abierto y m_X -*Cl*(*A*) es un conjunto m_X -cerrado.

En el siguiente teorema, se obtienen los recíprocos del Teorema 4.1.1 (ii) y el Teorema 4.1.2 (ii), haciendo uso de la condición (*B*) de Maki.

Teorema 4.1.4. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y *A* un subconjunto de *X*. Si m_X satisface la condición (*B*) de Maki, entonces

(i) *A* es m_X -abierto si y sólo si $m_X - Int(A) = A$.

(ii) *A* es m_X -cerrado si y sólo si $m_X - Cl(A) = A$.

Demostración:

(i) Por (ii) del Teorema 4.1.1, es inmediato que si A es m_X-abierto, entonces m_X-*Int*(A)=A.

Recíprocamente, como $m_X - Int(A)$ es un conjunto m_X-abierto y por hipótesis $m_X - Int(A) = A$, se tiene que A es un conjunto m_X-abierto.

(ii) Por (ii) del Teorema 4.1.2, es inmediato que si A es m_X-cerrado, entonces m_X-*Cl*(A)=A.

Recíprocamente, como $m_X - Cl(A)$ es un conjunto m_X-cerrado y por hipótesis, $m_X - Cl(A) = A,$ se deduce que A es un conjunto m_X-cerrado. ■

Definición 4.1.6. Sean (X, m_X) un m-espacio y A un subconjunto de X, se define el m_X-*Kernel* de A, denotado por m_X-*Ker*(A), como la intersección de todos los m_X- abiertos que contienen a A, es decir, $m_X - Ker(A) = \bigcap\{C : C \supset A, C \in m_X\}$.

En el siguiente teorema se muestran algunas propiedades del m_X-*Kernel* de un conjunto.

Teorema 4.1.5. Sean (X, m_X) un m-espacio y A un subconjunto de X, entonces

(i) $A \subset m_X - Ker(A).$

(ii) Si A es m_X -abierto , entonces $m_X - Ker(A) = A$.

Demostración:

(i) Es consecuencia inmediata de la Definición 4.1.6.

(ii) Por hipótesis y la Definición 4.1.6, se tiene que $m_X - Ker(A) \subset A$; y como además, por (i), $A \subset m_X - Ker(A)$ se concluye que $m_X - Ker(A) = A$. ■

A continuación, se plantea el concepto de *m*-operador sobre una m_X -estructura.

Definición 4.1.7. Sea (X, m_X) un *m*-espacio, un *m*-operador sobre m_X es una aplicación $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que es expansiva sobre m_X, es decir, $U \subset \alpha(U)$ para todo $U \in m_X$.

Observe que si m_X es una topología en la definición anterior, entonces la noción de *m*-operador coincide con la noción de operador asociado a la topología

Dados dos *m*-operadores $\alpha, \beta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sobre m_X, la notación $\alpha \leq \beta$ significa que $\alpha(A) \subset \beta(A)$ para todo $A \in m_X$.

Ejemplo 4.1.2. Los siguientes son ejemplos de *m*-operadores

(i) El *m*-operador identidad $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por $\alpha(U) = Id(U)$.

(ii) El m -operador m_X -interior $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por

$\alpha(U) = m_X - Int(U)$.

(iii) El *m*- operador m_X-clausura $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por $\alpha(U) = m_X - Cl(U)$.

(iv) El operador m_X-interior clausura $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por $\alpha(U) = m_X - Int\left(Cl(U)\right)$.

(v) El operador $m_X -$ clausura interior $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por $\alpha(U) = m_X - Cl\left(Int(U)\right)$.

(vi) El operador m_X-*kernel* $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definido por $\alpha(U) = m_X$- $Ker(U)$.

Definición 4.1.8. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y α un *m*-operador, se dice que α es un *m*-operador monótono si para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A \subset B$, se tiene que $\alpha(A) \subset \alpha(B)$

Observe que los *m*-operadores definidos en el Ejemplo 4.1.2 son monótonos sobre la familia m_X. Además, si $m_X = \tau$ es una topología sobre *X*, entonces el concepto de -moperador monótono coincide con el de operador monótono.

Definición 4.1.9. Sean (X, m_X) un *m*-espacio, β cualquier operador y el operador $m_X - Int$ asociados a la m_X-estructura. El operador β induce otro operador, denotado por $m_X - Int\beta$, definido como sigue: $\left(m_X - Int\beta\right)(A) = m_X - Int(\beta(A))$ para cada $A \in \mathcal{P}(X)$.

