UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# PROPIEDADES DEL OPERADOR MULTIPLICACIÓN SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE BANACH DE FUNCIONES ANALÍTICAS

(Modalidad: Tesis de grado)

GABRIEL MOISÉS ANTÓN MARVAL

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2011

PROPIEDADES DEL OPERADOR MULTIPLICACIÓN SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE BANACH DE FUNCIONES ANALÍTICAS

APROBADO POR:

Prof. Julio C. Ramos Fernández

Asesor Académico

Prof. Carlos Carpintero

Jurado Principal

Prof. Wilmer Arzolay

Jurado Principal

## DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi madre Dioleida Dolores Marval Fernández, a mi padre Rafael José Antón Ramos, a mis hermanos Rafael José Antón Marval, Daniel Alejandro Antón Marval, Marghy Mildred Antón Marval, Loly Nathaly Antón Marval, y a mi hija Emily Nathaly Antón Díaz: por todos los momentos que hemos pasado y compartido apoyandonos como familia.

## AGRADECIMIENTOS


Agradezco principalmente a Dios por permitirme alcanzar esta meta tan anhelada.

A mi hija Emily por ser mi alegría, mi inspiración y mi más apreciado motivo de superación.

Al profesor Julio César Ramos Fernández: muchas gracias por tu paciencia e incondicional apoyo tío, te estaré agradecido siempre.

A la profesora Magot Salas: gracias por todos los consejos y el interés sincero de apoyarme en los momentos más acertados en que lo necesité.

A Clianny García: muchas gracias por darme ánimo para superar todas mis metas y por no dejarme decaer.

A los profesores Carlos Carpintero, Wilmer Arzolay, Eduard Trousselot, Andrés Malaver y Jacques Laforgue, por las revisiones hechas en el presente trabajo y sus acertadas observaciones.

A todos los profesores y profesoras del Departamento de Matemática que de alguna forma u otra contribuyeron con mi formación académica.

A mis compañeros de estudios y conocidos.

## ÍNDICE

**RESUMEN**

En este trabajo se estudiaron las propiedades de los espacios tipo Korenblum generalizados $H_v^\infty$, los cuales aparecen como una generalización de los espacios de Korenblum o tipo Bloch $H_\alpha^\infty$. También se estudiaron las propiedades del Operador Multiplicación $M_\varphi$ (inducido por la función analítica $\varphi$) actuando sobre el espacio $H_v^\infty$. Se caracterizaron además, la continuidad, la invertibilidad, la compacidad, y las propiedades Fredholm y rango cerrado del operador $M_\varphi$ a través de las propiedades de las funciones pesos $v$ presentes en la definición del espacio $H_v^\infty$ y los coeficientes $\varphi$ de dicho operador.

# INTRODUCCIÓN

En el año 1925, André Bloch estudió el comportamiento de las funciones analíticas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ considerado la normalización $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y generando una cadena de estudios basados principalmente en dos planteamientos muy famosos. El primero establece la determinación de la constante de Bloch (ver Conway (1990)), esto es, una constante $C > 0$ tal que si $f(z)$ es una función analítica en $\mathbb{D}$ con coeficiente de Taylor $\{a_n\}$ y $a_0 = a_1 - 1 = 0$, entonces la imagen de $\mathbb{D}$ sobre $f$ contiene un disco de radio $C$ sobre el punto $a_0$. La existencia de tal constante es un teorema célebre de Bloch, ver Ahlfors y Grunsky (1937) y Anderson (1985) para resultados parciales y otras referencias. El segundo problema es determinar exactamente qué función en el espacio de Bloch posee la propiedad de que los coeficientes de Taylor se aproximen a cero. Algunos resultados parciales sobre el comportamiento de los coeficientes de Taylor de funciones de Bloch fueron hechos en Anderson (1985), Anderson, Clunie y Pommerenke (1974); Bennett, Stegenga y Timoney (1981), y Fernández (1984). (Ver Anderson (1985) y Anderson, Clunie y Pommerenke (1974) para más problemas abiertos sobre los espacios de Bloch). Por supuesto, las propiedades requeridas en espacios de Bloch se derivan de la idea del teorema de Bloch.

Formalmente, el espacio de Bloch, denotado por $\mathcal{B}$, consiste de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty,$$

y el pequeño espacio de Bloch, $\mathcal{B}_0$, está definido por las funciones analíticas que cumplen con la propiedad

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1 - |z|^2)|f'(z)| = 0.$$

Existen pocas fuentes para resultados y referencias sobre funciones de Bloch en la actualidad, entre las cuales se puede contar con el excelente texto de Zhu (1990).

El estudio de los espacios de Bloch atrajo el interés de estudiar otros espacios similares. En 1970, Rubel y Shields consideraron los espacios de Banach de funciones analíticas $f$, definidas en el disco abierto $\mathbb{D}$ y tales que $|f(z)|\varphi(|z|) \to 0$ cuando $|z| \to 1^-$, con norma

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|\varphi(z), \tag{1}$$

donde $\varphi$ denota una función continua, decreciente y de valores reales en $0 \le r \le 1$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(r) > 0$ para $r < 1$ y $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ para $z \in \mathbb{D}$. Su principal resultado fue identificar naturalmente los espacios de Banach de funciones analíticas $f$ en $\mathbb{D}$ para los cuales $f\varphi$ es acotada en $\mathbb{D}$ con la norma (1), con su segundo dual. En el año 1971, Shields y Williams consideraron funciones $\varphi$ y $\psi$ continuas y positivas en $[0, 1)$ con $\varphi(r) \to 0$ cuando $r \to 1$ y $\int_0^1 \psi(r)dr < \infty$, denotando por $\mathcal{A}_0(\varphi)$ y $\mathcal{A}_\infty(\varphi)$ los espacios de Banach de funciones analíticas $f$ en $\mathbb{D}$ con $|f(z)|\varphi(|z|) \to 0$ cuando $|z| \to 1$ y $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|\varphi(|z|) \le \infty$, respectivamente. En ambos espacios, la norma se define por $\|f\|_\varphi = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|\varphi(|z|)$. También definieron y estudiaron, en su trabajo, el espacio $\mathcal{A}^1(\psi)$ de funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D}$ con la norma $\|f\|_\psi = \int\int_{\mathbb{D}} |f(z)|\psi(|z|)dxdy < \infty$, exhibiendo proyecciones de $C_0(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}_0(\varphi)$, de $L^1(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^1(\psi)$ y de $L^\infty$ sobre $\mathcal{A}_\infty(\varphi)$. Usando estas proyecciones, mostraron que el dual de $\mathcal{A}_0(\varphi)$ es topológicamente isomorfo a $\mathcal{A}^1(\psi)$ para una apropiada, pero no única, elección de $\psi$.

En 1975, Korenblum extiende la teoría de Nevanlinna para la clase $\mathcal{A}^{-\infty}$ de funciones $f$ holomorfas en $\mathbb{D}$ que satisfacen la condición:

$$|f(z)| \le C_f(1 - |z|)^{-n},$$

con $z \in \mathbb{D}$, $n > 0$ y para la correspondiente clase $\mathcal{R}$ de funciones meromorfas $h$,

$$h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$$

con $f, g \in \mathcal{A}^{-\infty}$.

En 1993, Zhu estudia una clase generalizada de espacios de Bloch. Específicamente, para $\alpha > 0$ denota por $\mathcal{B}_\alpha$ al espacio de funciones analíticas $f$ en $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$\|f\|_\alpha = \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |f(z)| : z \in \mathbb{D}\} < +\infty.$$

Éste nota que tales espacios coinciden con los espacios estudiados en Shields y Williams (1971) y Korenblum (1975) para $\alpha > 1$, prueba de la cual se puede disponer en el Capítulo 2, Teorema 2.1.2 del presente trabajo. El principal resultado de Zhu fue unificar la teoría de funciones de Bloch, las funciones de Lipschitz y las funciones estudiadas en Shields y Williams (1971) y Korenblum (1975).

Uno de los elementos más utilizados en el estudio de espacios de funciones analíticas son los Operadores Multiplicación, los cuales aparecen de manera natural en el estudio de espacios invariantes. En los espacios de Bloch y en el pequeño espacio de Bloch, los multiplicadores puntuales fueron caracterizados primero por Arazy (1982) en el caso de un disco abierto y más tarde redescubierto por Zhu (1989) en el caso de la bola unitaria abierta. Los coeficientes de los multiplicadores de funciones de Bloch son descritos en Anderson y Shields (1976). Por otra parte, como una aplicación del resultado principal de su trabajo, Shields y Williams (1971) caracterizan los coeficientes de los multiplicadores en los espacios $\mathcal{A}_0(\varphi)$, $\mathcal{A}^1(\psi)$ y $\mathcal{A}_\infty(\varphi)$.

En el presente trabajo, se estudiaron algunas de las propiedades más comunes de los Operadores Multiplicación puntual $M_\varphi$, los cuales se encuentran definidos por

$$M_\varphi f = \varphi \cdot f$$

sobre el subespacio de funciones analíticas $H_v^\infty$.

En el primer capítulo se introducen, a manera de preliminares, las teorías del análisis funcional y de funciones analíticas que son necesarias para el estudio en los dos capítulos posteriores. En la primera sección se establecen las definiciones y resultados básicos del análisis funcional referentes a la teoría de espacios de Banach y operadores lineales. En la segunda sección se resumen algunas definiciones de la teoría de álgebra de Banach, pasando por la teoría espectral e introduciendo el concepto de la norma esencial de un operador y caracterizando a estos. Esta norma es de utilidad para mostrar qué tan cerca se encuentra el Operador Multiplicación del espacio $\mathcal{K}$ de los operadores compactos sobre $H_v^\infty$. En la tercera sección se apilan los conceptos y resultados básicos de las funciones analíticas, resaltando entre estos el principio del módulo máximo, el teorema de la aplicación abierta, el principio de identidad de Weierstrass y el principio de los ceros aislados. En la cuarta sección, se estudian los automorfismos del disco y la métrica pseudohiperbólica, señalando la invarianza por automorfismos del disco. En la quinta sección, se estudia la compacidad y convergencia de las funciones analíticas a través de la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos y se enuncian tanto el teorema de Arzelá-Ascoli como el teorema de Montel. Finalmente, en la sexta sección se hace un estudio exhaustivo del espacio de funciones analíticas acotadas. Dicha sección tiene como fin establecer la factorización de los elementos de este espacio en términos de productos de Blaschke, funciones singulares interiores y funciones exteriores.

En el segundo capítulo, se define y estudia el espacio de funciones analíticas $H_v^\infty$ y sus propiedades, el cual es nombrado espacio de Koremblun o tipo Bloch. En la primera sección, se define, a manera a preliminares, el espacio de Korenblum $H_\alpha^\infty$, el cual (se demuestra) es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\alpha$. Se prueba además, que $\mathcal{B}_{\alpha-1} = H_\alpha^\infty$, como se mencionó anteriormente, lo cual justifica la definición de espacio de Korenblum o tipo Bloch. En la segunda sección, se centra la atención en el espacio de Korenblum pequeño, denotado por $H_\alpha^0$, mostrando que éste es la clausura del conjunto de los polinomios en $H_\alpha^\infty$. En la tercera sección, se introducen las nociones, ejemplos y resultados referidos a las funciones pesos que intervienen en la definición del espacio $H_v^\infty$, resaltando sus propiedades, la importancia de sus llamados pesos asociados y las definiciones de algunos pesos importantes en el desarrollo del trabajo. En la cuarta sección, se define formalmente el espacio $H_v^\infty$ mediante la relación $\|\cdot\|_v$. Este espacio es llamado espacio tipo Korenblum generalizado y es el espacio sobre el cual se estudian las propiedades del Operador Multiplicación en el posterior capítulo. Se demuestra en esta cuarta sección, que el espacio $H_v^\infty$ es de Banach con la norma $\|\cdot\|_v$, que contiene al espacio de funciones analíticas acotadas $H^\infty$ y la isometría entre los espacios $H_v^\infty$ y $H_{\widetilde{v}_e}^\infty$, donde $\widetilde{v}_e$ denota el peso asociado a $v$ sobre $\mathbb{D}$. En la quinta y última sección de este capítulo se estudia la estructura del espacio $H_v^0$, el cual generaliza al espacio de Korenblum pequeño $H_\alpha^0$.

En el tercer y último capítulo se abordan las propiedades más clásicas del Operador Multiplicación, $M_\varphi$, sobre el espacio $H_v^\infty$. En la primera sección se realiza una breve introducción al Operador Multiplicación sobre el espacio de funciones analíticas. En la segunda sección, se estudia la continuidad de $M_\varphi$ sobre $H_v^\infty$ por medio de los coeficientes $\varphi$ que define este operador. En la tercera sección, se caracteriza la invertibilidad de $M_\varphi$ a través de las propiedades de $\varphi$. En la cuarta sección, se demuestra que el operador $M_\varphi$ no es compacto sobre $H_v^\infty$. Por tal razón, en la quinta sección se estudia parte de la teoría de la llamada norma esencial de $M_\varphi$ sobre $H_v^\infty$, la cual no es más que la distancia entre el operador $M_\varphi$ y el espacio de operadores compactos $\mathcal{K}$. En la sexta sección, se dan las condiciones para las cuales $M_\varphi$ es Fredholm y en la séptima sección se culmina el trabajo dando los resultados que caracterizan al operador $M_\varphi$ con rango cerrado.

# CAPÍTULO 1
# PRELIMINARES

En este capítulo se resumen los conceptos y resultados básicos referidos al análisis funcional y al análisis complejo necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. En las dos primeras secciones se abarcan principalmente las propiedades de los operadores lineales sobre espacios normados, teoría espectral y la norma esencial de un operador. En la tercera sección se cuenta con los teoremas básicos más relevantes sobre funciones analíticas, entre los cuales se pueden nombrar el principio del módulo máximo para funciones analíticas, el teorema de la aplicación abierta, el principio de identidad de Weierstass y el principio de los ceros aislados. En la cuarta sección, se consideran los automorfismos del disco y la métrica pseudohiperbólica. En la quinta sección se estudia la convergencia de funciones analíticas sobre subconjuntos compactos, lo cual será de primordial necesidad en las pruebas de la completitud de los subespacios de funciones analíticas estudiados posteriormente. Finalmente, en la sexta sección se analiza la estructura de las funciones analíticas y acotadas sobre $\mathbb{D}$ con el fin de establecer la factorización interior-exterior de la cual disfruta cada función en este espacio. En esta última sección se definen y caracterizan además, las sucesiones interpolantes para este espacio.

## 1.1 Elementos del análisis funcional

En esta sección se resume las definiciones y los resultados de un curso de análisis funcional, requeridos para el desarrollo de los posteriores capítulos. Las definiciones y resultados aquí presentes pueden ser consultados en Bourbaki (1989), Roman (1993) y Vera y Alegria (1997).

Se denota por $X$ al espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, el cual puede ser

$\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Recuerde que una familia finita de vectores $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ se dice *linealmente independiente* cuando

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Análogamente, una colección arbitraria de vectores es linealmente independiente si cualquier subconjunto finito de ella es linealmente independiente. Se dice además, que un conjunto $A \subset X$ linealmente independiente es una *base* de $X$, con $dimX = n$, si todo vector $x \in X$ puede expresarse como combinación lineal de elementos de $A$, es decir, si existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ y vectores $x_1, \cdots, x_n \in A$ tales que

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Se entenderá siempre a las combinaciones lineales como finitas, aunque haya un número infinito de elementos en la base. Se puede mostrar (como una aplicación del lema de Zorn) que todo espacio vectorial posee una base. Además todas las bases tienen el mismo número de elementos, llamado *dimensión (algebraica)* del espacio.

Un conjunto $Y \subset X$ es subespacio de $X$ si $Y$ es también espacio vectorial (con las mismas operaciones). Para un vector fijo $x \in X$, se define la *traslación* del subespacio $Y$, denotado por $x + Y$ por

$$x + Y = \{x + y : y \in Y\};$$

con esta notación, se define el *espacio cociente* $X/Y$ de la siguiente manera:

$$X/Y = \{x + Y : x \in X\};$$

resulta que efectivamente $X/Y$ es un espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned} (x + Y) + (s + Y) &= (x + s) + Y, \\ \lambda (x + Y) &= (\lambda x) + Y. \end{aligned}$$

El vector nulo de este espacio es $0+Y$. Dos elementos $(x+Y)$, $(s+Y) \in X/Y$ son iguales si y sólo si $x-s \in Y$. Además, se cumple la siguiente relación

$$dim\,(Y) + dim\,(X/Y) = dim\,(X)\,, \tag{1.1}$$

donde a la cantidad $dim\,(X/Y)$ se le conoce como *la codimensión* (con respecto a $X$) del subespacio $Y$ y se denota por $codim(Y)$. Así la igualdad (1.1) puede ser sustituida por

$$dim\,(Y) + codim\,(Y) = dim\,(X)\,.$$

También se cuenta con las siguientes propiedades

**Proposición 1.1.1.** *Sea $X$ un espacio vectorial:*

1. *Si $M$, $N$ son dos subespacios de $X$, tal que $N \subset M$, entonces*

$$codimM \leq codimN \leq dimX.$$

2. *Si $M$ y $N$ son dos subespacios de $X$, entonces*

$$codim(M+N) + codim(M \cap N) = codimM + codimN,$$

*donde $M+N = \{m+n : m \in M,\, n \in N\}$.*

3. *Si $\{F_i\}$ es una familia finita de subespacios de $X$, entonces*

$$codim\left(\bigcap_i F_i\right) \leq \sum_i codimF_i.$$

**Demostración.** (Ver Bourbaki (1989), pag. 297).

Una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ es una *seminorma* sobre $X$ si verifica las siguientes condiciones:

(1) Para todo $x, y \in X$, se cumple $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) Para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

Si además $\|\cdot\|$ verifica la condición adicional; " $\|x\| = 0$ implica $x = 0$ ", entonces $\|\cdot\|$ se llama una *norma* sobre $X$ y en este caso se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado.*

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ es una *sucesión de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$.

Una de las estructuras más importantes en el análisis funcional, debido a las propiedades con que se cuenta en la manipulación de sus elementos, es la de espacio de Banach. Un *espacio de Banach* es un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ completo como espacio métrico $(X, d)$, cuya métrica $d$ está definida mediante la norma $\|\cdot\|$ sobre $X$, en otras palabras, un espacio de Banach es un espacio normado donde cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $x \in X$.

Otro elemento usado constantemente en el presente trabajo, es el de operador lineal. Un *operador lineal* $T$ entre espacios vectoriales $X$ e $Y$, no es más que una función $T : X \to Y$ que cumple

$$T(\alpha x + \beta y) \;=\; \alpha T(x) + \beta T(y),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$. Si $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos espacios normados, entonces el operador $T : X \to Y$ es *acotado* si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \tag{1.2}$$

para todo $x \in X$. Si no existe una constante que cumpla (1.2) para todo $x \in X$, se dice que $T$ no es acotado. El conjunto de todas las transformaciones lineales y acotadas de $X$ en $Y$ se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ y en el caso que $Y = X$, se escribe $\mathcal{L}(X)$. El ínfimo de los números positivos $M$ que satisfacen (1.2) se conoce como la *norma del operador* $T$ y se denota por $\|T\|$.

Es conocido que la norma de un operador se puede calcular mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

Además, se tiene la desigualdad

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X,$$

para todo $x \in X$.

La suficiencia y necesidad para que un operador lineal sea acotado es que sea continuo. Más aún, si $T$ es continuo en 0 entonces es continuo en todo el espacio.

Para $X$ e $Y$ espacios normados y $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal, se define el *núcleo del operador* $T$ por

$$Ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\},$$

donde cada operador lineal $T : X \to Y$ será inyectivo si y sólo si $Ker(T) = \{0\}$. Es claro que $Ker(T)$ siempre es un subconjunto cerrado de $D(T)$. Además, como consecuencia del primer teorema fundamental de isomorfismos de grupos, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.1.2.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces el espacio cociente $X/Ker(T)$ es isomorfo al rango $T(X)$. En particular,*

$$dim\left(X/Ker(T)\right) = dim\left(T(X)\right).$$

**Demostración.** (Ver Kostrikin (1992), pag. 151).

Si $T : X \to Y$ es un transformación biyectiva se dice que $T$ es *no singular* o *invertible.* En este caso se define el *operador inverso* $T^{-1} : Y \to X$ mediante

$T^{-1}(y) = x$ si y sólo si $Tx = y$, es decir, $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Aquí la linealidad de $T$ implica la linealidad de $T^{-1}$.

Si $X$ es un espacio de Banach, el operador $T \in \mathcal{L}(X)$ se dice *acotado inferiormente* si y sólo si existe $c > 0$ tal que

$$||Tx||_Y \;\; \geq \;\; c||x||_X,$$

para todo $x \in X$.

De la definición anterior se obtiene el siguiente resultado para operadores invertibles.

**Teorema 1.1.1.** *Sean $X$ e $Y$ espacios normados y $T : X \to T(X) \subset Y$ un operador lineal, entonces existe una constante positiva c tal que*

$$\|Tx\|_Y \;\; \geq \;\; c\|x\|_X,$$

*para todo $x \in X$, si y sólo si $T$ es invertible y $T^{-1}$ es acotada.*

Cuando $Y = \mathbb{K}$, el operador $T$ se denomina *funcional lineal* y el conjunto de todos estos operadores definidos sobre $X$ se llama *espacio dual*, el cual se denota por $X'$. Además, para un subconjunto $M$ de un espacio de Banach $X$, se define el *anulador* de $M$ como el subespacio cerrado de $X'$ definido por

$$M^{\perp} = \{f \in X' : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in M\}.$$

Recuerde que para un subespacio cerrado $M$ de algún espacio $X$ se obtiene

$$(X/M)' \approx M^{\perp},$$

donde el simbolo $\approx$ se lee “es isomorfo a”. Además es conocido que para un espacio vectorial $X$ de dimensión finita con base $\{e_1, ..., e_n\}$ el espacio dual $X'$ tiene dimensión $n$ y el conjunto $\{f_1, ..., f_n\}$, donde $f_i(e_k) = \delta_{ik}$, es una base de $X'$.

Un operador lineal $T : X \to Y$ se dice *compacto* si la clausura de $T(A)$ es un subconjunto compacto de $Y$ para todo subconjunto acotado $A$ de $X$. El conjunto de todos los operadores compactos definidos de $X$ en $Y$ es denotado por $\mathcal{K}(X, Y)$, y además si $X$ e $Y$ son espacios de Banach entonces $\mathcal{K}(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X, Y)$.

La clase de los operadores compactos es de gran importancia en el estudio de la teoría espectral; es decir, en el problema de autovalores y autovectores de operadores. Sobre operadores compactos se tienen los siguientes resultados:

**Teorema 1.1.2.** *Un operador $T$ es compacto si y sólo si cada sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $Y$.*

**Demostración.** (Ver Vera y Alegria (1997), pág. 229).

**Teorema 1.1.3.** *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales y compactos de $X$ en $Y$, donde $Y$ es de Banach. Si $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, es decir, si existe $T$ tal que $\|T_n - T\| \to 0$, entonces $T$ es compacto.*

**Demostración.** (Ver Vera y Alegria (1997), pág. 231).

Note que en el teorema anterior no se pide que el rango de $T$ sea cerrado, por lo cual $T(A)$ no necesita ser compacto aún si $A$ es un conjunto cerrado y acotado.

Recuerde también que una *isometría* $T : X \to Y$, entre dos espacios normados $X$ e $Y$, es un operador que conserva las normas, es decir, $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$. En el caso en el que $T$ sea biyectiva, se dice que los espacios $X$ e $Y$ son *isométricos*. Dos espacios isométricos son indistinguibles respecto a la métrica aunque difieran en la naturaleza de sus puntos.

## 1.2 Álgebras de Banach y la Norma Esencial de un operador

En esta sección se facilitan los elementos relacionados a la teoría de álgebra de Banach necesarios para la comprensión del desarrollo del presente trabajo. Se enfocan especialmente algunos resultados sobre la norma esencial de un operador, que serán de importancia al estudiar la aproximación de la norma del Operador Multiplicación al conjunto de los operadores compactos sobre el espacio $H_v^\infty$ en el Capítulo 3. Los textos citados para los conceptos y resultados de esta sección son: Vera y Alegria (1997), Müller (2003) y Garnett (2007).

Un *álgebra* $\mathcal{A}$ es un espacio lineal complejo dotado con una aplicación multiplicativa $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, la cual satisface las siguientes condiciones (para todo $x, y, z \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$):

(i) $(xy)z = x(yz)$

(ii) $x(y + z) = xy + xz,\ (x + y)z = xz + yz;$

(iii) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y);$

(iv) Existe un único elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que $e \neq 0$ y $ex = xe = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Un álgebra compleja $\mathcal{A}$ la cual es también un espacio de Banach dotado de una norma y que satisface

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

para todo $x, y \in \mathcal{A}$ es llamada *álgebra de Banach*.

**Ejemplo 1.2.1.** Los siguientes espacios son ejemplos importantes de álgebra de Banach:

(i) Sea $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de todos los operadores (lineales acotados) sobre un espacio de Banach $X$, $dim X \geq 1$, con operaciones algebraicas definidas naturalmente y con la norma del operador $\|\mathrm{T}\| = \sup\{\|\mathrm{T}x\| : x \in X, \|x\| = 1\}$. Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach, donde el elemento unidad es el operador identidad $I$ definido por $Ix = x$ $(x \in X)$.

(ii) El espacio $H^\infty$, el cual se estudia con más rigurosidad en la Sección 6 del presente capítulo, es un ejemplo importante de álgebra de Banach.

Otra teoría de esencial interés en el trabajo es la teoría espectral referida al espacio de operadores lineales, la cual se estudia a continuación.

**Definición 1.2.1.** Sea $T$ un elemento de un algebra de Banach $\mathcal{A}$. El *espectro* de $T$ en $\mathcal{A}$, denotado por $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ ó $\sigma(T)$, es el conjunto definido por

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda e \text{ no es invertible en } \mathcal{A}\},$$

en cuyo caso $\lambda$ recibe el nombre de *autovalor* de $T$ y se tiene el siguiente resultado.

**Comentario 1.2.1.** En la definición anterior, se asume que un operador es invertible si es biyectivo.

**Teorema 1.2.1.** *El conjunto de autovalores de un operador compacto $T$ sobre un espacio normado $X$ es finito o numerable y su único posible punto de acumulación es $\lambda = 0$.*

**Demostración.** (Ver Vera y Alegria (1997), pag. 234).

En relación con la figura teórica del espectro de un operador será notable la presencia de la definición de operadores Fredholm que se da a continuación.

**Definición 1.2.2.** Sean $X, Y$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Se dice que $T$ es *Fredholm* si

$$dim\,(KerT) < \infty \;\text{ y }\; codim\,(RangT) < \infty.$$

**Teorema 1.2.2.** *El conjunto de operadores Fredholm es abierto.*

**Demostración.** (Ver Müller (2003), pag. 152).

De la definición anterior podemos citar la siguiente:

**Definición 1.2.3.** Sea $X$ un espacio de Banach. El *espectro esencial* de $T : X \to X$, denotado por $\sigma_e(T)$, se define como el conjunto

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es Fredholm}\},$$

donde $I$ denota el operador identidad definido sobre el espacio $X$.

En el Capítulo 3, Sección 3.4, se demuestra que el operador $M_\varphi$ actuando sobre el espacio $H_v^\infty$ no es compacto. Por esta razón es relevante conocer que tan cerca se encuentra dicho operador del espacio de los operadores lineales compactos $\mathcal{K}$ sobre $H_v^\infty$. De este modo se esta interesado en caracterizar a los operadores compactos y la cercanía de aquellos que no lo son mediante las siguientes definiciones y resultados.

**Definición 1.2.4.** Sea $T \in \mathcal{B}(X)$. El *radio espectral esencial* de $T$ es definido por

$$r_e(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(T)\}$$

y la *norma esencial* por

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - K\| : K \text{ es compacto}\},$$

donde $\|T\|_e$ es la norma de las clases $T+\mathcal{K}(X)$ en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ y $\sigma_e$ es el espectro de las clases $T + \mathcal{K}(X)$ en esta álgebra.

Sobre los operadores compactos se tiene el siguiente resultado, el cual es consecuencia de la definición y del hecho que el límite de operadores compactos es también un operador compacto; se enuncia formalmente, pues se usará en la demostración de un resultado clave en el Capítulo 3.

**Teorema 1.2.3.** $\|T\|_e = 0$ *si y sólo si* $T$ *es compacto.*

Los siguientes resultados también son necesarios en el Capítulo 3:

**Proposición 1.2.1.** *Sea* $T \in \mathcal{B}(X)$, *entonces* $r_e(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|_e^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|_e^{\frac{1}{n}}$.

**Demostración.** (Ver Müller (2003), pag. 167).

**Corolario 1.2.1.** $r_e(T) \leq \|T\|_e$.

Dado que el operador nulo es compacto, de la Definición 1.2.4 y al sustituir $K \equiv 0$, se tiene que

$$\|T^n\|_e = \inf\{\|T^n - K\| : K \text{ es compacto}\} \leq \|T^n\|.$$

Por otro lado, sigue de la definición de la norma de un operador que

$$\|T^n x\| \leq \|T\|\|T^{n-1}x\| \leq \|T\|\|T\|\|T^{n-2}x\| \leq ... \leq \|T\|^n\|x\|$$

y por tanto

$$\|T^n\|_e \leq \|T^n\| \leq \|T\|^n.$$

Por otra parte, es interesante estudiar operadores sobre una estructura de espacio completo que generen rango cerrado, debido a que estos conjuntos a su vez serían subespacios completos. Por esta razón se justifican los siguientes resultados, y los posteriormente estudiados en el Capítulo 3, Sección 7.

Para los espacios normados $X$ e $Y$, sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que $T$ posee *rango cerrado* en $Y$ si $Rang(T)$ es un subconjunto cerrado de Y. De lo anterior se puede concluir que si $Y$ es un espacio de Banach entonces $Rang(T)$ es también un espacio de Banach. Además, es conocido el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.4.** *El operador* $T : X \to Y$ *es acotado inferiormente si y sólo si es inyectivo y posee rango cerrado.*

**Demostración.** (Ver Vera y Alegría (1997), pag. 210).

## 1.3 Funciones analíticas

En esta sección se introducen los conceptos y resultados del análisis complejo, en materia de espacios de funciones analíticas, que se utilizaron en los espacios vectoriales objeto de estudio. Las nociones y resultados que se presentan en esta sección han sido tomados de los textos: Conway (1978), Churchill y Brown (1978), Hille (1962) y Stein y Shakarchi (2003).

Se denota por $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ al conjunto de los número complejos, donde $i$ denota la unidad imaginaria ($i^2 = -1$). Es conocido que $\mathbb{C}$ es un espacio de Banach con la norma $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, donde $\overline{z} = x - iy$. Recuerde que un espacio métrico $(X, d)$ es *conexo* si los únicos abiertos y cerrados son $\emptyset$ y $X$. Un subconjunto $A$ de $X$ es conexo si $(A, d)$ es conexo. También se tiene la siguiente caracterización para subconjuntos abiertos y conexos de $\mathbb{C}$.

**Teorema 1.3.1.** *Un conjunto abierto $G \subseteq \mathbb{C}$ es conexo si y sólo si para dos puntos cualesquiera $a$ y $b$ en $G$ existe un polígono desde $a$ hasta $b$ totalmente contenido en $G$.*

**Demostración.** (Ver Conway (1978), pág. 15).

**Definición 1.3.1.** Un conjunto abierto y conexo se llama *dominio o región*.

Una función compleja de variable compleja, es una función cuyo dominio y rango son subconjuntos del plano complejo. Dada una función compleja de variable compleja $w = f(z)$ definida sobre un dominio $\Omega$ se dice que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

si dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. La función $f$ se dice *continua* en $z = z_0$ si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Mientras que la función $f$ se dice *diferenciable* en $z = z_0$ si el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En este caso, el valor del límite se denota por $f'(z_0)$ y se llama la *derivada* de $f$ en el punto $z = z_0$.

**Definición 1.3.2.** La función $f$ se dice *analítica* en el dominio $\Omega$ si tiene derivada en cada uno de sus puntos y el espacio de todas las funciones analíticas sobre $\Omega$ es denotado por $H(\Omega)$.

- $f$ es analítica en un punto $z_0$ si es analítica en un entorno de $z_0$.
- Una función entera $f$ es una función que es analítica en todo el plano complejo.

El estudio de diferenciabilidad de funciones complejas de variables complejas se hace a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las cuales aparecen en el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.2.** *Suponga que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y que $f'(z_0)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces, las derivadas parciales de primer orden de $u$ y $v$ deben existir en $(x_0, y_0)$ y deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy- Riemann*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \,. \end{cases}$$

*Además, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.*

**Demostración.** (Ver Churchill y Brown (1978), pág. 55).

Es conocido que existen funciones que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto sin que sean analíticas en ese punto, por ejemplo, la función definida en (1.3) satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $z = 0$, pero no es analítica en dicho punto.

$$f(z) = \begin{cases} z^5|z|^{-4}, z \neq 0 \\ 0\ , z = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Sin embargo, recíprocamente se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 1.3.3.** *Sea la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida en un entorno de un punto $z_0 = x_0+iy_0$. Suponga que las derivadas parciales de primer orden de las funciones $u$ y $v$ con respecto a $x$ e $y$ existen en todas partes de dicho entorno y que son continuas en $(x_0, y_0)$. Entonces, si las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ en $(x_0, y_0)$, entonces la derivada $f'(z_0)$ existe.*

**Demostración.** (Ver Churchill y Brown (1978), pág. 56).

Un resultado que se debe tener presente cuando se trabaja en espacios de funciones analíticas, es el teorema de la fórmula integral de Cauchy. Antes de enunciarlo, se debe recordar algunos conceptos sobre integración compleja. En primer lugar, recuerde que un *contorno parametrizado* $\gamma$ no es más que una función compleja definida en un intervalo $[a, b]$, la cual es continua en $[a, b]$ y diferenciable a trozos; es decir, tal que existe un conjunto finito de números $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ que satisfacen que $a_1 = a$ y $a_k = b$, y con la propiedad que para cada $1 \leq j \leq k-1$, la función $\gamma$ restringida al intervalo $(a_j, a_{j+1})$ es una curva de clase $C^1$, es decir, con derivada continua en $(a_j, a_{j+1})$. Si el contorno $\gamma$ es una función inyectiva, entonces se dice *simple*; mientras que si $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces el contorno se llama *cerrado*; si el contorno $\gamma$ es cerrado y $\gamma|_{[a,b)}$ es inyectiva, entonces se le dice *simple y cerrado*.