Note que si $m_X = \tau$ es una topología sobre *X*, entonces la definición anterior corresponde a la de operador inducido en espacios topológicos.

Sean (X, m_X) y (Y, m_Y) dos *m*-espacios. Ahora, se presentan algunas definiciones relacionadas con funciones entre *m*-espacios.

Definición 4.1.10. Se dice que $f:(X, m_X) \to (Y, m_Y)$ es una función *m*-abierta, si la imagen directa de cada m_X-abierto es un m_Y-abierto.

Observe que si $m_X = \tau$ y $m_Y = \varphi$ son topologías sobre *X* e *Y* respectivamente, entonces la definición anterior coincide con la definición de función abierta entre espacios topológicos.

Teorema 4.1.6. Sea $f:(X, m_X) \to (Y, m_Y)$ una función, tal que $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(m_Y\text{-}Int(B))$ para cada $B \subseteq Y$. Si m_Y es una estructura minimal que satisface la condición *(B)* de Maki, entonces *f* es una función *m*-abierta.

Demostración: Suponga que $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(m_Y\text{-}Int(B))$ para cada $B \subseteq Y$ y, sea U un m_X-abierto. Como $f(U) \subset Y$, se tiene que $f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(m_Y\text{-}Int(f(U)))$, es decir, $U \subseteq f^{-1}\big(m_Y\text{-}Int(f(U))\big)$, por lo que $f(U) \subseteq m_Y\text{-}Int(f(U))$. Así, $f(U)$ es m_Y-abierto, ya que m_Y satisface la condición *(B)* de Maki, y en consecuencia, *f* es *m*-abierta. ■

Definición 4.1.11. Se dice que $f:(X, m_X) \to (Y, m_Y)$ satisface la condición de *m*-abierto respecto al *m*-operador α sobre m_X, si $\alpha(f^{-1}(B)) \subset \alpha(f^{-1}(m_Y - Int(B)))$ para cada $B \subset Y$.

Observe que, si $\alpha = Id$ o $\alpha = m_X - Int$, entonces esta definición coincide con la definición de función *m*-abierta, si se le exige a la m_Y-estructura que satisfaga la condición *(B)* de Maki.

Si $m_X = \tau$, $m_Y = \varphi$ y α es un *m*-operador cualquiera, entonces la Definición 4.1.11 coincide con la Definición 1.2.6

Teorema 4.1.7. Si $f:(X,m_X)\to(Y,m_Y)$ es una función *m*-abierta, entonces

$$m_X - Int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(m_Y - Int(B)) \text{ para cada } B \subset Y. \qquad (1)$$

Recíprocamente, si se verifica (1) y m_Y satisface la condición *(B)* de Maki, entonces f es *m*-abierta.

Demostración: Sea $B \subset Y$ y suponga que $x \in m_X - Int(f^{-1}(B)),$ entonces existe un m_X-abierto U_x tal que $x \in U_x \subset f^{-1}(B)$, de modo que $f(U_x) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B;$ y como *f* es *m*-abierta, también se tiene que $f(U_x) = W_{f(x)}$ es un m_Y-abierto. Ahora bien, como $f(U_x) \subset B$ y $f(U_x) = W_{f(x)}$, se obtiene que existe $W_{f(x)}$ m_Y-abierto tal que $f(x) \in W_{f(x)} \subset B,$ lo cual implica que $f(x) \in m_Y - Int(B),$ de donde resulta que $x \in f^{-1}(m_Y - Int(B)).$ Por lo tanto,

$m_X - Int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(m_Y - Int(B)).$

Recíprocamente, suponga que $m_X - Int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(m_Y - Int(B))$ para cada $B \subset Y$ y, sea U un m_X-abierto. Como $f(U) \subset Y$, se tiene que $m_X - (f^{-1}(f(U))) \subset f^{-1}(m_Y - Int(f(U))),$ es decir, $U \subset f^{-1}\big(m_Y - Int(f(U))\big),$ por lo que $f(U) \subset m_Y - Int(f(U)).$ Así, $f(U)$ es m_Y-abierto, ya que m_Y satisface la condición *(B)* de Maki, y en consecuencia, *f* es *m*-abierta. ■

Teorema 4.1.8. Si $f:(X, m_X) \to (Y, m_Y)$ es una función *m*-abierta, entonces *f* satisface la condición de *m*-abierto respecto al *m*-operador $\alpha = m_X - Int$.