La integral de una función continua $f$ de valores complejos definida en un dominio $\Omega$ que contiene a un contorno $\gamma$ se define por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt.$$

Note que el lado derecho de esta expresión es la integral de una función compleja de variable real. Similarmente, la integral de $f$ sobre $\gamma$ con respecto a la longitud de arco viene dada por

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

La integral sobre un contorno y la integral con respecto a la longitud de arco se relacionan mediante la expresión

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,.$$

También es conocido que si $f$ es analítica en un dominio simplemente conexo $\Omega$, entonces

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_\gamma f'(s)ds,$$

para todo contorno $\gamma$ contenido en $\Omega$ con punto inicial en $z_1$ y punto final $z_2$.

**Teorema 1.3.4 (Fórmula integral de Cauchy).** *Sea $f$ analítica en todas partes dentro y sobre un contorno cerrado simple $C$, tomado en el sentido positivo. Si $z_0$ es cualquier punto interior a $C$, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

**Demostración.** (Ver Hille (1962), pág. 175).

**Teorema 1.3.5 (Teorema de Liouville).** *Si $f$ es entera y acotada en todo el plano complejo, entonces $f$ es constante.*

**Demostración.** (Ver Stein y Shakarchi (2003), pág. 50).

Otra consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy, es el *principio del máximo* el cual reza lo siguiente.

**Teorema 1.3.6 (Principio del módulo máximo para funciones analíticas).** *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *y* $f \in H(\Omega)$*. Si existe un punto* $z_0 \in \Omega$ *tal que* $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ *para todo* $z \in \Omega$*, entonces* $f$ *es constante.*

Otros resultados que se precisan referentes a las propiedades de las funciones analíticas son: el teorema de la aplicación abierta y el principio de identidad de Weierstrass que se enuncian a continuación.

**Teorema 1.3.7 (Teorema de la aplicación abierta).** *Si* $\Omega$ *es una región y* $f$ *es analítica en* $\Omega$*, entonces* $f(\Omega)$ *es otra región o un punto.*

**Teorema 1.3.8 (Principio de identidad de Weierstrass).** *Sea* $f$ *analítica en una región* $\Omega$ *del plano complejo y sea*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

*Entonces o* $Z(f) = \Omega$*, o* $Z(f)$ *no tiene puntos de acumulación en* $\Omega$*. En el último caso, a cada* $a \in Z(f)$ *corresponde un único entero positivo* $m = m(a)$ *tal que*

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad (z \in \Omega),$$

*donde* $g$ *es analítica en* $\Omega$ *y* $g(a) \neq 0$*; además,* $Z(f)$ *es a lo mas contable.*

**Comentario 1.3.1.** El último resultado del teorema anterior es lo que se conoce como el *principio de lo ceros aislados.*

**Teorema 1.3.9 (Teorema de Taylor).** *Si* $f \in H(\Omega)$ *con* $\Omega$ *un subconjunto abierto de* $\mathbb{C}$*. Entonces para cada* $a \in \Omega$*, existe* $R > 0$ *tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

*para todo* $z \in D(a, R)$*.*

Finalmente, se recuerda que una función $f$ posee una *singularidad aislada* en $z = a$ si existe un $R > 0$ tal que $f$ esta definida y es analítica en $B(a, R)\backslash\{a\}$ pero no en $\{a\}$. El punto $a$ es llamado una *singularidad evitable* si existe una función analítica $g : B(a; R) \mapsto \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para $0 < |z - a| < R$.

Las funciones $(\sin z)/z$, $1/z$ y $\exp\{1/z\}$ poseen singularidad aislada en $z = 0$. Pero, sólo $(\sin z)/z$ tiene una singularidad evitable en ese punto.

El siguiente resultado nos proporciona una ayuda útil para saber en que circunstancias una singularidad es evitable.

**Teorema 1.3.10.** *Si $f$ posee una singularidad aislada en $a$ entonces el punto $z = a$ es una singularidad evitable si y sólo si*

$$\lim_{z \to a}(z - a)f(z) = 0.$$

## 1.4 Automorfismos del disco y la Métrica Pseudohiperbólica

Entre las funciones analíticas definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, es de particular interés estudiar aquellas que aplican biyectivamente el disco $\mathbb{D}$ en sí mismo, es decir, los denominados *"automorfismos del disco"*, que por su extenso número de propiedades serán de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo. En esta sección, se repasa brevemente las propiedades de estas aplicaciones y de la métrica pseudohiperbólica. Las definiciones y resultados que se presentan aquí han sido tomado de Ramos (2002), también se puede consultar Zhu (1990).

En primer lugar, se recuerda que para $a \in \mathbb{D}$, la función $\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

es una función biyectiva del disco en sí mismo. Además, se tiene que éstas funciones verifican

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$$

lo cual nos dice que son autoinversas; en símbolos esto es, $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

El conjunto de los automorfismos del disco se denota por $Aut(\mathbb{D})$. Es conocido, que éste forma un grupo con la operación composición de funciones. Además, en términos de estas aplicaciones se define una nueva función sobre $\mathbb{D}$, la cual satisface las condiciones de una métrica. Más precisamente, para $z, w \in \mathbb{D}$ se define la relación

$$\rho(z,w) := |\varphi_z(w)| = \left| \frac{z-w}{1-\overline{z}w} \right|,$$

la cual define una métrica sobre $\mathbb{D}$ llamada la *métrica pseudohiperbólica.*

Entre las propiedades de esta métrica, resalta la *invarianza por automorfismos del disco.* Es decir, la relación $\rho$ satisface

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) = \rho(z,w)$$

para todo $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ y todo $z, w \in \mathbb{D}$.

Para $a \in \mathbb{D}$ y $r \in (0,1)$; el disco pseudohiperbólico con centro (pseudohiperbólico) $a$ y radio (pseudohiperbólico) $r$ se define y denota por

$$\Delta(a,r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(a,z) < r\}.$$

Resulta que el disco pseudohiperbólico $\Delta(a,r)$ es un disco euclídeo tal como se establece a continuación.

**Teorema 1.4.1.** *Para $a \in \mathbb{D}$ y $r \in (0,1)$, $\Delta(a,r)$ es un disco euclídeo con centro $C$ y radio $R$ dados por*

$$C = \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \quad y \quad R = \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r.$$

Para ilustrar el uso de las propiedades de los automorfismos del disco y de la métrica pseudohiperbólica, se finaliza esta sección enunciando y demostrando una propiedad que se usa repetidas veces en el Capítulo 3 de este trabajo. A partir de ahora, el símbolo $\simeq$ se emplea para denotar cantidades equivalentes; es decir, $a \simeq b$ ($a$ y $b$ son cantidades equivalentes) si existen dos constantes positivas $K_1, K_2$, que no dependen ni de $a$ ni de $b$, tal que

$$K_1 a \leq b \leq K_2 a.$$

**Proposición 1.4.1.** *Para $\rho(z,w) < r$ con $r \in (0,1)$ se tiene la equivalencia*

$$1 - |w| \simeq 1 - |z|.$$

**Demostración:** Sea $r \in (0,1)$ y $z, w \in \mathbb{D}$ tales que $\rho(z,w) < r$. De la desigualdad triangular aplicada a la expresión $|1 - \overline{z}w|$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
1 - |\varphi_z(w)|^2 &= \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-w\overline{z}|^2} \\
&\leq (1-|w|^2)\frac{1-|z|^2}{(1-|w|)^2} \\
&= \frac{(1+|w|)(1+|z|)(1-|z|)}{1-|w|} \\
&\leq 4\frac{1-|z|}{1-|w|}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $|\varphi_z(w)| < r$, se tiene

$$1 - r^2 < 1 - |\varphi_z(w)|^2$$

de donde se obtiene la primera de las desigualdades buscadas, a saber

$$\frac{1-r^2}{4}(1-|w|) \leq 1 - |z|$$

La otra desigualdad se puede obtener al considerar la simetría de la función $\rho$, intercambiando los papeles de $z$ y $w$. ■

## 1.5 Compacidad y convergencia en el espacio de las funciones analíticas

En esta sección se establecen las definiciones y los resultados referentes a la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de funciones analíticas. En primer lugar se da la definición de la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos, pasando por el teorema de Arzelá-Ascoli y el teorema de Montel, concluyendo finalmente con la completitud del espacio de funciones analíticas $H(G)$ con la métrica antes mencionada. El contenido de esta sección ha sido tomado de los textos Vera y Alegria (1997), Conway (1990) y Rudin (1980).

Recuerde que una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto $\Omega$, se dice que *converge uniformemente* a una función $f$ sobre subconjuntos compactos $K \subset \Omega$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(K, \varepsilon)$ tal que,

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

para todo $z \in K$ y todo que $n > N$.

Por ejemplo, la sucesión $\{z^n\}$ converge a la función idénticamente nula $(f \equiv 0)$ sobre subconjuntos compactos del disco unitario $\mathbb{D}$, pero la convergencia no es uniforme en todo el disco $\mathbb{D}$.

Si $G$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y $(\Omega, d)$ es un espacio métrico completo entonces se designa por $C(G, \Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas de $G$ en $\Omega$.

Es conocido que si $G$ es un abierto en $\mathbb{C}$ entonces existe una sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos de $G$ tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Más aún, la sucesión $K_n$ puede ser sustituida por otra con las propiedades:

(a) $K_n \subset int K_{n+1}$;

(b) $K \subset G$ y $K$ compacto implica $K \subset K_n$ para algún $n$.

Si $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde cada $K_n$ es compacto y $K_n \subset K_{n+1}$, se define

$$\varrho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n\}$$

para cada par de funciones $f$ y $g$ en $C(G, \Omega)$. También se define

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varrho_n(f, g)}{1 + \varrho_n(f, g)}, \tag{1.4}$$

la cual es una serie convergente, ya que $\varrho_n(f,g)/(1+\varrho_n(f,g)) \leq 1$ al ser $\varrho_n(f,g) \geq 0$. A la expresión $\varrho(f,g)$ definida en (1.4) se le conoce como la *métrica de la convergencia uniforme sobre compactos.*

De los estudios básicos de análisis matemático se sabe que si $(S,d)$ es un espacio métrico entonces

$$\mu(s,t) = \frac{d(s,t)}{1+d(s,t)}$$

es también una métrica en $S$. También se sabe que un conjunto es abierto en $(S,d)$ si y sólo si este es abierto en $(S,\mu)$; una sucesión es de Cauchy en $(S,d)$ si sólo si es una sucesión de Cauchy en $(S,\mu)$.

**Proposición 1.5.1.** *$(C(G,\Omega),\varrho)$ es un espacio métrico.*

**Demostración.** (Ver Conway (1990), pag. 144).

**Proposición 1.5.2.** *Sea $\varrho$ la métrica definida anteriormente. Entonces para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ y un conjunto compacto $K \subset G$ tal que para $f$ y $g$ en $C(G,\Omega)$,*

$$\sup\{|f(z),g(z)| : z \in K\} < \delta \Rightarrow \varrho(f,g) < \varepsilon.$$

*Recíprocamente, si $\delta > 0$ y es $K$ un conjunto compacto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $f$ y $g$ en $C(G,\Omega)$,*

$$\varrho(f,g) < \varepsilon \Rightarrow \sup\{|f(z),g(z)| : z \in K\} < \delta.$$

**Demostración.** (Ver Conway (1990), pag. 145).

De la proposición anterior se puede concluir las siguientes propiedades en espacios métricos:

(a) Un conjunto $O \subset (C(G,\Omega),\varrho)$ es abierto si y sólo si para cada $f$ en $O$ existe un conjunto compacto $K$ y un $\delta > 0$ tal que $O \supset \{g : |f(z),g(z)| < \delta, z \in K\}$.

(b) Una sucesión $\{f_n\}$ en $(C(G,\Omega),\varrho)$ converge a $f$ si y sólo si $\{f_n\}$ converge a $f$ uniformemente sobre todo subconjunto compacto de $G$.

**Comentario 1.5.1.** La colección de los conjuntos abiertos en $(C(G,\Omega),\varrho)$ es independiente de la elección de los conjuntos $K_n$.

**Proposición 1.5.3.** $C(G,\Omega)$ *es un espacio métrico completo.*

**Demostración.** (Ver Conway (1990), pag. 145).

Suponga que $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ para alguna región $\Omega$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una *familia normal* si cada sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\Omega$. No se requiere que el límite de la sucesión esté en $\mathcal{F}$.

Las siguientes definiciones y resultados juegan un rol central en el teorema de Arzela-Ascoli, el cual proporciona un criterio importante para el estudio de la compacidad en el espacio de las funciones continuas en un intervalo $[a,b]$, denotado por $C[a,b]$.

Un conjunto $A$ de un espacio métrico $X$ se dice *totalmente acotado o pre-compacto* si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número finito de conjuntos $A_1, \cdots, A_p$ tales que $A = A_1 \cup ... \cup A_p$ y $diam(A_i) \leq \varepsilon$, $i = 1, \cdots, p$.

Un conjunto $A$ de un espacio métrico $X$ es *relativamente compacto* si su clausura $\overline{A}$ es compacta.

**Proposición 1.5.4.** *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto $A$ de un espacio métrico completo $X$ sea relativamente compacto, es que sea totalmente acotado.*

**Proposición 1.5.5.** *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto $A$ de un espacio métrico $X$ sea relativamente compacto es que sea secuencialmente compacto, es decir que toda sucesión de elementos de $A$ posea alguna subsucesión convergente (pero no necesariamente a un punto de $A$).*

Una familia $\mathcal{F} = \{\varphi_i\}$ de funciones definidas en $[a,b]$ se dice *equiacotada* o *uniformemente acotada*, cuando existe una constante $k > 0$ tal que $|\varphi_i(x)| < k$, para todo $x \in [a,b]$, para toda $\varphi_i \in \mathcal{F}$. La familia $\mathcal{F}$ se dice *equicontinua* cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $\varphi_i \in \mathcal{F}$,

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \varepsilon.$$

**Teorema 1.5.1 (Teorema de Arzelá-Ascoli).** *Una familia $\mathcal{F} \in C[a,b]$ es relativamente compacta en $C[a,b]$ si y sólo si es equicontinua y equiacotada.*

**Demostración.** (Ver Vera y Alegria (1997), pág. 20).

**Teorema 1.5.2.** *Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $H(G)$ y $f$ pertenece a $C(G,\mathbb{C})$ tal que $f_n \to f$ entonces $f$ es analítica y $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ para cada $k \geq 1$.*

**Demostración.** (Ver Conway (1990), pag. 151).

**Corolario 1.5.1.** *$H(G)$ es un espacio métrico completo con la métrica $\varrho(f,g)$.*

**Teorema 1.5.3.** *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente a una función $f$ sobre cada subconjunto compacto de un dominio $\Omega$, entonces $f$ es analítica en $\Omega$.*

**Demostración.** (Ver Stein y Shakarchi (2003), pág. 53).

**Teorema 1.5.4 (Teorema de Montel).** *Suponga que $\mathcal{F} \subset H(\Omega)$ y que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de la región $\Omega$. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

**Demostración.** (Ver Rudin (1980), pág. 300).

## 1.6 El espacio de las funciones analíticas acotadas

El estudio de las funciones analíticas acotadas $H^\infty$ nace naturalmente como un recurso alternativo al hecho de que el espacio $H(G)$ no ha podido ser dotado de una norma que lo convierta en espacio de Banach. Por esta razón, es relevante y clásico comparar cada subespacio de funciones analíticas a estudiar con $H^\infty$. En particular, en el presente trabajo se esta interesado en el estudio del espacio de funciones analíticas $H_v^\infty$ definido en el Capítulo 2 y por esta razón se introduce a continuación la teoría necesaria referente al espacio $H^\infty$ que será de ayuda en el presente trabajo. Los textos de referencia para esta sección son: Garnett (2007), Rudin (1980) y Carleson (1958).

La clase $H^\infty$ consiste de las funciones analíticas $f$ que son acotadas sobre $\mathbb{D}$; es decir, $f \in H^\infty$ si y sólo si

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty.$$

Note que $H^\infty$ es un subespacio de $H(\mathbb{D})$, pues es bien sabido que la suma de funciones acotadas y el producto de un escalar por una función acotada resulta una función acotada; todavía más, dado que el producto de funciones analíticas acotadas también es una función acotada, realmente se tiene que $H^\infty$ es un álgebra. Además se tiene el siguiente resultado, para el cual se cuenta con una demostración más general en el Capítulo 2, Sección 4, Teorema 2.4.2.