Demostración: Sea $B \subset Y$ y suponga que *f* es una función *m*-abierta, entonces por el Teorema 4.1.7 $m_X - Int(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(m_Y - Int(B)).$ Así, de la monotonía del operador m_X-interior, $m_X - Int(f^{-1}(B)) \subset m_X - Int(f^{-1}(m_Y - Int(B))).$ Por lo tanto, al tomar $\alpha = m_X - Int$ como el *m*-operador sobre m_X en la última expresión, resulta que $\alpha(f^{-1}(B)) \subset \alpha(f^{-1}(m_Y - Int(B))$, lo cual significa que *f* satisface la condición. ■

A continuación, se definen propiedades de separación sobre un *m*-espacio.

Definición 4.1.12. Un *m*-espacio (X, m_X), se dice que es m_X-T_1 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos $V, W \in m_X$ tales que $x \in V$, $x \notin W$ y $y \in W$, $y \notin V$.

Definición 4.1.13. Un *m*-espacio (X, m_X), se dice que es m_X-T_2 si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos disjuntos $V, W \in m_X$ tales que $x \in V$ y $y \in W$.

Observe que todo *m*-espacio m_X-T_2 es m_X-T_1, pero el reciproco no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.3. Sea el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la $m_{\mathbb{R}}$-estructura formada por la clase de conjuntos de $\varnothing, \mathbb{R}$ y todos los complementos unitarios en $\mathbb{R}$, es decir, $m_{\mathbb{R}} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} - \{x\} : x \in \mathbb{R}\}$, entonces $(\mathbb{R}, m_{\mathbb{R}})$ es $m_{\mathbb{R}} - T_1$ pero no $m_{\mathbb{R}} - T_2$.

En efecto, si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, entonces $x \in \mathbb{R} - \{y\} = V$ y $y \in \mathbb{R} - \{x\} = W$ y tanto V como W son $m_{\mathbb{R}}$-abiertos por definición de $m_{\mathbb{R}}$; además $x \notin W$ y $y \notin V$. Por tanto, $(\mathbb{R}, m_{\mathbb{R}})$ es $m_{\mathbb{R}} - T_1$. Sin embargo, $(\mathbb{R}, m_{\mathbb{R}})$ no es $m_{\mathbb{R}} - T_2$, pues suponga lo contrario, es decir, para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$ existen conjuntos V, $W \in m_{\mathbb{R}}$ disjuntos tales que $x \in V$ y $y \in W$. Entonces, $V = \mathbb{R} - \{a_1\}$ y $W = \mathbb{R} - \{a_2\}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq x$ y $a_2 \neq y$; además, $V \cap W = \mathbb{R} - \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción. Así, $(\mathbb{R}, m_{\mathbb{R}})$ no es $m_{\mathbb{R}} - T_2$.

Observe que como toda topología τ sobre un conjunto X cualquiera, es una m_X-estructura el Ejemplo 1.1.3 también muestra que $m_X - T_1$ no implica $m_X - T_2$.

Definición 4.1.14. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y α un *m*-operador sobre m_X, se dice que el *m*-espacio *X* es $(m_X, \alpha) - T_1$ si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existen conjuntos m_X-abiertos *V* y *W* tales que $x \in V$, $y \notin \alpha(V)$ y $y \in W$, $x \notin \alpha(W)$.

Teorema 4.1.9. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y $\alpha = m_X - Cl$ *m*-operador sobre m_x. Entonces *X* es $m_X - T_2$ si y sólo si es $(m_X, \alpha) - T_1$.

Demostración: Sea $\alpha = m_X - Cl$ el operador asociado a la m_X-estructura. Suponga que (X, m_X) es $m_X - T_2$, entonces para cada $x, y \in X, x \neq y$, existen conjuntos m_X-abiertos *V* y *W* tales que $x \in V$ y $y \in W$ con $W \cap V = \emptyset$. Por tanto, sólo falta verificar que $x \notin \alpha(W)$ y $y \notin \alpha(V)$ para mostrar que *X* es $(m_X, \alpha) - T_1$. Suponga lo contrario, es decir, $x \in \alpha(W)$ o $y \in \alpha(V)$. Si $x \in \alpha(W)$, entonces para todo m_X-abierto *U* que contiene a *x* se tiene que $W \cap U \neq \emptyset$. En particular, para el m_X-abierto *U*=*V*, se tiene que $W \cap V \neq \emptyset$, lo cual conduce a una contradicción, puesto que *V* y *W* son disjuntos. Por tanto, $x \notin \alpha(W)$. De manera similar, se muestra que $y \notin \alpha(V)$. En consecuencia, *X* es $(m_X, \alpha) - T_1$.