**Teorema 1.6.1.** $(H^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

En virtud del Principio del Máximo para funciones analíticas (ver el Teorema 1.3.6), se puede ver que si $f \in H^\infty$ y definimos, para $t \in [0, 2\pi]$, la función $f^*$, la cual se le conoce como el *límite radial* de $f$, mediante

$$f^*\left(e^{it}\right) = \lim_{r\to 1^-} f\left(re^{it}\right),$$

entonces

$$\|f\|_\infty = \sup_{w\in\partial\mathbb{D}} |f^*(w)| := \|f^*\|_\infty\,;$$

es más (ver Rudin (1980), pag. 264), la función $f^*$ está definida en casi todo $\partial\mathbb{D}$ y $f^* \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$, donde el conjunto $L^\infty(\partial\mathbb{D})$ denota al espacio de todas las funciones medibles sobre $\partial\mathbb{D}$ que se encuentran esencialmente acotadas (ver Rudin (1980) para más referencias sobre funciones medibles y el espacio $L^\infty$).

Una función $M \in H^\infty$ para la cual $|M^*| = 1$ en casi todas partes (a.e) en la circunferencia unitaria $\partial\mathbb{D}$, se le conoce como *función interior*. Los automorfismos del disco constituyen ejemplos de funciones interiores para $H^\infty$, donde (salvo rotación) para $a \in \mathbb{D}$ fijo, el automorfismo $\varphi_a$ viene dado por

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$$

con $z \in \mathbb{D}$. De hecho, se tiene que $|\varphi_a^*(w)| = 1$ para todo $w \in \partial\mathbb{D}$.

Los productos de Blaschke se definen a través de los automorfismos del disco y son ejemplos importantes de funciones interiores; más precisamente, si $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos en $\mathbb{D}$, entonces el *producto de Blaschke* generado por esta sucesión viene dado por la expresión

$$B(z) = z^m \prod_{|z_n|\neq 0} \frac{\overline{z}_n}{|z_n|}\varphi_{z_n}(z) = z^m \prod_{|z_n|\neq 0} \frac{-\overline{z}_n}{|z_n|}\frac{z-z_n}{1-\overline{z}_n z}, \tag{1.5}$$

donde $z \in \mathbb{D}$ y $m$ es la cantidad de veces que aparece el cero en $\{z_n\}$. Es conocido (ver Garnett (2007), pag. 52) que el producto de Blaschke (1.5) converge absolutamente y define una función holomorfa en $\mathbb{D}$ si y sólo si se satisface la condición de Blaschke

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|z_n|) < \infty.$$

La función $B(z)$ esta en $H^\infty(\mathbb{D})$ y los ceros de $B(z)$ son precisamente los puntos $z_n$, donde cada cero posee multiplicidad igual al número de veces que ocurre en la sucesión $\{z_n\}$. Más aún, $|B(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y

$$\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Las siguientes definiciones son necesarias para entender los Teoremas 1.6.2 y 1.6.3 que se enuncian posteriormente (ver Rudin (1980) para más referencias sobre teoría de la medida): Sea $\lambda$ una medida definida sobre una $\sigma$-álgebra, se dice que $\lambda$ es *concentrada* en $A$ si $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ para cada conjunto medible $E$. Esto es equivalente a la condición que $\lambda(E) = 0$ siempre que $A \cap E = \emptyset$.

Considere las medidas $\lambda_1$ y $\lambda_2$, suponga que existe un par de conjuntos disjuntos $A$ y $B$ tal que $\lambda_1$ es concentrada en $A$ y $\lambda_2$ es concentrada en $B$, entonces se dice que $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son *mutuamente singulares*, y se escribe $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

Suponga que $\mu$ es una medida de Borel compleja en $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, y $z_0$ es un número complejo con $\lim_{j\to\infty} \frac{\mu(E_j)}{m(E_j)} = z_0$ para cada sucesión $\{E_j\}$ que se reduzca adecuadamente a $z$, entonces se puede hacer referencia a $z_0$ como la *derivada de la medida* $\mu$ en $z$, y escribir $(D\mu)(z) = z_0$; donde $m$ denota la medida de Lebesgue. Un enunciado más completo puede ser que $(D\mu)(z)$ es la derivada de $\mu$ en $z$ con respecto a la medida de Lebesgue $m$. Observe que si $D\mu(z)$ existe y $D\mu(z) = z_0$ entonces $\lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(z,r))}{m(B(z,r))} = z_0$, lo cual dice que la medida de Lebesgue $m$ crece mas rápidamente que la medida $\mu$ sobre bolas abiertas.

El siguiente resultado muestra las funciones interiores como una factorización en términos de funciones de Blaschke y funciones interiores singulares, las cuales se definen más adelante.

**Teorema 1.6.2.** *Sea $c$ una constante tal que $|c| = 1$, $B$ un producto de Blaschke, y $\mu$ una medida de Borel positiva y finita en $\partial\mathbb{D}$ la cual es singular con respecto a la medida de Lebesque, y*

$$M(z) = cB(z) \exp\left\{ -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t) \right\} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.6}$$

*Entonces $M$ es una función interior y toda función interior es de esta forma.*

**Demostración.** (Ver Rudin (1980), pag. 370).

Del resultado anterior, se puede construir ejemplos de funciones interiores que no sean un producto de Blaschke. Por ejemplo, para $c = 1$, $B \equiv 1$, y $\mu(t) = \delta(t)dt$, donde $\delta$ es la distribución Delta de Dirac (ver Grubb (2009) para la definición y propiedades de la distribución Delta de Dirac), se tiene, sustituyendo en la expresión (1.6), que

$$M(z) = \exp\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}.$$

Observe que esta función tiende a cero exponencialmente cuando $z$ tiende a 1.

A la función

$$m(z) = c\exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right\},$$

presente en la composición de las funciones interiores se le denomina *función interior singular*. Este tipo de funciones cumplen, en particular, con la definición de función acotada inferiormente. Para ver esto observe que

$$|m(z)| = \exp\left\{-Re\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right)\right\} = \exp\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\mu(t)\right\}$$

y dado que $\mu$ es una medida de Borel singular positiva y finita en $\partial\mathbb{D}$ con respecto a la medida de Lebesque $m$, lo cual indica que

$$\int_{-\pi}^{\pi}Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)d\mu(t) \leq \int_{-\pi}^{\pi}Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)dm(t) = 2\pi,$$

(ver Ransford (1995), pág. 9 para ver la igualdad final) de donde se obtiene que

$$|m(z)| \geq \exp\{-2\pi\}, \tag{1.7}$$

con lo que $m$ es acotada inferiormente.

Otra de las funciones analíticas acotadas más resaltantes son las llamadas *funciones exteriores* definidas por la fórmula

$$Q(z) = c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\varphi(e^{it})dt\right\}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, donde $\varphi$ es una función medible y positiva en $\partial\mathbb{D}$ que satisface $\log\varphi \in L^1(\partial\mathbb{D})$ y $c$ es una constante con $|c| = 1$.

**Teorema 1.6.3.** *Sea* $0 < p \leq \infty$, $f \in H^p$ *y* $f$ *distinta de* $0$. *Entonces se tiene que* $\log|f^*| \in L^1(\partial\mathbb{D})$, *la función exterior*

$$Q_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f^*(e^{it})|dt\right\}$$

*está en* $H^p$ *y existe una función interior* $M_f$ *tal que*

$$f = M_f Q_f.$$

**Demostración.** (Ver Rudin (1980), pag. 372).

**Comentario 1.6.1.** En el teorema anterior la clase $H^p$, con $0 < p \leq \infty$, denota al espacio formado por todas las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ para las cuales se cumple que

$$\|f\|_p := \lim_{r\to 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}^{1/p} < \infty,$$

donde, para $p = \infty$, las clases $H^p$ y $H^\infty$ coinciden (ver Rudin (1980) para más propiedades de los espacios $H^p$). Además, la clase $L^1(\partial\mathbb{D})$ denota al conjunto de todas las funciones Lebesgue integrables en $\partial\mathbb{D}$, y las funciones $M_f$ y $Q_f$ son llamadas factor interior y factor exterior de $f$ respectivamente; $Q_f$ solo depende de los valores límites de $|f|$.

**Corolario 1.6.1.** *Para cada* $f \in H^\infty$ *se tiene*

$$f(z) = B(z)m(z)Q(z)$$

*donde* $B$ *es un producto de Blaschke,* $m$ *es una función interior singular y* $Q$ *es una función exterior.*

A la función

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) f(t)dt,$$

donde $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, se le conoce como la *integral de Poisson*; y entre sus propiedades se puede mencionar que es una función armónica sobre $\mathbb{D}$ tal que

$$F^*\left(e^{i\theta}\right) := \lim_{r\to 1} F\left(re^{i\theta}\right) = f\left(e^{i\theta}\right), \ \ a.e. \tag{1.8}$$

Se finaliza este capítulo dando un breve repaso sobre las sucesiones interpolantes para $H^\infty$. Una sucesión $\{z_j\}$ en el disco $\mathbb{D}$ es llamada *sucesión interpolante* si para toda sucesión acotada $\{a_j\}$ de números complejos existe una función $f \in H^\infty$ tal que

$$f(z_j) = a_j,$$

para todo $j = 1, 2, \cdots$. La siguiente caracterización de sucesiones interpolantes fue un importante aporte hecho por Carleson, L. en 1958 (ver Carleson (1958)).

**Teorema 1.6.4.** *Una sucesión $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión interpolante para $H(\mathbb{D})$ si y sólo si*

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_j - z_k}{1-\overline{z_k}z_j}\right| \geq c > 0, \ k = 1, 2, 3, ... \tag{1.9}$$

En su demostración fue crucial el uso de productos de Blaschke y dualidad. En el mismo trabajo muestra explícitamente que la caracterización (1.9) puede ser reemplazada por

$$\left|\frac{z_j - z_k}{1-\overline{z_k}z_j}\right| \geq c > 0$$

para $j \neq k$ y $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|z_j|^2)\delta_{z_j}$ es una medida de Carleson para $H^p(\mathbb{D})$, donde una medida de Borel positiva $\mu$ en el disco $\mathbb{D}$ es llamada una medida de Carleson para $H^p(\mathbb{D})$ si que cumple que la inclusión $H^p(\mathbb{D}) \subset L^p(d\mu)$ es continua. Un producto de Blaschke que posee una sucesión de ceros que a la vez sea una sucesión interpolante es llamado *producto de Blaschke interpolante*.

# CAPÍTULO 2
# EL ESPACIO $H_v^\infty$ Y SUS PROPIEDADES

En este capítulo se introducen los subespacios de $H(\mathbb{D})$ los cuales están constituidos por aquellas funciones analíticas con crecimientos controlados en $\partial\mathbb{D}$. Estos espacios servirán de base para estudiar, en el próximo capítulo, las propiedades del Operador Multiplicación. En primer lugar, y a manera de preliminares, se introducen los espacios de crecimiento o tipo Bloch y se establece la relación entre estos espacios y los espacios $\alpha$-Bloch. Con la intención de definir nuevos espacios de funciones analíticas que generalicen a $H^\infty$ y a los $\alpha$-Bloch, en la segunda sección de este capítulo se definen las distintas funciones pesos que se estarán usando y se establecerán algunas de sus propiedades; finalmente, en las secciones tercera y cuarta de este capítulo se estudia exhaustivamente los espacios $H_v^\infty$ y $H_v^0$, que son las generalizaciones naturales de los espacios antes mencionados.

## 2.1 Los espacios de Korenblum o tipo Bloch

Dado un parámetro positivo $\alpha$, se dice que una función analítica $f$ definida sobre $\mathbb{D}$, pertenece a la clase de Korenblum, denotada por $H_\alpha^\infty$, si satisface la relación

$$\|f\|_\alpha := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f(z)| < \infty. \tag{2.1}$$

Se puede notar que si $f, g \in H_\alpha^\infty$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces se verifica que

$$\begin{aligned} \|\lambda f + g\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|(\lambda f+g)(z)| \\ &\leq |\lambda|\sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha|f(z)|\} + \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha|g(z)|\} \\ &= |\lambda|\|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha < \infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

lo cual dice que $H^\infty_\alpha$ es un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, $H(\mathbb{D})$, denominado *espacio de Korenblum.*

Algunos ejemplos de funciones que están en estos espacios son:

(1) Las funciones constantes sobre $\mathbb{D}$ están en $H^\infty_\alpha$.

(2) La identidad $i_d(z) = z$ está en $H^\infty_\alpha$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \|i_d\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |i_d(z)|\} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |z|\} \leq 1, \end{aligned}$$

pues $\alpha > 0$. Así, $\|i_d\|_\alpha \leq 1$, por tanto $i_d \in H^\infty_\alpha$.

Ahora se muestra que los automorfismos del disco son elementos del espacio $H^\infty_\alpha$.

**Proposición 2.1.1.** *Sea $a \in \mathbb{D}$ y $\alpha > 0$, entonces $\varphi_a \in H^\infty_\alpha$.*

**Demostración.** Sea $a \in \mathbb{D}$ y $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$, un automorfismo del disco, entonces de la desigualdad triangular, se sigue que,

$$\begin{aligned} \|\varphi_a\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |\varphi_a(z)|\} \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|\varphi_a(z)|\} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\frac{|a-z|}{|1-\overline{a}z|}\right\} \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{|a|+|z|}{1-|\overline{a}z|} \\ &\leq \frac{1+|a|}{1-|a|} < \infty \end{aligned}$$

ya que $a \in \mathbb{D}$ es fijo. ■

De hecho, el siguiente resultado muestra que toda función analítica y acotada sobre $\mathbb{D}$ está en el espacio de Korenblum cuando $\alpha > 0$.

**Proposición 2.1.2.** *Si $\alpha > 0$, entonces $H^\infty \subset H^\infty_\alpha$, más aún, $\|f\|_\alpha \leq \|f\|_\infty$ para toda $f$ en $H^\infty$.*

**Demostración.** En efecto, sea $f$ analítica y acotada, entonces por la definición de los espacios $H^\infty$ y $H^\infty_\alpha$ y, debido a que $(1-|z|^2)^\alpha \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $\alpha > 0$, se concluye lo propuesto. ■

También se verifica la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.3.** *La relación $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma para el espacio $H^\infty_\alpha$.*

**Demostración.** Sean $f, g \in H^\infty_\alpha$, entonces de la relación (2.2) con $\lambda = 1$ se tiene

$$\|f+g\|_\alpha \quad \leq \quad \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha.$$

También, es fácil ver que

$$\|\lambda f\|_\alpha \quad = \quad |\lambda| \|f\|_\alpha,$$

para toda $f \in H^\infty_\alpha$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, solamente se debe verificar que

$$\|f\|_\alpha = 0 \text{ si y sólo si } f \text{ es la función nula.}$$

En efecto, dado que $(1-|z|^2)^\alpha > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \|f\|_\alpha = 0 \quad & \text{si y sólo si} \quad (1-|z|^2)^\alpha |f(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \{(1-|z|^2)^\alpha |f(z)|\} = 0, \text{para todo } z \in \mathbb{D} \\ & \text{si y sólo si} \quad |f(z)| = 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}, \\ & \text{si y sólo si} \quad f(z) = 0, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

lo cual verifica la proposición. ■

**Teorema 2.1.1.** *$H^\infty_\alpha$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\alpha$.*

**Demostración.** Sea $\varepsilon > 0$, $K$ un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(H_\alpha^\infty, \|\cdot\|_\alpha)$, entonces por la definición de la norma en $H_\alpha^\infty$, se sabe que,

$$(1-|z|^2)^\alpha |g(z)| \leq \|g\|_\alpha$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y toda función $g \in H_\alpha^\infty$. En particular, esta desigualdad se cumple para la función $f_n - f_m$, por lo que se tiene la relación

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|^2)^\alpha} \|f_n - f_m\|_\alpha$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Ahora bien, si $z \in K$, entonces como la función $h(z) = (1-|z|^2)^{-\alpha}$ es continua sobre el compacto $K$, existe una constante $C_K > 0$, tal que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq C_K \|f_n - f_m\|_\alpha$$

para todo $z \in K$, lo que dice que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Entonces como una consecuencia del Teorema 1.5.1, existe una función $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Para mostrar que $f \in H_\alpha^\infty$ y que $\|f_n - f\|_\alpha \to 0$ cuando $n \to \infty$, primero considere la dilatación $f_r(z) = f(rz)$, $0 < r \leq 1$, la cual cumple con las siguientes propiedades:

(1) Si $f \in H_\alpha^\infty$ entonces $f_r \in H_\alpha^\infty$. Para ver esto, primero considere $w = rz$ y observe que

$$\|f_r\|_\alpha = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha |f_r(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(rz)| = \sup_{w\in D(0,r)} |f(w)|.$$

Luego, al ser $f$ analítica en $\overline{D}(0,r) \subseteq \mathbb{D}$, se asegura la continuidad de $f$ en el compacto $\overline{D}(0,r)$ y por tanto que $f$ es acotada en $\overline{D}(0,r)$. Se tiene

$$\|f_r\|_\alpha \leq \sup_{w\in\overline{D}(0,r)} |f(w)| \leq M < +\infty$$

y así $f_r \in H_\alpha^\infty$.

(2) Note que $\|f_r\|_\alpha$ tiende a $\|f\|_\alpha$ cuando $r$ crece a 1. En efecto, gracias a la relación $|\|f_r\|_\alpha - \|f\|_\alpha| \leq \|f_r - f\|_\alpha$ y la desigualdad

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f(rz)-f(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(rz)-f(z)|$$

sólo resta ver que $\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(rz)-f(z)| \to 0$ cuando $r \to 1^-$. Con este fin, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(rz)-f(z)| \leq (1+\varepsilon)|f(rz_0)-f(z_0)|$$

y así tomando limite cuando $r \to 1^-$ y de la continuidad de $f$ sobre el compacto $\overline{D}(0,r)$ se obtiene el resultado.

Ahora bien, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(H_\alpha^\infty, \|\cdot\|_\alpha)$, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_\alpha < \varepsilon$ cuando $n, m \geq N$. Entonces para $r < 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|(f_n)_r - f_r\|_\alpha &\leq \|(f_n)_r - (f_m)_r\|_\alpha + \|(f_m)_r - f_r\|_\alpha \\
&\leq \|f_n - f_m\|_\alpha + \|(f_m)_r - f_r\|_\alpha \\
&< \varepsilon + \|(f_m)_r - f_r\|_\alpha,
\end{aligned}$$

donde el último término se aproxima a cero cuando $m \to \infty$, pues

$$\begin{aligned}
\|(f_m)_r - f_r\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|(f_m)_r(z) - f_r(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha|f_m(rz) - f(rz)| \\
&\leq \sup_{w\in D(0,r)}|f_m(w) - f(w)| \leq \sup_{w\in\overline{D}(0,r)}|f_m(w) - f(w)|,
\end{aligned}$$

y como $f_m \to f$ uniformemente sobre el subconjunto compacto $\overline{D}(0,r) \subset \mathbb{D}$, sigue que $\|(f_m)_r - f_r\|_\alpha$ se aproxima a cero cuando $m \to \infty$. Luego, $\|(f_n)_r - f_r\|_\alpha \leq \varepsilon$ para $n \geq N$ y todo $r < 1$.

Por otra parte, si $r \to 1$, entonces

$$\lim_{r\to 1}\|(f_n)_r - f_r\|_\alpha \leq \varepsilon \; para \; n \geq N$$

lo cual implica que

$$\|f_n - f\|_\alpha \leq \varepsilon \;\; para\; n \geq N$$

y así, $\|f_n - f\|_\alpha \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_\alpha < 1,$$

siempre que $n \geq n_0$, y en particular

$$\|f_{n_0} - f\|_\alpha < 1,$$

por lo cual, $h = f_{n_0} - f \in H_\alpha^\infty$. Finalmente, como $H_\alpha^\infty$ es un espacio vectorial se tiene que $f_{n_0} - f - f_{n_0} \in H_\alpha^\infty$, así $-f \in H_\alpha^\infty$ y $f \in H_\alpha^\infty$. Esto finaliza la demostración del resultado. ■

Relacionados con el espacio de Korenblum se encuentra el espacio $\alpha$-Bloch, denotado por $\mathcal{B}_\alpha$, donde $\alpha > 0$ y que consiste de las funciones $f$ analíticas tales que

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha |f'(z)| < \infty.$$

El espacio $\mathcal{B}_\alpha$ es un espacio vectorial y la relación $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ define una seminorma para $\mathcal{B}_\alpha$; de hecho, siguiendo el mismo esquema de demostración que en el Teorema 2.1.1, se muestra que $\mathcal{B}_\alpha$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}.$$

Todavía más, el siguiente resultado nos dice que los espacios de Korenblum coinciden con ciertos espacios $\alpha$-Bloch para $\alpha > 1$ y por esta razón, a estos espacios de Korenblum también se les suele llamar *espacios tipo Bloch*.

**Teorema 2.1.2.** *Para $\alpha > 1$, se cumple que $\mathcal{B}_\alpha = H_{\alpha-1}^\infty$; de hecho, existen constantes positivas $C_1$, $C_2$ tales que*

$$C_1\|f\|_{\alpha-1} \leq \|f\| \leq C_2\|f\|_{\alpha-1}$$

*para toda función $f \in H_{\alpha-1}^\infty$.*

**Demostración.** Primero suponga $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Entonces, como $f \in H(\mathbb{D})$, se sigue que

$$f(z) = f(0) + \int_{[0,z]} f'(s)ds$$

y por tanto

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \int_{[0,z]} |f'(s)||ds|.$$

Por otra parte, note que

$$\int_{[0,z]} |f'(s)||ds| \leq \|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \int_{[0,z]} \frac{|ds|}{(1-|s|^2)^\alpha}$$

de donde, usando la parametrización $s(t) = tz$ con $0 \leq t \leq 1$, obtenemos

$$\int_{[0,z]} \frac{|ds|}{(1-|s|^2)^\alpha} = \int_0^1 \frac{|s'(t)|}{(1-|s(t)|^2)^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{|z|}{(1-t^2|s|^2)^\alpha} \leq \int_0^1 \frac{|z|}{(1-t|z|)^\alpha} dt$$

lo cual implica usando el cambio $w = 1 - t|z|$ que

$$\int_{[0,z]} |f'(s)||ds| \leq -\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \int_1^{1-|z|} \frac{dw}{w^\alpha} = \frac{\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}}{\alpha - 1}\{(1-|z|)^{1-\alpha} - 1\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\alpha-1} &\leq |f(0)| + \frac{\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}}{\alpha-1}\{2^{\alpha-1} - (1-|z|^2)^{\alpha-1}\} \leq |f(0)| + \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha-1}\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \\ &\leq (1+C_\alpha)\{|f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}\} = (1+C_\alpha)\|f\|. \end{aligned}$$

Recíprocamente, suponga que $f \in H^\infty_{\alpha-1}$. Usando la fórmula integral de Cauchy para la derivada

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{f(s)}{s^2} ds$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s|=r} \frac{|f(s)|}{|s|^2} |ds| = \frac{1}{2\pi r^2} \int_{|s|=r} |f(s)||ds| \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \int_{|s|=r} \frac{(1-|s|^2)^{\alpha-1+1}|f(s)|}{(1-|s|^2)^\alpha} |ds| \leq \frac{\|f\|_{\alpha-1}}{2\pi r^2(1-|r|^2)^\alpha} \int_{|s|=r} |ds| \\ &= \frac{\|f\|_{\alpha-1}}{r(1-r^2)^\alpha} \end{aligned}$$

para todo $|z| < r$. Con esta última desigualdad en mente, considere los dos casos siguientes:

(1) Si $|z| < r = 1/2$, entonces $(1/2)(3/4)^{\alpha}|f'(z)| \leq \|f\|_{\alpha-1}$, es decir,

$$(1 - |z|^2)^{\alpha}|f'(z)| \leq |f'(z)| \leq C_{\alpha}\|f\|_{\alpha-1},$$

donde $C_{\alpha} = 2(4/3)^{\alpha}$.

(2) Ahora, si $|z| \geq 1/2$, haciendo $r \to |z|^{+}$ se obtiene la desigualdad

$$|z|(1 - |z|^2)^{\alpha}|f'(z)| \leq \|f\|_{\alpha-1},$$

lo cual implica $1/2(1 - |z|^2)^{\alpha}|f'(z)| \leq \|f\|_{\alpha-1}$, y por tanto

$$(1 - |z|^2)^{\alpha}|f'(z)| \leq 2\|f\|_{\alpha-1}.$$

Así, se puede concluir que $\|f\|_{\mathcal{B}_{\alpha}} \leq C_{\alpha}\|f\|_{\alpha-1}$. Luego, $\|f\| \leq (1 + C_{\alpha})\|f\|_{\alpha-1}$ y se concluye lo propuesto. ∎

## 2.2 El espacio de Korenblum pequeño

Ahora se centra la atención en un subespacio del espacio Korenblum que será de gran utilidad para estudiar ciertas propiedades del Operador Multiplicación actuando sobre el espacio Korenblum.

**Definición 2.2.1.** Se dice que una función analítica $f$ definida en el disco $\mathbb{D}$, pertenece a la clase $H_{\alpha}^{0}$ si

$$\lim_{|z| \to 1^{-}} (1 - |z|^2)^{\alpha}|f(z)| = 0.$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.1.** *$H_{\alpha}^{0}$ es un subespacio cerrado de $H_{\alpha}^{\infty}$.*

**Demostración.** Primero se mostrará que $H_{\alpha}^{0} \subset H_{\alpha}^{\infty}$. Con este fin, sea $f \in H_{\alpha}^{0}$, entonces

$$\lim_{|z| \to 1^{-}} (1 - |z|^2)^{\alpha}|f(z)| = 0,$$

es decir, dado $\varepsilon > 0$ , se puede encontrar $r_0 \in (0,1)$ tal que la función

$$g(z) = (1 - |z|^2)^{\alpha} |f(z)|$$

satisface $g(z) < \varepsilon$ siempre que $r_0 < |z| < 1$.

Por otro lado, si $|z| \leq r_0$ , entonces la función $g$ es continua sobre el compacto $\mathbb{D}_{r_0} = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r_0\}$, luego, existe $M > 0$ tal que $g(z) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{D}_{r_0}$. Así, se tiene que

$$(1 - |z|^2)^{\alpha} |f(z)| \leq \max\{\varepsilon, M\} = \widetilde{M}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Tomando supremo sobre todos los $z \in \mathbb{D}$, se obtiene que

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \{(1 - |z|^2)^{\alpha} |f(z)|\} \leq \widetilde{M}$$

y $f \in H_{\alpha}^{\infty}$.

Ahora se demostrará que $H_{\alpha}^{0}$ es subespacio de $H_{\alpha}^{\infty}$. Sean $f, g \in H_{\alpha}^{0}$ , $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, la desigualdad triangular y la definición del espacio $H_{v}^{0}$ implican que

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^{\alpha} |(\lambda f + g)(z)| &\leq \lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^{\alpha} |(\lambda f)(z)| + \lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^{\alpha} |g(z)| \\ &= |\lambda| \lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^{\alpha} |f(z)| + \lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^{\alpha} |g(z)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda f + g \in H_{\alpha}^{0}$ .

Finalmente, se muestra que $H_{\alpha}^{0}$ es un subconjunto cerrado de $H_{\alpha}^{\infty}$. Con este fin, sea $f \in \overline{H_{\alpha}^{0}}$, entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subset H_{\alpha}^{0}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{\alpha} = 0. \tag{2.3}$$

En particular $\{f_n\}$ es una sucesión del espacio completo $H_{\alpha}^{\infty}$, por lo que se obtiene que $f \in H_{\alpha}^{\infty}$ y así, en particular, $f \in H(\mathbb{D})$. Falta demostrar que

$$\lim_{|z| \to 1^-} \left(1 - |z|^2\right)^{\alpha} |f(z)| = 0.$$

Con tal fin, sea $\varepsilon > 0$, entonces de la expresión (2.3) se garantiza que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_0} - f\|_\alpha < \varepsilon$. Así, por la definición de la norma del espacio de Korenblum se debe tener que,

$$\left(1 - |z|^2\right)^\alpha |f_{n_0}(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; esto último junto con la desigualdad triangular implica que,

$$\left(1 - |z|^2\right)^\alpha |f(z)| < \left(1 - |z|^2\right)^\alpha |f_{n_0}(z)| + \varepsilon$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, tomando límite cuando $|z| \to 1^-$ se concluye que,

$$0 \leq \lim_{|z| \to 1^-} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha |f(z)| \leq \varepsilon$$

y la prueba sigue de la arbitrariedad de $\varepsilon$. ■

Ahora se verá que las funciones en el espacio de Bloch pequeño se pueden aproximar por sus dilataciones.

**Teorema 2.2.2.** *Sea $f \in H_\alpha^\infty$, entonces $f \in H_\alpha^0$ si y sólo si $\|f_r - f\|_\alpha \to 0$ $(r \to 1^-)$, donde $f_r(z) = f(rz)$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $r \in (0,1)$.*

**Demostración.** Suponga primero que $f \in H_\alpha^0$. Se debe mostrar que $||f_r - f||_\alpha \to 0$ cuando $r \to 1^-$. Por definición del espacio $H_\alpha^0$, se tiene que

$$\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)^\alpha |f(z)| = 0,$$

es decir, que dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que $(1 - |z|^2)^\alpha |f(z)| < \varepsilon$ siempre que $\delta < |z| < 1$. Suponga que $\delta < r < 1$ y considere lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|f_r - f\|_\alpha &= \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2)^\alpha |f_r(z) - f(z)| \\ &\leq \sup_{|z| \leq \delta} (1 - |z|^2)^\alpha |f_r(z) - f(z)| + \sup_{\delta < |z| < 1} (1 - |z|^2)^\alpha |f_r(z) - f(z)|. \end{aligned}$$

Note que

$$\sup_{|z| \leq \delta} (1 - |z|^2)^\alpha |f_r(z) - f(z)| \to 0$$

cuando $r \to 1^-$ ya que $f(rz) \to f(z)$ uniformemente sobre el compacto $|z| \leq \delta$.

Por otra parte, de la desigualdad triangular, se tiene que

$$\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^\alpha |f_r(z)-f(z)| \leq \sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^\alpha |f_r(z)| + \sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^\alpha |f(z)|.$$

También como $r \in (0,1)$, se cumple que $(1-|z|^2)^\alpha \leq (1-|rz|^2)^\alpha$, así que sustituyendo se obtiene que

$$\sup_{\delta<|z|<1}(1-|z|^2)^\alpha |f_r(z)| \leq \sup_{\delta<|z|<1}(1-|rz|^2)^\alpha |f(rz)|.$$

De todo lo anterior se puede concluir que

$$\|f_r - f\|_\alpha \leq 2\varepsilon$$

siempre que $\delta < r < 1$.

Recíprocamente, suponga que $\|f_r - f\|_\alpha \to 0$ cuando $r \to 1^-$. Observe que cada $f_r$ es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ y por tanto continua sobre este conjunto compacto; entonces existe una constante $M > 0$ tal que $|f_r(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Así,

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha |f_r(z)| \leq \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha M = 0$$

de donde $f_r \in H_\alpha^0$, y como $H_\alpha^0$ es subconjunto cerrado de $H_\alpha^\infty$, se pude concluir que $f \in H_\alpha^0$, ya que $\|f_r - f\|_\alpha \to 0$. ■

Ahora se establecerá que las funciones en $H_\alpha^0$ se pueden aproximar por polinomios.

**Corolario 2.2.1.** *$H_\alpha^0$ es la clausura de los polinomios en $H_\alpha^\infty$.*

**Demostración.** Sea $f \in H_\alpha^0$ y $\epsilon > 0$, entonces por el Teorema 2.2.2 se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-}\|f_r - f\|_\alpha = 0,$$

de aquí que existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $\|f_r - f\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $1 - r_0 < r < 1$. Ahora, si $r \in (1-r_0, 1)$ es fijo, entonces como la función $f_r$ es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$, por el Teorema 1.3.9, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_r - P_{n_0}\|_\infty \leq \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f_r(z) - P_{n_0}(z)| < \frac{\epsilon}{2},$$

donde $P_{n_0}$ es el polinomio de Taylor de grado $n_0$ de la función $f_r$. Ahora, como $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\infty$ (ver Proposición 2.1.2) se concluye que

$$\|f_r - P_{n_0}\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalmente, para el $r$ dado y el $n_0$ encontrado, se tiene

$$\|f - P_{n_0}\|_\alpha \leq \|f - f_r\|_\alpha + \|f_r - P_{n_0}\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

que era lo que se quería demostrar. ■

**Comentario.** Del resultado anterior, se puede observar que para cada $\alpha > 0$, el espacio $H_\alpha^0$ es separable, pues cada polinomio analítico se puede aproximar por polinomios con coeficientes cuyas parte real e imaginaria sean racionales.

## 2.3 Funciones peso

Esta sección está dirigida a definir espacios de funciones analíticas que generalicen al espacio de las funciones acotadas $H^\infty$ y a los espacios tipo Bloch $H_\alpha^\infty$. Con este fin, en esta sección se definen y se estudian las propiedades de ciertas funciones con comportamientos similares a las funciones $w_1(z) = 1$ y $w_2(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ con $z \in \mathbb{D}$, las cuales están presente en la definición de los espacios antes mencionados. El material de referencia para los temas abordados en cuanto a las funciones pesos fue tomado de Bierstedt, Bonet y Taskinen (1998). En lo que sigue, se asume que $G$ es un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y que $H(G)$ denota el espacio de las funciones analíticas sobre $G$, dotado de la métrica de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $G$.

**Definición 2.3.1.** Una función $w$ no negativa, continua y acotada definida sobre $G$, se denomina *función peso*.

**Ejemplo 2.3.1.** Es claro que las funciones $w_1(z) = 1$ y $w_2(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ con $z \in \mathbb{D}$ son funciones pesos sobre $\mathbb{D}$, la función $w_3(z) = (1 - |z|)^{-1}$ con $z \in \mathbb{D}$ no es un peso pues esta función no es acotada.