Recíprocamente, si *X* es $(m_X, \alpha) - T_1$, entonces para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existen m_X-abiertos *V* y *W* tales que $x \in V$, $y \notin \alpha(V)$ y $y \in W$, $x \notin \alpha(W)$. Luego, como $y \notin m_X - Cl(V)$ existe un m_X-abierto U_y que contiene a *y* tal que $V \cap U_y = \emptyset$ (1); además, como *V* es m_X-abierto, se tiene que $m_X - Int(V) = V$ y como $x \in V$, entonces $x \in m_X - Int(V)$; por lo que existe un m_X-

abierto U_x que contiene a *x* tal que $U_x \subset V$, de modo que $U_x \cap U_y \subset V \cap U_y$; así, por (1), $U_x \cap U_y = \varnothing$. Por tanto, para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$, existen m_X-abiertos U_x y U_y disjuntos que contienen a *x* y *y* respectivamente, lo cual significa que *X* es $m_X - T_2$. ■

Ahora, se presentan algunas nociones de compacidad asociadas a un *m*-espacio.

Definición 4.1.15. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de *X*, se dice que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento *m*-abierto de *X* si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento de *X* tal que cada elemento de $\mathcal{A}$ es un conjunto $m_X -$abierto.

Definición 4.1.16. Sean (X, m_X) un *m*-espacio y $A \subset X$, se dice que

(i) *A* es *m*-compacto si cada cubrimiento *m*-abierto de *A* tiene un subcubrimiento finito. En otras palabras, *A* es *m*-compacto si cada cubrimiento *m*-abierto $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de *A* tiene una subcolección finita $\{C_i\}_{i=1}^n$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^n C_i$.

(ii) *A* es α_m-compacto si para cada cubrimiento *m*-abierto $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de *A* existe una subcolección finita $\{V_i\}_{i=1}^n$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \alpha_m(V_i)$, donde α_m es un *m*-operador sobre m_X.

Al igual que en casos anteriores, si m_X es una topología sobre *X*, entonces se recobran los conceptos clásicos de compacidad y α-compacidad.

4.2 Funciones ($\alpha,\beta,\theta,\delta,I$)-Continuas

En esta sección, se aporta un nuevo concepto que generaliza las nociones de continuidad definidas en capítulos anteriores. Dicha generalización, se logra entrelazando los conceptos de estructura minimal, operadores e ideales. A continuación, se presenta dicho concepto.

Sean (X,m_X) y (Y,m_Y) *m*-espacios**,** α y β *m*-operadores sobre m_X, θ y δ *m*-operadores sobre m_Y e *I* un ideal sobre *X*.

Definición 4.2.1. Sea $f:(X,m_X)\to(Y,m_Y)$ una función, se dice que *f* es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$- continua si para cada m_Y-abierto *V* de *Y*, se tiene que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I$.

Observe que esta nueva definición es más amplia que la definición de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)$-continua, en el sentido que cuando las estructuras minimales, tanto de *X* como de *Y*, son topologías entonces obtenemos dichas funciones.

El siguiente teorema muestra que la clase de funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continuas es no vacía.

Teorema 4.2.1. Si $\delta\prec\theta,\alpha(\varnothing)=\varnothing$ y $f:\left(X,m_X\right)\to\left(Y,m_Y\right)$ es una función definida por, $f(x)=y_0$ para todo $x\in X$, entonces *f* es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua.

Demostración: Sea *V* un conjunto m_Y-abierto en *Y*, entonces para probar que

f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua, se debe considerar

Caso I: $y_0 \in V$.

En este caso, como $f(x)=y_0$, para cada $x\in X$, es claro que $f^{-1}(V)=X$. Luego, como θ y δ son *m*-operadores sobre m_Y, se deduce que $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(\delta(V))\subset X$ y $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(\theta(V))\subset X$; además, como $f^{-1}(V)=X$, se sigue que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))=\alpha(X)$ y $\beta(f^{-1}(\theta(V)))=\beta(X)$; a su vez, puesto que α y β son operadores asociados a la m_X-estructura, se obtiene que $\alpha(X)=\beta(X)=X$ por lo que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))=X$ y $\beta(f^{-1}(\theta(V)))=X$; así, $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))=\varnothing\in I$. Por lo tanto, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua.

Caso II: $y_0\notin V$, pero $y_0\in\delta(V)$ y $y_0\in\theta(V)$.