Para una función peso $w$ sobre $G$, definimos el conjunto

$$B_w := \{f \in H(G) : |f(z)| \leq w(z) \text{ para todo } z \in G\}.$$

Puesto que $w$ es una función acotada en cada subconjunto compacto de $G$, el Teorema 1.5.4 implica que $B_w$ es una familia normal (ver Capítulo 1, Sección 3), y por tanto, es un conjunto compacto en el espacio $H(G)$ con la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos (ver Capítulo 1, Sección 5). Con esta notación, se tiene la siguiente definición de peso asociado.

**Definición 2.3.2.** Para un peso $w$ definido sobre $G$, se define la función *peso asociado* $\widetilde{w}$ por medio de la relación

$$\widetilde{w}(z) := \sup\{|f(z)| : f \in B_w\},$$

donde $z \in G$.

**Teorema 2.3.1.** *La relación $\widetilde{w}$ definida en (2.3.2) es una función peso.*

**Demostración.** Es claro que la función $\widetilde{w}$ es no negativa, además, como la función $w$ es acotada, existe $M > 0$ tal que $w(z) \leq M$ para todo $z \in G$, luego, para cualquier función $f \in B_w$ y cualquier $z \in G$ se cumple que $|f(z)| \leq w(z) \leq M$, lo cual implica que $\widetilde{w}(z) \leq M$ y $\widetilde{w}$ es una función acotada.

Finalmente, puesto que $B_w$ es una familia compacta, resulta inmediatamente que el supremo en la definición de $\widetilde{w}$ es, realmente, un máximo. Más aún, el teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 1.5.1) implica que $B_w$ es una familia equicontinua, y así $\widetilde{w}$, está en la clausura puntual del conjunto equicontinuo de todos los supremos finitos de funciones $|f|$, con $f \in B_w$, por lo que $\widetilde{w}$ debe ser una función continua. Esto culmina la demostración del resultado. ■

A continuación son enumeradas otras propiedades del peso asociado $\widetilde{w}$.

**Teorema 2.3.2.** *Las siguientes proposiciones ocurren para el peso $\widetilde{w}$ asociado a $w$:*

1. *Para cada $z \in G$, $0 \leq \widetilde{w}(z) \leq w(z)$,*

2. *para $f \in H(G)$, $f \in B_w$ si y sólo si $f \in B_{\widetilde{w}}$,*

3. *para cada $z \in G$ existe $f = f_z \in B_w$ con $|f(z)| = \widetilde{w}(z)$,*

4. *$\widetilde{(\widetilde{w})} = \widetilde{w}$,*

5. *para $C > 0$ una constante arbitraria, se cumple que $\widetilde{w_1} = C\widetilde{w}$, donde $w_1 = C\,w$,*

6. *Si $w_1$ y $w_2$ son funciones pesos definidas sobre $G$, tales que $w_1 \leq w_2$, entonces $\widetilde{w}_1 \leq \widetilde{w}_2$,*

7. *Si $w_1$ y $w_2$ son funciones pesos definidas sobre $G$, definimos $w_3 = \min\{w_1, w_2\}$ y $w_4 = \min\{\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\}$, entonces $\widetilde{w_3} = \widetilde{w_4}$.*

**Demostración.** Sea $w$ un peso cualquiera, $B_w$ y $\widetilde{w}$ definidos como antes.

1. Sea $z \in G$, entonces, para toda función $f \in B_w$ se tiene $0 \leq |f(z)| \leq w(z)$; es decir, $w$ es cota superior de $B_w$. Así, por definición de supremo, se concluye que $0 \leq |f(z)| \leq \widetilde{w}(z) \leq w(z)$.

2. Suponga, en primer instante, que $f \in B_w$, es decir, $f \in H(G)$ y $|f| \leq w$. Entonces, por definición de $\widetilde{w}$ (es una cota superior), se cumple que $|f| \leq \widetilde{w}$ y por tanto $f \in B_{\widetilde{w}}$. Por otro lado, si $f \in B_{\widetilde{w}}$ entonces $|f| \leq \widetilde{w}$; y de la Propiedad *1* se puede concluir que $|f| \leq \widetilde{w} \leq w$, por lo que $f \in B_w$.

3. Sigue del hecho que $\widetilde{w}$ realmente es un máximo.

4. Es inmediata de la Propiedad *2*.

5. Sea $C \geq 0$ y $w_1 = Cw$, entonces para cada $z \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\widetilde{w_1}(z) &= \sup\{|f(z)| : f \in B_{Cw}\} = \sup\{|f(z)| : |f| \leq Cw \text{ en } G\} \\
&= \sup\left\{|f(z)| : \frac{1}{C}|f| \leq w \text{ en } G\right\} = \sup\{C|g(z)| : |g| \leq w \text{ en } G\} \\
&= C\sup\{|g(z)| : |g| \leq w\ en\ G\} = C\sup\{|g(z)| : g \in B_w\} \\
&= C\widetilde{w}(z).
\end{aligned}$$

6. Sean $w_1$ y $w_2$ pesos asociados que cumplen $w_1 \leq w_2$. Por la Propiedad *1* se tiene $\widetilde{w}_1 \leq w_1 \leq w_2$. Ahora, de la desigualdad $|f| \leq w_1 \leq w_2$ se concluye que $w_1 = \widetilde{w}_2$ ó $w_1 < \widetilde{w}_2$ por definición de supremo (definición de $\widetilde{w}_2$). Luego se concluye en ambas alternativas que $\widetilde{w}_1 \leq \widetilde{w}_2$.

7. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $w_1 \leq w_2$. Entonces por definición $w_3 = \min\{w_1, w_2\} = w_1$ y por tanto $\widetilde{w}_3 = \widetilde{w}_1$. Por otra parte, de la Propiedad *6*, $\widetilde{w}_1 \leq \widetilde{w}_2$, de donde sigue que $\min\{\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2\} = \widetilde{w}_1$, es decir, $\widetilde{w}_4 = \widetilde{(\widetilde{w}_1)}$. Así, por la Propiedad *4*, se concluye que $\widetilde{w_3} = \widetilde{w_4}$.

Esto culmina la demostración del teorema. ■

**Observación 2.3.1.** Si $G$ es un conjunto acotado y $w$ se extiende a una función continua en $\overline{G}$ con $w|_{\partial G} \equiv 0$, entonces, por el principio del máximo (ver Teorema 1.3.6) $\widetilde{w} \equiv 0$ . Así, el peso asociado de un peso estrictamente positivo puede ser la función nula. Por ejemplo, para $\alpha > 0$ fijo, el peso usual $w_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ con $z \in \mathbb{D}$, satisface lo anterior y por tanto su peso asociado es $\widetilde{w}_\alpha \equiv 0$.

En el siguiente ejemplo se muestran que $\widetilde{w}$ puede ser estrictamente menor que $w$ para otras razones naturales.

**Ejemplo 2.3.2.** Si $G = \mathbb{C}$ y $w(z) = \max\{1, |z|^{n+p}\}, \quad z \in \mathbb{C}$, donde $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 < p < 1$ son valores fijos, entonces $\widetilde{w}(z) = \max\{1, |z|^n\}$ para cada $z \in \mathbb{C}$.

**Solución.** En efecto, para mostrar que $\widetilde{w}(z) = \max\{1, |z|^n\}$ considérese las tres siguientes situaciones:

1. Si $|z| \leq 1$, entonces $\max\{1, |z|^n\} = 1$ y $w(z) = 1$ por definición de máximo. Por otra parte, como $w(s) = \max\{1, |s|^{n+p}\} \geq 1$ para todo $s \in \mathbb{D}$, la función constante 1 está en $B_w$ y sigue de la definición de supremo que $\widetilde{w} \geq 1$. Por tanto, por la Propiedad 1 del Teorema 2.3.2, se tiene que $1 \leq \widetilde{w}(z) \leq w(z) = 1$, es decir, $\widetilde{w}(z) = \max\{1, |z|^n\} = 1$ para $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

2. Si $|z| > 1$, se tiene que $\max\{1, |z|^n\} = |z|^n$. Observe que la función $f(s) = s^n$ pertenece a $B_w$, pues para $|s| \leq 1$, $|f(s)| = |s|^n \leq 1 \leq \max\{1, |s|^{n+p}\} = w(s)$, mientras que para $|s| > 1$, $|f(s)| = |s|^n < |s|^{n+p} = w(s)$. Luego, se sigue por definición de máximo que $\widetilde{w}(z) \geq |f(z)| = |z|^n = \max\{1, |z|^n\}$ .

3. Note que $\widetilde{w}(z) \leq |z|^n$ en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, es decir, $|f(z)| \leq |z|^n$ para $|z| > 1$ y $f \in B_w$ arbitraria:

   Para ver esto, sea $f \in B_w$ y considere $g(u) := u^n f(1/u), u \neq 0$. Entonces $g$ es holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Pero $f \in B_w$ implica que
   $$|g(u)| = |u|^n \left| f\left(\frac{1}{u}\right) \right| \leq |u|^n w\left(\frac{1}{u}\right) = |u|^n \frac{1}{|u|^{n+p}} = \frac{1}{|u|^p},\ 0 < |u| \leq 1,$$
   luego, multiplicando por $|u|$, tomando el límite cuando $u \to 0$ y usando el hecho $0 < p < 1$, se concluye que $g$ debe tener una singularidad evitable en 0 (ver Teorema 1.3.10). Así, redefiniendo $g(0)$ se puede suponer que $g \in H(\mathbb{D})$; por lo que $|g(u)| \leq 1$ en $\partial\mathbb{D}$ (pues cuando $u \in \partial\mathbb{D}$, se tiene $|u|^p = 1$). Luego, haciendo el cambio $u = 1/z$ y usando el principio del módulo máximo se obtiene que $|f(z)/z^n| = |g(u)| \leq 1$ en $\mathbb{D}$. Así $|f(z)| \leq |z|^n$ para $|z| > 1$.

Luego de *(1)*, *(2)* y *(3)* se concluye que $\widetilde{w}(z) = \max\{1, |z|^n\}$. $\square$

Existen casos simples en los cuales $\widetilde{w} = w$ ocurre. Por ejemplo, si la función continua $w : G \mapsto \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ se define por

$$w = \sup\{|g| : g \in \mathcal{G}\}$$

para alguna familia $\mathcal{G} \subset H(G)$, entonces $g \in B_w$ para cada $g \in \mathcal{G}$, y por consiguiente $|g| \leq \widetilde{w}$. Por la Propiedad *3.* del Teorema 2.3.2, se concluye que

$$w = \sup\{|g| : g \in \mathcal{G}\} \leq \widetilde{w},$$

es decir, $\widetilde{w} = w$.

Para finalizar esta sección se clasifican algunos pesos que serán usados en las próximas secciones. Entre estos se destacan:

(a) Los *pesos radiales* $\upsilon$, los cuales por definición cumplen con la propiedad

$$\upsilon(z) = \upsilon(|z|),$$

para todo $z \in G$. Claramente, para que esto tenga sentido, se debe tener que $|z| \in G$ para todo $z \in G$.

(b) Los *pesos normales*, los cuales por definición tienden a la frontera no más rápido que algún peso $(1-|z|)^\alpha$, $0 < \alpha < \infty$, y no más lento que otro peso del mismo tipo, es decir, existen constantes positivas $k$ y $K$ tales que

$$k(1-|z|)^\alpha \leq \upsilon(z) \leq K(1-|z|)^\beta$$

para algunos $0 < \alpha < \infty$ y $0 < \beta < \infty$.

(c) Los *pesos moderados* $\upsilon(z)$; aquellos donde $-\Delta \log \upsilon(z) \sim (1-|z|^2)^{-2}$, es decir, existen constantes positivas $c$ y $C$ tales que

$$c(1-|z|^2)^{-2} \leq -\Delta \log \upsilon(z) \leq C(1-|z|^2)^{-2},$$

donde $\Delta$ denota el operador Laplaciano.

**Ejemplo 2.3.3.** Los siguientes son ejemplos de los pesos antes definidos.

1. Las funciones $w_1(z) = 1$ y $w_2(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, con $z \in \mathbb{D}$ y $\alpha > 0$ son claramente pesos radiales sobre $\mathbb{D}$; mientras que las funciones $w_3(z) = |Re(z)|$ y $w_4(z) = |Im(z)|$ son pesos no radiales.

2. Un ejemplo interesante de pesos radiales que son a su vez normales es el siguiente:

   Considere la función peso $w_5(z) = (1 - |z|^2)\ln(2/(1 - |z|^2))$. Es fácil ver que $\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{1/2}\ln(2/(1 - |z|^2)) = 0$ (use el cambio $t = 1/(1 - |z|^2)$ y aplique el Teorema de L'Hospital), por lo que dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $(1 - |z|^2)^{-1/2}w_5(z) \leq 1$ siempre que $\delta < |z| < 1$. Es decir,

   $$w_5(z) \leq (1 - |z|^2)^{1/2}.$$

   Por otro lado, note que si $\delta \geq |z|$ entonces existen constantes $c_\delta$ y $k_\delta$ positivas tal que $\ln(2/(1 - |z|^2)) \leq c_\delta$ y $k_\delta \leq (1 - |z|^2)^{1/2}$, y se tiene que

   $$\ln\left(\frac{2}{1 - |z|^2}\right) \leq \frac{c_\delta}{k_\delta}k_\delta \leq \frac{c_\delta}{k_\delta}(1 - |z|^2)^{1/2}$$

   y como $\ln(2) \leq \ln(2/(1 - |z|^2))$, se concluye que

   $$\ln(2)(1 - |z|^2) \leq w_5(z) \leq k(1 - |z|^2)^{1/2}.$$

3. El peso $w_6(z) = \exp(c/(1 - |z|^2))$, con $z \in \mathbb{D}$ y $c \neq 0$, es radial pero no es un peso normal. Para ver esto, suponga que $w_6(z)$ es normal, es decir, suponga que existen constantes $\alpha, \beta, c_1, c_2$ todas positivas tales que

   $$c_1(1 - |z|^2)^\alpha \leq w_6(z) \leq c_2(1 - |z|^2)^\beta$$

   para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que la función $h(z) = (1 - |z|^2)^{-\beta}w_6(z)$ es acotada para todo $z \in \mathbb{D}$; lo cual es imposible ya que $h(z) \to \infty$ cuando $|z| \to 1^-$ (para ver esto use el cambio devariable $t = 1/(1 - |z|^2)$).

$\square$

## 2.4 Espacios tipo Korenblum generalizados

Ahora se procede a definir espacios de funciones analíticas que generalicen a los espacios anteriormente estudiados como lo son el espacio de las funciones analíticas acotadas $H^\infty$ y los espacios de Korenblum $H^\infty_\alpha$. Como antes, $\mathbb{C}$ denota el plano complejo y $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es el disco unitario abierto. Considérese fija una función peso $v$ definida sobre $\mathbb{D}$; es decir, $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es una función no negativa, continua y acotada. Todavía más, suponga que $v$ no es la función nula. Entonces, con estas notaciones se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.4.1.** Una función analítica $f$ definida sobre $\mathbb{D}$ se dice que pertenece a la clase $H^\infty_v$, si satisface la relación

$$\|f\|_v := \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| < \infty \tag{2.4}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Puede notarse que si $f, g \in H^\infty_v$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces se verifica

$$\begin{aligned} \|\alpha f + g\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|(\alpha f + g)(z)| \\ &\le |\alpha| \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|g(z)| \\ &= |\alpha|\|f\|_v + \|g\|_v < \infty, \end{aligned} \tag{2.5}$$

por lo que $H^\infty_v$ es, efectivamente, un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, $H(\mathbb{D})$; además, es claro que cuando $v \equiv C$, una constante, el espacio $H^\infty_v$ coincide con $H^\infty$ y cuando $v(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$ con $z \in \mathbb{D}$ y $\alpha > 0$ fijo, se obtiene que $H^\infty_v = H^\infty_\alpha$; por tal motivo, al espacio $H^\infty_v$ se le llama *espacio de Korenblum generalizado.*

**Comentario 2.4.1.** El espacio $H^\infty_v(\mathbb{D})$ se puede definir sustituyendo al conjunto $\mathbb{D}$ por $G$, donde $G$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$, es decir,

$$H^\infty_v := H^\infty_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z\in G} v(z)|f(z)| \le \infty \right\}.$$

Los siguientes son ejemplos de funciones en el espacio $H_v^\infty$:

**Ejemplo 2.4.1.** Sea $P[z]$ el conjunto de todos los polinomios con variable compleja $z$, entonces $P[z] \subset H_v^\infty$. En particular, toda función constante está en $H_v^\infty$.

En efecto, sea $q \in P[z]$, entonces $q$ es de la forma

$$q(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $C = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)$, entonces, de la desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned}
\|q\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|q(z)| \leq C \sup_{z\in\mathbb{D}}(|a_0| + |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n) \\
&\leq C\left(|a_0| \sup_{z\in\mathbb{D}} 1 + |a_1| \sup_{z\in\mathbb{D}} |z| + |a_2| \sup_{z\in\mathbb{D}} |z|^2 + \cdots + |a_n| \sup_{z\in\mathbb{D}} |z|^n\right) \\
&\leq CnM < \infty,
\end{aligned}$$

donde $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|\}$. □

Sobre la relación entre los espacios $H^\infty$ y $H_v^\infty$ se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.1.** *$H^\infty \subset H_v^\infty$ y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_v \leq C\|f\|_\infty$$

*para toda $f \in H^\infty$.*

**Demostración.** Sea $f \in H^\infty$, como $v$ es un peso acotado en $\mathbb{D}$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que $|v(z)| \leq C$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Así, sigue de la desigualdad

$$\|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| \leq C \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| = C\|f\|_\infty \leq \infty,$$

que $f \in H_v^\infty$. ■

**Comentario 2.4.2.** De la demostración del teorema anterior se puede ver la relación

$$\|f\|_v \leq \|v\|_\infty \|f\|_\infty$$

para toda función $f \in H^\infty$. La condición $v \in H^\infty$ es esencial para la obtención del resultado anterior, ya que, de no contar con esta propiedad, muchas funciones importantes en $H^\infty$, como por ejemplo las funciones constantes, no tendrían garantía de pertenecer al espacio $H_v^\infty$. De hecho, en el siguiente ejemplo, se muestra que si $v$ no es una función acotada, entonces $H_v^\infty$ podría constar solamente de la función nula.

**Ejemplo 2.4.2.** Considere el espacio $H_v^\infty$ con el peso $v(z) = 1/(1-|z|)$. Claramente, para $f \in H_v^\infty$, $|f(z)| \leq (1-|z|)\|f\|_v$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, sigue del hecho que $|f(z)| = 0$ cuando $|z| \to 1^-$ y del principio del módulo máximo que $|f(z)| = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, es decir, $f$ es la función nula y por tanto $H_v^\infty = \{0\}$.
$\square$

El siguiente ejemplo ilustra que, en general, no siempre toda función en $H_v^\infty$ esta en $H^\infty$, es decir, la contención $H^\infty \subset H_v^\infty$ es propia.

**Ejemplo 2.4.3.** Considere la función peso $v$ definida por $v(z) = 1 - |z|^2$ y $f$ definida por $f(z) = \frac{1}{1-z}$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces $f \in H_v^\infty \setminus H^\infty$.

Observe que $f(z) = \frac{1}{1-z} \notin H^\infty$, pues, para valores de $z$ suficientemente cercanos a 1, la norma $\|f\|_\infty$ toma valores infinitos. Sin embargo, para el caso de la norma $\|f\|_v$ se tiene:

$$\begin{aligned} \|f\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\frac{1}{|1-z|} \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)(1+|z|)}{1-|z|} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1+|z|) = 2 < \infty, \end{aligned}$$

por lo cual se concluye que $f \in H_v^\infty \setminus H^\infty$. $\square$

El siguiente es un ejemplo de una función que no pertenece al espacio $H_v^\infty$, para un peso dado.

**Ejemplo 2.4.4.** Considere el peso $\upsilon$ definido por $\upsilon(z) = 1 - |z|^2$ y sea $f$ la función definida por

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2},$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces $f \notin H_\upsilon^\infty$.

En efecto, observe que si $\lim_{z\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} = L$ (existe), entonces este límite debe ser igual a $L$, cualquiera sea la trayectoria que siga $z$ hacia 1. Con este comentario, suponiendo que $z$ sigue la trayectoria real $z = x$, se obtiene

$$L = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = \infty,$$

de donde se puede concluir que

$$\begin{aligned} \|f\|_\upsilon &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \upsilon(z)|f(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \\ &\geq \sup_{0<x<1} \frac{1-x^2}{(1-x)^2} \\ &= \sup_{0<x<1} \frac{1+x}{1-x} = \infty. \end{aligned}$$

□

Del ejemplo anterior se nota que, para un peso fijo, es relativamente fácil construir funciones que no pertenezcan al espacio $H_\upsilon^\infty$, sólo hay que notar, por definición, que si $f \in H_\upsilon^\infty$, entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{C}{\upsilon(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, las funciones en $H_\upsilon^\infty$ están dominados por la función $1/\upsilon$.

Seguidamente se dota al espacio $H_\upsilon^\infty$ de una norma que lo convierte en un espacio de Banach.

**Proposición 2.4.1.** *La relación $\|\cdot\|_v$ definida en (2.4) es una norma para $H_v^\infty$.*

**Demostración.** Sean $f, g \in H_v^\infty$, entonces de la relación (2.5) con $\alpha = 1$ se tiene

$$\|f+g\|_v \leq \|f\|_v + \|g\|_v.$$

También, es fácil ver que

$$\|\alpha f\|_v = |\alpha|\|f\|_v,$$

para toda $f \in H_v^\infty$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Por otra parte, si $f \equiv 0$ entonces $v(z)|f(z)| = 0$, para todo $z \in \mathbb{D}$ y por tanto $\|f\|_v = 0$. Recíprocamente, si $\|f\|_v = 0$ entonces $v(z)|f(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| = 0$ y como $v$ no es la función nula debe existir $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $v(z_0) > 0$. Luego, de la continuidad de $v$ en $z_0$, existe un disco $D(z_0, \delta)$ tal que $v(z) > 0$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$. Así, $f(z) = 0$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$ y como $f \in H(\mathbb{D})$, por el principio de identidad de Weierstrass, $f$ debe ser la función nula en $\mathbb{D}$, ya que $D(z_0, \delta)$ posee puntos de acumulación. Por tanto se concluye que $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$ es espacio normado. ■

**Comentario 2.4.3.** Observe que si $v$ es continua en $z_0$, tomando $\varepsilon = 1/2v(z_0) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $v(z_0) - v(z) \leq |v(z) - v(z_0)| < 1/2v(z_0)$ siempre que $|z - z_0| < \delta$. Luego $v(z) > 1/2v(z_0) > 0$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$.

Ahora se demuestra que este espacio tipo Korenblum es de Banach con la norma definida anteriormente. Se supone, por comodidad, que la función peso $v$ es estrictamente positiva en $\mathbb{D}$.

**Teorema 2.4.2.** *Para $v$ un peso en $\mathbb{D}$, el par $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$ es un espacio de Banach.*

**Demostración.** Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Primero observe que, por definición de supremo

$$\upsilon(z)|f(z)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \upsilon(z)|f(z)|$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; de donde se obtiene que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\upsilon(z)}\|f\|_v$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por otra parte, note que al ser $v(z)$ continua sobre el compacto $K \subset \mathbb{D}$, se tiene que $v(z)$ es una función acotada en $K$. Así, como $v(z) > 0$, la función $h = 1/v$ también es continua y acotada en $K$. Luego, existe una constante $M_K > 0$, que depende sólo de $v$ y del compacto $K$, tal que $h(z) \leq M_K$, para todo $z \in K$; y por tanto

$$|f(z)| \leq M_K\|f\|_v$$

para toda función $f \in H_v^\infty,\ z \in K \subseteq \mathbb{D}$. De aquí se obtiene que

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq M_K\|f\|_v.$$

En particular, para $f_n - f_m$ se verifica

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq M_K\|f_n - f_m\|_v.$$

Ahora, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$, se concluye que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Luego, por el Corolario 1.5.1, existe $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, y por tanto $\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $z \in K$.

Para mostrar que $f \in H_v^\infty$ y que $\|f_n - f\|_v \to 0$ cuando $n \to \infty$, primero considere la dilatación $f_r(z) = f(rz),\ 0 < r \leq 1$. Se tiene que $f_r \in H_v^\infty$, pues

$$\|f_r\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f_r(z)| \leq \|v\|_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(rz)| \leq \|v\|_\infty \sup_{w\in\overline{D}(0,r)} |f(w)| \leq M\|v\|_\infty$$

ya que al ser la función $f$ analítica en el conjunto compacto $\overline{D}(0,r) \subseteq \mathbb{D}$, resulta que es continua en $\overline{D}(0,r)$ y por tanto acotada en ese conjunto. Así $f_r \in H_v^\infty$.

También, se observa que

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r\|_v = \|f\|_v. \tag{2.6}$$

En efecto, como

$$|\|f_r\|_v - \|f\|_v| \leq \|f_r - f\|_v\,,$$

y además la función $v$ es acotada, se tiene que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(rz) - f(z)| \leq M \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(rz) - f(z)|,$$

donde $M = \|v\|_\infty$; así que sólo resta ver que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(rz) - f(z)| \to 0$ cuando $r \to 1^-$. Con este fin, sea $\varepsilon > 0$, por definición de supremo, existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(rz) - f(z)| \leq (1+\varepsilon)|f(rz_0) - f(z_0)|;$$

así que tomando limite cuando $r \to 1^-$ y usando la continuidad de $f$ sobre el compacto $D(0,r)$ se obtiene lo afirmado. Finalmente se observar que existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$\|f_r\|_v \leq \|f\|_v, \text{ para todo } r > r_0. \tag{2.7}$$

Para ver esto, note que de la definición de supremo, dado $\varepsilon > 0$ existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f_r\|_v \leq v(z_0)|f(rz_0)| = \frac{v(z_0)}{v(rz_0)} v(rz_0)|f(rz_0)|.$$

Por otra parte, de la continuidad de $v$, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$\frac{v(z_0)}{v(rz_0)} \leq (1+\varepsilon)$$

para todo $r > r_0$, por lo que

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|f_r\|_v \leq (1+\varepsilon) v(rz_0)|f(rz_0)| \leq (1+\varepsilon)\|f\|_v.$$

Luego si $\varepsilon \to 0^+$, entonces $\|f_r\|_v \leq \|f\|_v$ para todo $r > r_0$.

Ahora bien, como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_v < \varepsilon$ cuando $n, m \geq N$. Entonces para $r$ suficientemente cercano a 1 se tiene

$$\begin{aligned} \|(f_n)_r - f_r\|_v &\leq \|(f_n)_r - (f_m)_r\|_v + \|(f_m)_r - f_r\|_v \\ &\leq \|f_n - f_m\|_v + \|(f_m)_r - f_r\|_v \\ &< \varepsilon + \|(f_m)_r - f_r\|_v, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde se ha usado (2.7) en la segunda desigualdad.

Se afirma que el último término tiende a cero cuando $m \to \infty$. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \|(f_m)_r - f_r\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\, |(f_m)_r(z) - f_r(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) |f_m(rz) - f(rz)| \\ &= \sup_{w\in D(0,r)} v(w/r) |f_m(w) - f(w)| \\ &\leq \|v\|_\infty \sup_{w\in\overline{D}(0,r)} |f_m(w) - f(w)|, \end{aligned}$$

y como $f_m \to f$ uniformemente sobre el subconjunto compacto $\overline{D}(0,r) \subset \mathbb{D}$, se sigue que $\|(f_m)_r - f_r\|_v$ tiende a cero cuando $m \to \infty$.

Sustituyendo en (2.8), se obtiene

$$\|(f_n)_r - f_r\|_v \leq \varepsilon$$

para $n \geq N$ y todo $r < 1$. Así que tomando límite cuando $r \to 1$ y usando relación (2.6), se concluye que

$$\|f_n - f\|_v = \lim_{r\to 1} \|(f_n)_r - f_r\| v \leq \varepsilon$$

siempre que $n \geq N$; lo cual significa que $\|f_n - f\|_v \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_v < 1,$$

siempre que $n \geq n_0$, y en particular

$$\|f_{n_0} - f\|_v < 1,$$

por lo cual, $h = f_{n_0} - f \in H_v^\infty$. Finalmente, como $H_v^\infty$ es un espacio vectorial se tiene que $f_{n_0} - f - f_{n_0} \in H_v^\infty$, así $-f \in H_v^\infty$ y $f \in H_v^\infty$. Esto finaliza la demostración del teorema. ■

Se estudia ahora la relación entre el espacio tipo Korenblum $H_v^\infty$ y el espacio $H_{\widetilde{v}}^\infty$, donde $\widetilde{v}$ es el peso asociado a $v$ (ver la Definición 2.3.2). Suponga que el peso $v$ es estrictamente positivo sobre $\mathbb{D}$, entonces si se considera la condición de crecimiento $w := 1/v$ (observe que en general $w$, no es un peso pues, podría ocurrir que $w$ no fuese acotada), se tiene que

$$B_w = \{f \in H(\mathbb{D}) : |f(z)| \leq w(z) \; en \; \mathbb{D}\} = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_v \leq 1\},$$

es decir, $B_w$ es la bola unitaria cerrada del espacio normado $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$. Luego, si se define el *asociado* de $w$, en similitud con la Definición 2.3.2, por

$$\widetilde{w}(z) := \sup\{|f(z)| : f \in B_w\},$$

entonces para cada $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\|\delta_z\| = \sup\{|f(z)| : \|f\|_v \leq 1\} = \widetilde{w}(z),$$

donde $\delta_z$ es el funcional evaluación actuando sobre el espacio $(H_v^\infty, \|\cdot\|_v)$, y el cual se define por

$$\delta_z(f) := f(z),$$

con $f \in H_v^\infty$ (ver Capítulo 1, Sección 1 para la definición de la norma de un operador).

De manera entonces que la condición de crecimiento $w = 1/v$ y su asociado $\widetilde{w}$ proporcionan más información sobre el espacio $H_v^\infty$ que el mismo peso que lo define. De hecho, si consideramos el peso

$$\widetilde{\upsilon}_e(z) := \frac{1}{\widetilde{w}(z)} = \frac{1}{\sup\{|f(z)| : \|f\|_\upsilon \leq 1\}}$$

donde $1/0 = +\infty$, se tiene, por la parte *(i)* del Teorema 2.3.2, que $\widetilde{\upsilon} \leq \upsilon \leq \widetilde{\upsilon}_e$ y además.

**Teorema 2.4.3.** *El espacio $H^\infty_{\widetilde{\upsilon}_e}$ es isométricamente igual a $H^\infty_\upsilon$.*

**Demostración.** En efecto, se observa que, de la desigualdad $\upsilon(z) \leq \widetilde{\upsilon}_e(z)$, válida para todo $z \in \mathbb{D}$, que $\|f\|_\upsilon \leq \|f\|_{\widetilde{\upsilon}_e}$ para toda función $f \in H^\infty_{\widetilde{\upsilon}_e}$; de donde se sigue que $H^\infty_{\widetilde{\upsilon}_e} \subseteq H^\infty_\upsilon$.

Por otro lado, si $f \in H^\infty_\upsilon$ es tal que $\|f\|_\upsilon = 1$, entonces se tiene que $f \in B_w$. Luego, por la propiedad *(2)* del Teorema 2.3.2, se tiene que $f \in B_{\widetilde{w}}$ lo cual significa que $|f(z)| \leq \widetilde{w}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y por tanto,

$$\widetilde{\upsilon}_e(z)\,|f(z)| \leq 1 = \|f\|_\upsilon$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, en este caso, se tiene $f \in H^\infty_{\widetilde{\upsilon}_e}$ y $\|f\|_{\widetilde{\upsilon}_e} \leq \|f\|_\upsilon$.

Finalmente, para cualquier función no nula $f \in H^\infty_\upsilon$, se puede considerar la función $f/\|f\|_\upsilon$ y concluir, de la desigualdad

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_\upsilon}\right\|_{\widetilde{\upsilon}_e} \leq \left\|\frac{f}{\|f\|_\upsilon}\right\|_\upsilon,$$

que $\|f\|_{\widetilde{\upsilon}_e} \leq \|f\|_\upsilon$ y $H^\infty_\upsilon \subseteq H^\infty_{\widetilde{\upsilon}_e}$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

**Comentario 2.4.4.** En virtud del resultado anterior y en vista de los comentarios antes de introducir el peso $\widetilde{\upsilon}_e$, se considera el peso $\widetilde{\upsilon}_e$ como mejor asociado al espacio $H^\infty_\upsilon$ que el mismo $\upsilon$. Si $\widetilde{\upsilon}_e$ es equivalente a $\upsilon$, en el sentido que

$$\upsilon \leq \widetilde{\upsilon}_e \leq C\upsilon$$

para alguna constante $C > 0$, entonces se dice que el peso $\upsilon$ es *esencial*. En este caso, los espacios $H^\infty_\upsilon$ y $H^\infty_{\widetilde{\upsilon}_e}$ son aún isomorfos topológicamente.

**Ejemplo 2.4.5.** El peso $v(z) = (1 - |z|)^\alpha$ es esencial. De hecho, se tiene que para para $z \in \mathbb{D}$, se cumple que $v(z) = \widetilde{v}_e(z)$.

Para ver esta afirmación primero observe que $v(z) \leq \widetilde{v}_e(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo cual sólo resta mostrar que $v(z) \geq \widetilde{v}_e(z)$, es decir, se debe ver que

$$\|\delta_z\| \geq \frac{1}{v(z)}.$$

Considere en primer lugar $z_0 = 0$ y la función $g(z) = 1$ con $z \in \mathbb{D}$. Entonces por definición de la norma del funcional evaluación en $z_0 = 0$, se tiene que

$$\|\delta_0\| \geq |g(0)| = 1 = \frac{1}{v(0)}$$

y la relación se cumple para $z_0 = 0$.