En este caso, como $y_0\in\delta(V)$, $y_0\in\theta(V)$ y $f(x)=y_0$ para cada $x\in X$, es inmediato que $X\subset f^{-1}(\delta(V))$ y $X\subset f^{-1}(\theta(V))$. Luego, de manera similar al Caso I, se obtiene que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))=X$ y $\beta(f^{-1}(\theta(V)))=X$; por lo que, $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus \beta(f^{-1}(\theta(V)))=\varnothing\in I$. Y así, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua.

Caso III: $y_0\notin\theta(V)$.

En este caso, como $f(x)=y_0$ para todo $x\in X$ y $y_0\notin\theta(V)$ se tiene que $f^{-1}(\theta(V))=\varnothing$; luego, como $\delta(V)\subset\theta(V)$, se sigue que $f^{-1}(\delta(V))=\varnothing$ y como

$\alpha(\varnothing)=\varnothing$, se deduce que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))=\varnothing\in I$. Por lo tanto, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua.

Caso IV: $y_0\notin\delta(V)$ y $y_0\in\theta(V)$.

En este caso, como $y_0\notin\delta(V)$ y $\alpha(\varnothing)=\varnothing$, es claro que $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))=\varnothing$; y a su vez, como $y_0\in\theta(V)$ y $\beta(X)=X$, entonces $\beta(f^{-1}(\theta(V)))=X$. De modo que, $\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I.$ En consecuencia, f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua.■

Los siguientes teoremas son propiedades relativas a las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continuas que generalizan algunos de los teoremas dados en la sección 2 y 3 del Capítulo 3, en el sentido que cuando las estructuras minimales son topologías se recuperan tales teoremas.

Teorema 4.2.2. Si β es un *m*-operador monótono, $\theta\prec\theta^*$ y $f:(X,m_X)\to(Y,m_Y)$ una función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m-$continua, entonces f es $(\alpha,\beta,\theta^*,\delta,I)_m-$continua.

Demostración: Sea V un m^Y-abierto en Y y suponga que f es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua, entonces

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I. \qquad (1)$$

Luego, como $\theta \prec \theta^*$, se tiene que

$$\theta(V) \subset \theta^*(V),$$

de donde

$$f^{-1}(\theta(V)) \subset f^{-1}(\theta^*(V));$$

pero, β es un *m*-operador monótono, por lo que

$$\beta(f^{-1}(\theta(V))) \subset \beta(f^{-1}(\theta^*(V))),$$

y por tanto

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right) \setminus \beta\left(f^{-1}(\theta^*(V))\right) \subset \alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right) \setminus \beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right). \qquad (2)$$

Así, por (1) y (2) y la propiedad hereditaria del ideal *I*, se obtiene que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \setminus \beta(f^{-1}(\theta^*(V))) \in I.$$

Por lo tanto, *f* es $(\alpha, \beta, \theta^*, \delta, I)_m -$ continua. ■

Teorema 4.2.3. Si $f:(X, m_X) \to (Y, m_Y)$ es una función $(\alpha, \beta, \theta, \delta, I)_m$-continua y satisface la condición de *m*-abierto con respecto al *m*-operador β, entonces *f* es $(\alpha, \beta, m_Y - Int\,\theta, \delta, I)_m -$ continua.

Demostración: Sea *V* un m_Y-abierto en Y y suponga que *f* es $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua, entonces

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V)))\setminus\beta(f^{-1}(\theta(V)))\in I. \qquad (1)$$

Luego, como *f* satisface la condición de *m*-abierto con respecto al *m*-operador β, se tiene de la Definición 4.1.11 que

$$\beta(f^{-1}(\theta(V)))\subset\beta(f^{-1}(m_Y-Int\,\theta(V))).$$

De modo que,

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(m_Y-Int\,\theta(V))\right)\subset\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(\theta(V))\right).$$

(2)

Así, por (1), (2) y la propiedad hereditaria del ideal *I*, resulta que

$$\alpha\left(f^{-1}(\delta(V))\right)\setminus\beta\left(f^{-1}(m_Y-Int\,\theta(V))\right)\in I.$$

Por lo tanto, *f* es $(\alpha,\beta,m_Y-Int\,\theta,\delta,I)_m-$continua.

■

Teorema 4.2.4. Sea $f:(X,m_X)\to(Y,m_Y)$ una función $(\alpha,\ m_X-Int,\ \theta,\ \delta,\{\varnothing\})_m-$ continua. Suponga que (Y,m_Y) es $(m_X,\theta)-T_1$, m_X satisface la condición *(B)* de Maki y que $B\subset\alpha(B)$ para todo $B\subset X$, entonces las preimagenes de los conjuntos unitarios de *Y* son conjuntos m_X-cerrados.

Demostración: Sea $q \in Y$, para mostrar que $f^{-1}(\{q\})$ es un $m_X -$cerrado se prueba que su complemento $A = \{x \in X : f(x) \neq q\}$ es m_X-abierto en *X*. Si $A = X$ ó $A = \varnothing$, se tiene que A es m_X-abierto en X en ambos casos. Suponga que $A \neq X$, $A \neq \varnothing$ y sea $a \in A$, entonces $f(a) \neq q$ para cada $a \in A$ y como Y es $(m_X, \theta) - T_1)$, existe según la Definición 4.1.14, un $m_Y -$abierto V en Y tal que

$$f(a) \in V \text{ y } q \notin \theta(V). \qquad (1)$$

Además, como f es $(\alpha, Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})_m -$continua, también se tiene que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset m_X - Int\, f^{-1}(\theta(V))$; así, como m_X satisface la condición *(B)* de Maki, al tomar $U = m_X - Int\, f^{-1}(\theta(V))$, el cual es un m_X-abierto en X tal que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset U \subset f^{-1}(\theta(V)), \qquad (2)$$

De modo que $f(U) \subset f(f^{-1}(\theta(V)))$ y como $f(f^{-1}(\theta(V))) \subset \theta(V)$, se obtiene que

$$f(U) \subset \theta(V). \qquad (3)$$

Por otro lado, como $f(a) \in V$ y $V \subset \delta(V)$, pues δ es un *m*-operador sobre la m_Y-estructura, resulta que $a \in f^{-1}(V)$ y $a \in f^{-1}(\delta(V))$. Luego, como $f^{-1}(\delta(V)) \subset X$, se sigue que $f^{-1}(\delta(V)) \subset \alpha(f^{-1}(\delta(V)))$ por hipótesis, por tanto, $a \in \alpha(f^{-1}(\delta(V)))$. Así, de esto y el hecho de que $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset U$, por (2), se obtiene que $a \in U$. Ahora, sólo resta verificar que $U \subset A$ o equivalentemente que

$U \cap X \setminus A = \varnothing$. Suponga lo contrario que $U \cap X \setminus A \neq \varnothing$ y sea $b \in U \cap X \setminus A$, entonces $b \in U$ y $b \in X \setminus A$, de manera que $f(b) \in f(U)$ y $f(b) = q$, respectivamente; por lo que $q \in f(U)$; pero, según (3) $f(U) \subset \theta(V)$, así $q \in \theta(V)$, lo cual es una contradicción, ya que de (1) $q \notin \theta(V)$; por tanto, $U \subset A$. En consecuencia, existe un m_X-abierto *U* en *X*, tal que $a \in U \subset A$, es decir, *A* es m_X-abierto en *X*. ■

Teorema 4.2.5: Sea $f:(X, m_X) \to (Y, m_Y)$ una función $(\alpha, m_X - Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})_m$-continua. Si $A \subset \alpha(A)$ para todo $A \subset X$, m_X satisface la condición *(B)* de Maki y K es un subconjunto *m*-compacto de *X*, entonces $f(K)$ es $\theta_m -$compacto en *Y*.

Demostración: Sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento m_Y-abierto de $f(K)$ y considere la colección $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{V} : V \cap f(K) \neq \varnothing\}$, entonces, existe $V_k \in \mathcal{V}'$ tal que

$$f(k) \in V_k \text{, para cada } k \in K. \quad (1)$$

Luego, como f es $(\alpha, m_X - Int, \theta, \delta, \{\varnothing\})_m$-continua, se tiene que para cada m_Y- abierto V en Y, $\alpha(f^{-1}(\delta(V))) \subset m_X - Int(f^{-1}(\theta(V))),$ en particular, para cada m_Y- abierto V_k, con $k \in K$, $\alpha\left(f^{-1}(\delta(V_k))\right) \subset m_X - Int\left(f^{-1}(\theta(V_k))\right).$ Así, al tomar $W_k = m_X - Int\left(f^{-1}(\theta(V_k))\right)$, se sigue que W_k es un m_X-abierto en *X* tal que

$$\alpha(f^{-1}(\delta(V_k))) \subset W_k \subset f^{-1}(\theta(V_k)) \text{, para cada } k \in K. \quad (2)$$

Por otra parte, como $f^{-1}(\delta(V_k)) \subset X$, para cada $k \in K$, entonces de la hipótesis para α

$$f^{-1}(\delta(V_k)) \subset \alpha\left(f^{-1}(\delta(V_k))\right), \tag{3}$$

Y a su vez, como $V_k \subset \delta(V_k)$ para cada $k \in K$, pues δ es un *m*-operador sobre la m_Y-estructura, se tiene que $f^{-1}(V_k) \subset f^{-1}(\delta(V_k))$; a continuación, como $k \in f^{-1}(V_k)$ para cada $k \in K$, por (1), se sigue que $k \in f^{-1}(\delta(V_k))$, de modo que $k \in \alpha(f^{-1}(\delta(V_k)))$, por (3), lo cual implica que $k \in W_k$, por (2). Así, $K = \bigcup_{k\in K}\{k\} \subset \bigcup_{k\in K}\{W_k\}.$ Por consiguiente, la colección $\{W_k : k \in K\}$ es un cubrimiento m_X-abierto de *K* y como *K* es *m*-compacto, entonces por la Definición 4.1.16 (i), existen $k_1, \ldots k_n$ elementos en *K*, tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{k_i}$; por lo cual,

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(W_{k_i}). \tag{4}$$

Ahora bien, $f(W_{k_i}) \subset f(f^{-1}(\theta(V_{k_i}))) \subset \theta(V_{k_i})$ para cada $1 \leq i \leq n$, por (2); así,

$$\bigcup_{i=1}^{n} f(W_{k_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \theta(V_{k_i}). \tag{5}$$

Por tanto, de (4) y (5), $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \theta(V_{k_i}),$ y como consecuencia de la Definición 4.1.16 (ii), se concluye que $f(K)$ es θ_m-compacto. ∎

4.3 Comentario Sobre Las Funciones ($\alpha,\beta,\theta,\delta,I$)-Continuas

En esta sección, se caracteriza bajo el concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m$-continua una forma débil de continuidad, dada en el Capítulo 2, la función irresoluta que no es caracterizada a través de la definición de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua.

Sean (X,τ) y (Y,φ) dos espacios topológicos y $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ una función.

Si *f* es irresoluta, se tiene que *f* es $(Id, Cl\ Int, Id, Id, \{\varnothing\})$-continua. Pero, el recíproco no es válido, ya que el Ejemplo 2.1.1 muestra que *f* no es irresoluta y el mismo sirve para verificar que *f* es $(Id, Cl\ Int, Id, Id, \{\varnothing\})$-continua. Por lo que, esta forma débil de continuidad no puede ser caracterizada por la función $(Id, Cl\ Int, Id, Id, \{\varnothing\})-$continua.

Ahora, si se sustituye (Y,φ) por el *m*-espacio (Y,m_Y), donde m_Y = {*A*: *A* es semi-abierto}, en la función *f* y se observa que el operador $\beta = Cl\ Int$ es un *m*-operador, entonces se puede caracterizar la función irresoluta mediante la definición de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m-$continua como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. Sea $f:(X,\tau)\to(Y,m_Y)$ una función, donde m_Y ={*A*: *A* es semi-abierto}, entonces *f* es irresoluta si y sólo si *f* es $(Id, Cl\ Int, Id, Id, \{\varnothing\})_m-$continua.

Demostración: Sea *V* un m_Y-abierto, es decir, *V* es un conjunto semi-abierto en

Y y suponga que *f* es irresoluta, entonces $f^{-1}(V) \subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)$, lo cual implica que $f^{-1}(V) \square Cl\ Int(f^{-1}(V)) \in \{\varnothing\}$. Por lo tanto, *f* es $(Id, Cl\ Int, Id, Id, \{\varnothing\})_m -$ continua.

Recíprocamente, sea *V* un semi-abierto en *Y*, entonces $V \in m_Y$ y como *f* es $(Id, Cl\ Int, Id, Id, \{\varnothing\})_m -$ continua, se sigue que, $f^{-1}(V) \square Cl\ Int(f^{-1}(V)) \in \{\varnothing\}$, de modo que $f^{-1}(V) \subset Cl\left(Int(f^{-1}(V))\right)$ y esto significa que $f^{-1}(V)$ es semi-abierto en *X*. Así, *f* es irresoluta. ■

CONCLUSIONES

En este trabajo, se realizó un estudio detallado de una clase de funciones denominadas funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas, se demostró que dichas funciones generalizan y unifican muchas de las formas débiles de continuidad conocidas en la literatura, en el sentido que para ciertos operadores e ideales específicos se recobran algunas nociones de funciones débilmente continuas, entre las cuales podemos mencionar: *densely aproached*, *quasi*-continua, *almost*-continua, *weakly* continua, entre otras.

Utilizando el concepto de estructura minimal, se definió una nueva clase de funciones denominada $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m-$continua, se probó que dichas funciones generalizan a las funciones $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuas, en el sentido que cuando las estructuras minimales son topologías, entonces se recupera el concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua. Además, se caracterizó a través del concepto de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)_m-$continua, una forma débil de continuidad, la función irresoluta, que no es caracterizada por la definición de función $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continua.

BIBLIOGRAFÍA

Crossley, S. G. and S.K. Hildenbrand. 1972. Semi-topological properties. *Fund. Math.,74*: 233-254.

Fréchet, M. 1910. Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Ann., 68*: 145-168.

Gauld, D. B. 1981. Topologies related to notions of near continuity. *Kyungpook Math., 29*: 195-204.

Hausdorff, F. 1914. Bemerkung ubre den inhalt von punktmengen. *Mathematischy Annalen, 75*: 428-434.

Jankovic, D. and Hamlett, T. R. 1990. New topologies from old via ideals. *Amer. Math. Monthly, 97*: 295-310.

Kasahara, S. 1979. Operation compact spaces. *Math*. *Japonica*, *24*: 97-105.

Levine, N. 1961. A descomposition of continuity in topological spaces. *Amer*. *Math. Monthly*, *68*: 44-66.

Levine, N. 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. *Amer. Math. Monthly*, *70*: 36-41.

Maki, H. 1996. On Generalizing semi-open and preopen sets. *Report for Meeting in Topological Spaces and its Applications.* Yatsushiro College of Technology.13-18.

Milewski E. 1994. *The topology problem solver*. Research and Education Association. Piscataway. New Jersey.

Munkres, J. R. 2002. *Topología*. Segunda Edición. Pearson Educación. Madrid.

Ogata, H. 1991. Operation on topological spaces and associated topology, *Math*. *Japonica*, *1*: 175-184.

Popa, V. and Noiri, T. 2000. On almost *m*-continuous functions. *Mathematicae Notae*, *40*:75-94.

Porter, J. and Thomas, J. 1970. On H-closed and minimal Hausdorff spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *138*: 159-170.

Singal, M. K. and Singal, A. R. 1968. Almost continuous mappings. *Yokohama Math J.*, *16*: 63-72.

Singal, M. K. and Mathur, A. 1969. On nearly compact spaces. *Boll. Un. Mat. Ital., 4*: 702-710.

Tong, J. 1982. Weak almost continuous mappings and weak nearly compact spaces. *Boll. Un. Mat. Ital., 6*: 385-391.

Vielma, J. y Rosas, E. 2004. $(\alpha,\beta,\theta,\delta,I)-$continuous mappings and their descomposition. *Divulgaciones Matemáticas, 12*:53-64.

Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

Título	**Variaciones de Funciones Continuas**
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Ramírez E., Neyra C.	CVLAC	10154980
	e-mail	neycaro@cantv.net
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Formas de continuidad
Operador expansivo
Operador intersección
Operadores mutuamente duales
Ideal
Estructura minimal

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias Básicas	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo, se estudia una generalización de algunos tipos de funciones que guardan una relación con el concepto clásico de continuidad, usando los conceptos de operador e ideal topológico. Luego, utilizando la noción de estructura minimal, se define y se estudia una nueva clase de funciones que generaliza los conceptos antes mencionados.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Salas B., Margot del V.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [X] JU [ ]
	CVLAC	13016711
	e-mail	msalas@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
Sanabria, José E.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X]
	CVLAC	11382634
	e-mail	jsanabria@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
Carpintero F., Carlos R.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X]
	CVLAC	08443180
	e-mail	ccarpi@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2008	05	02

Lenguaje: spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
TESISCAROLINAESTEVISZ	application / Word.doc

Alcance:

Espacial : **Universal**
(Opcional)

Temporal: **Intemporal**
(Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo:
Licenciada en Matemáticas

Nivel Asociado con el Trabajo: **Licenciatura**

Área de Estudio:

Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

Universidad de Oriente

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/5

Derechos:

Yo, Neyra Carolina Ramírez Esteviz, autora de la tesis de grado titulada: *Variaciones de Funciones Continuas*, autorizo la publicación del título y resumen de este trabajo.

Br. Neyra Ramírez
AUTOR 1

AUTOR 2

AUTOR 3

AUTOR 4

M.Sc. Margot Salas
TUTOR

M.Sc. José Sanabria
JURADO 1

Dr. Carlos Carpintero
JURADO 2

POR LA SUBCOMISIÓN DE TESIS:

M.Sc. Juan González

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
NÚCLEO DE SUCRE