Suponga ahora $z_0 \neq 0$, es fijo, y considere la función

$$g(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|} z\right)^\alpha},$$

con $z \in \mathbb{D}$. Observe que $||g||_v \leq 1$, pues

$$\|g\|_v = \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|)^\alpha \frac{1}{|1 - \frac{\overline{z_0}}{|z_0|} z|^\alpha} \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|)^\alpha \frac{1}{(1 - |z|)^\alpha} = 1$$

Luego, de la desigualdad anterior y la definición de la norma del funcional evaluación, se debe tener $||\delta_{z_0}|| \geq |g(z_0)| = 1/(1 - |z_0|)^\alpha = 1/v(z_0)$.

De todo lo anterior, se concluye entonces $||\delta_z|| \geq 1/v(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y así $v(z) = \widetilde{v}_e(z)$. $\square$

**Comentario 2.4.5.** Existen muchos tipos de pesos esenciales (ver Bierstedt, Bonet y Taskinen (1998) y todas sus referencias). En particular, si $v(z) = 1/M(f, |z|)$ para alguna función analítica $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, entonces $v = \tilde{v}$; donde

$$M(f, |z|) := \sup \{|f(z)| : |z| = r\}$$

(ver Bonet, Domanski, Lindstrom, y Taskinen (1998) para más detalles).

A continuación se muestra un ejemplo de un peso no esencial.

**Ejemplo 2.4.6.** Según el Comentario 2.4.1, el espacio $H_v^\infty(\mathbb{D})$ puede ser definido sustituyendo al conjunto $\mathbb{D}$ por algún conjunto abierto $G \subset \mathbb{C}$. Considérese pues el dominio $G = \mathbb{C}$ y el peso

$$v(z) = \frac{1}{max\{1, |z|^{n+p}\}}$$

para $z \in \mathbb{C}$; donde $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < 1$. Note que $w(z) = max\{1, |z|^{n+p}\}$ no es más que el peso estudiado en el Ejemplo 2.3.2, caso en el cual $\tilde{w}(z) = max\{1, |z|^n\}$ y por tanto $\tilde{v}_e(z) = 1/max\{1, |z|^n\}$. Entonces, al suponer que $v$ es esencial debe existir una constante $C > 0$ tal que $v(z) \leq \tilde{v}_e(z) \leq Cv(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, la función $h(z) = \tilde{v}_e(z)/v(z) = |z|^p$ con $|z| > 1$ debe ser acotada en $\mathbb{C}$; lo cual no es cierto. Por tanto, el peso $v(z) = 1/max\{1, |z|^{n+p}\}$ constituye un ejemplo de peso no esencial. □

## 2.5 El espacio $H_v^0$

Ahora se define y estudia las propiedades de un subespacio del espacio tipo Korenblum $H_v^\infty$ que generaliza al espacio de Korenblum pequeño $H_\alpha^0$. Como antes, se supondrá fija una función peso $v$ estrictamente positiva y definida sobre $\mathbb{D}$. En virtud del Teorema 2.4.3 y cuando la situación lo requiera, podemos trabajar, en la expresión que define a la norma, con el peso $\widetilde{v}_e$ definido en el capitulo anterior en vez del peso $v$. Una función analítica $f$, definida en $\mathbb{D}$, se dice que pertenece a la clase $H_v^0$ si cumple con la condición

$$\lim_{|z|\to 1^-} v(z)|f(z)| = 0.$$

Por propiedades de los límites, es claro que $H_v^0$ es un subespacio de $H(\mathbb{D})$ y que las funciones constantes (salvo la función nula) pertenecen a este espacio sólo si

$$\lim_{|z|\to 1^-} v(z) = 0.$$

De hecho, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.1.** *$H_v^0$ es un subespacio cerrado de $H_v^\infty$.*

**Demostración.** Observe primero que $H_v^0 \subset H_v^\infty$. Con este fin, sea $f \in H_v^0$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} v(z)|f(z)| = 0,$$

es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$v(z)|f(z)| \leq \varepsilon$$

siempre que $1-\delta < |z| < 1$; de donde

$$\sup_{1-\delta<|z|<1} v(z)|f(z)| \leq \varepsilon. \tag{2.9}$$

Por otro lado, el conjunto $D_{1-\delta} = \{z : |z| \leq 1-\delta\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ en el cual tanto $f$ como $v$ son acotadas (esto resulta del hecho que $f$ sea analítica en $D_{1-\delta}$ y por tanto acotada por continuidad ). Así,

$$\sup_{|z|\leq 1-\delta} v(z)|f(z)| \leq C \tag{2.10}$$

para alguna constante $C > 0$. Luego, de (2.9) y (2.10) se tiene

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| \leq \sup_{|z|\leq 1-\delta} v(z)|f(z)| + \sup_{1-\delta<|z|<1} v(z)|f(z)| \leq C + \varepsilon$$

y se concluye que $f \in H_v^\infty$.

Ahora se muestra que $H_v^0$ es un subconjunto cerrado de $H_v^\infty$. Considérese una función $f \in \overline{H_v^0}$, entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subset H_v^0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_v = 0, \tag{2.11}$$

ya que $H_v^0 \subset H_v^\infty$ y $H_v^\infty$ es completo. Falta demostrar entonces que

$$\lim_{|z|\to 1^-} v(z)|f(z)| = 0.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces la expresión (2.11) garantiza que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_{n_0} - f\|_\upsilon \leq \varepsilon,$$

es decir,

$$\upsilon(z)|f_{n_0}(z) - f(z)| \leq \varepsilon,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; de donde, por desigualdad triangular, se obtiene

$$\upsilon(z)|f(z)| \leq \upsilon(z)|f_{n_0}(z) - f(z)| + \upsilon(z)|f_{n_0}(z)| \leq \|f_{n_0} - f\|_\upsilon + \upsilon(z)|f_{n_0}(z)|;$$

y por tanto, tomando límite cuando $|z| \to 1^-$ y usando el hecho que $f_{n_0} \in H_\upsilon^0$, se concluye que

$$\lim_{|z| \to 1^-} \upsilon(z)|f(z)| \leq \varepsilon.$$

Así que por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ finalmente se obtiene que

$$\lim_{|z| \to 1^-} \upsilon(z)|f(z)| = 0$$

lo cual significa que $f \in H_\upsilon^0$. Esto culmina la demostración del teorema. $\blacksquare$

# CAPÍTULO 3
# OPERADOR MULTIPLICACIÓN SOBRE EL ESPACIO $H_v^\infty$

En este capítulo se describen los operadores multiplicación continuos actuando sobre los espacios que se han definido en el capítulo anterior. Más precisamente, se estudian en detalle los resultados presentados en el artículo Bonet, Domanski y Lindstrom (1999); así como los preliminares necesarios para establecer sus demostraciones. En la primera sección del presente capítulo, se estudia la definición y algunas propiedades del Operador Multiplicación actuando sobre los espacios de funciones analíticas. En la segunda sección, se caracterizan aquellos operadores multiplicación que aplican continuamente el espacio tipo Bloch $H_v^\infty$ en sí mismo, calculando además su norma en término del símbolo que lo induce. La invertibilidad y la compacidad de este operador actuando sobre este espacio se caracterizan en la tercera y cuarta sección de este capítulo, respectivamente; mientras que en la quinta sección hallamos su norma esencial. Un estudio exhaustivo sobre aquellos operadores multiplicación que son Fredholm o que tienen rango cerrado cuando actúan sobre el espacio $H_v^\infty$ se desarrolla en las secciones 6 y 7 de este capítulo. Finalmente se cuenta con una sección de ejemplos, donde se ilustra todo lo desarrollado en esta sección.

## 3.1 Operador Multiplicación sobre el espacio de funciones analíticas

Dada cualquier función analítica $\varphi$ definida sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, el *Operador Multiplicación* inducido por $\varphi$, actuando sobre el espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, denotado por $M_\varphi$, es la función $M_\varphi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ definida por

$$M_\varphi f = \varphi \cdot f,$$

donde $f \in H(\mathbb{D})$. Claramente, para $f, g \in H(\mathbb{D})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple

$$M_\varphi (\lambda f + g) = \lambda M_\varphi f + M_\varphi g$$

y por tal motivo, el Operador Multiplicación es una transformación lineal sobre $H(\mathbb{D})$.

Se observa además que si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es constante, es decir, si para $a \in \mathbb{D}$ fijo, $\varphi(z) = a$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$M_\varphi f(z) = (\varphi \cdot f)(z) = a \cdot f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y así, en este caso, el Operador Multiplicación es un múltiplo del operador identidad, actuando sobre el espacio de las funciones analíticas $H(\mathbb{D})$, al cual se le conoce sus propiedades. Luego, por lo mencionado anteriormente, en el transcurso de este capítulo, se asume que la función $\varphi$ no es constante. También se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.1.** *Sea $\varphi \in H(\mathbb{D})$, una función analítica y no nula, entonces $M_\varphi$, el Operador Multiplicación inducido por $\varphi$, actuando sobre el espacio de las funciones analíticas $H(\mathbb{D})$ es inyectivo.*

**Demostración.** En efecto, observe que si $f \in Ker\,(M_\varphi)$, entonces $\varphi(z) \cdot f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$; en particular, $\varphi(z) \cdot f(z) = 0$ para todo $|z| \leq 1/2$; pero como la función $\varphi \in H(\mathbb{D})$ no es nula, por el principio de los ceros aislados (ver el Teorema 1.3.8), $\varphi$ solamente tiene una cantidad finita de ceros en el conjunto $|z| \leq 1/2$, así que $f$ debe tener una cantidad infinita de ceros en $|z| \leq 1/2$ y por el principio de identidad de Weierstrass (ver el Teorema 1.3.8), $f$ debe ser la función nula. Se concluye entonces que $Ker\,(M_\varphi) = \{0\}$ y por tanto $M_\varphi$ es un operador inyectivo sobre $H(\mathbb{D})$. ■

En vista que al espacio $H(\mathbb{D})$ no se le conoce una norma que lo convierta en espacio de Banach, es necesario restringir el dominio de $M_\varphi$ sobre ciertos subespacios de $H(\mathbb{D})$ que sean normados; de manera que se pueda establecer otras propiedades de este Operador Multiplicación, como lo son: la continuidad, invertibilidad, compacidad, etc. Sobre este tema, hay que mencionar que en Arazy (1982), Zhu (1989), entre otros, se estudiaron las propiedades de $M_\varphi$ actuando sobre el espacio de Bloch.

## 3.2 Continuidad del Operador Multiplicación sobre $H_v^\infty$

En esta sección, se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que el Operador Multiplicación $M_\varphi$, actuando sobre el espacio $H_v^\infty$, sea continuo o acotado. En lo que sigue del capítulo y salvo se exprese lo contrario, asumiremos fijo el peso $v$ que define el espacio tipo Bloch

$$H_v^\infty := H_v^\infty(\mathbb{D}) := \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_v := \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| < \infty\}.$$

Como antes, $\widetilde{v}$ denota su peso asociado (ver Sección 2.3 para su definición y propiedades) y

$$H_v^0 := H_v^0(\mathbb{D}) := \{f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1^-} v(z)|f(z)| = 0\}$$

es el correspondiente "pequeño espacio" de $H_v^\infty$. El resultado principal en esta sección es el siguiente.

**Teorema 3.2.1.** *El Operador Multiplicación $M_\varphi$ aplica continuamente el espacio $H_v^\infty$ en sí mismo si y sólo si $\varphi \in H^\infty$. Además, en este caso, $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

**Demostración.** Suponga primero que $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es continuo. Recuerde que el peso asociado está dado por la relación

$$\frac{1}{\widetilde{v}(z)} = \sup\{|f(z)| : \|f\|_v \leq 1\},$$

donde $z \in \mathbb{D}$. Sea $w \in \mathbb{D}$ fijo, entonces, por definición de supremo, para $\varepsilon > 0$, se puede encontrar una función $f_w \in \overline{B} = \{f \in H_v^\infty : \|f\|_v \leq 1\}$, que incluso puede depender del $\varepsilon > 0$ dado, y tal que

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{1}{\widetilde{v}(w)} \leq |f_w(w)|. \tag{3.1}$$

Luego, despejando y multiplicando por $|\varphi(w)| \geq 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi(w)| &\leq (1+\varepsilon)\,\widetilde{v}(w)|\varphi(w)||f_w(w)| \\
&\leq (1+\varepsilon)\sup_{z\in\mathbb{D}}\widetilde{v}(z)|\varphi(z)||f_w(z)| \\
&= (1+\varepsilon)\,\|M_\varphi(f_w)\|_{\widetilde{v}} \\
&\leq (1+\varepsilon)\,\|M_\varphi\|\,\|f_w\|_{\widetilde{v}} \leq (1+\varepsilon)\,\|M_\varphi\|\,,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la hipótesis que $M_\varphi$ es continua en $H_v^\infty$ y además, como $f_w \in \overline{B}$, se tiene que $\|f_w\|_{\widetilde{v}} = \|f_w\|_v \leq 1$ (ver Teorema 2.4.3, Capítulo 2). Luego, como la desigualdad final no involucra a la función $f_w$, se puede tomar $\varepsilon \to 0^+$ y obtener que

$$|\varphi(w)| \leq \|M_\varphi\|$$

para $w \in \mathbb{D}$, lo cual efectivamente muestra que $\varphi \in H^\infty$ y que $\|\varphi\|_\infty \leq \|M_\varphi\|$. Esto culmina la primera parte de la demostración.

Suponga ahora que $\varphi \in H^\infty$, es decir, que

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}|\varphi(z)| < +\infty.$$

Se debe mostrar que para cualquier $f \in H_v^\infty$, su imagen $M_\varphi(f) \in H_v^\infty$ y que este operador es continuo; pero en vista de la definición del espacio $H_v^\infty$, es claro que si $M_\varphi$ es continua sobre $H_v^\infty$, entonces $Rang\,(M_\varphi) \subset H_v^\infty$; así que basta ver que $M_\varphi$ es continuo sobre $H_v^\infty$.

Con este fin, sea $f \in H_v^\infty$ cualquiera y $z \in \mathbb{D}$. Por definición de supremo, se tiene que

$$|\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por $0 \leq v(z)|f(z)| < \infty$ (pues $f \in H_v^\infty$) se obtiene

$$v(z)|f(z)||\varphi(z)| \leq \|\varphi\|_\infty v(z)|f(z)|. \tag{3.2}$$

Luego, tomando $\sup_{z\in\mathbb{D}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|M_\varphi(f)\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)||\varphi(z)| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| \\ &= \|\varphi\|_\infty \|f\|_v. \end{aligned}$$

Por tanto $M_\varphi$ es continuo y $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Observe que al ser operador $M_\varphi$ continuo, por la parte anterior, se concluye que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$; así que en este caso se tiene que $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

**Comentario.** La segunda parte de la demostración del teorema anterior se puede usar para mostrar que si $\varphi \in H^\infty$ entonces el Operador Multiplicación $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es continuo; de hecho, tomando límite cuando $|z| \to 1^-$ en la desigualdad (3.2) se encuentra que $M_\varphi(f) \in H_v^0$ siempre que $f \in H_v^0$. Sobre el recíproco de lo comentado anteriormente, se puede decir que, en general, no se puede usar la primera parte de la demostración del Teorema 3.2.1 para mostrar que si el operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es continua, entonces $\varphi \in H^\infty$. El problema que se presenta aquí es que no se puede garantizar que la función $f_w$ encontrada en (3.1) sea un elemento del espacio $H_v^0$. Sin embargo, en muchos casos, se puede hallar la función adecuada para que la continuidad del operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ implique que la función $\varphi$ que lo induce sea acotada sobre $\mathbb{D}$. Por ejemplo, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.2.** *Para $\alpha > 0$ fijo, sea $v(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, donde $z \in \mathbb{D}$. El operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es acotado si y sólo si $\varphi \in H^\infty$.*

**Comentario.** El espacio $H_v^\infty$, donde $v(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, $z \in \mathbb{D}$ y $\alpha > 0$ fijo, se conoce como *espacio de Korenblum o de crecimiento*; (ver Capítulo 2, Sección

2.1). De hecho, como se ha establecido en el Capítulo 2, Teorema 2.1.2, estos espacios coinciden con los espacios $\alpha$-Bloch cuando $\alpha > 1$.

**Demostración.** Se sabe que si $\varphi \in H^\infty$, entonces el operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es acotado; así que solamente se debe establecer el recíproco. Con este fin, suponga que el operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es acotado y sea $w \in \mathbb{D}$ cualquiera (pero fijo), entonces la función

$$f_w(z) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^\alpha},$$

con $z \in \mathbb{D}$ es analítica en $\mathbb{D}$ y satisface

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to 1^-} \left(1-|z|^2\right)^\alpha |f_w(z)| &= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha}{|1-\overline{w}z|^\alpha} \\
&\leq \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha}{(1-|w|)^\alpha} = 0,
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $f_w \in H_v^0$. Además, por la desigualdad triangular, se puede observar que

$$\begin{aligned}
\|f_w\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha}{|1-\overline{w}z|^\alpha} \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^\alpha}{(1-|z|)^\alpha} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} (1+|z|)^\alpha = 2^\alpha.
\end{aligned}$$

También, evaluando la función $f_w$ en $z = w \in \mathbb{D}$, se obtiene que

$$\left(1-|w|^2\right)^\alpha |f_w(w)| = 1$$

pues $w\overline{w} = |w|^2$. Luego, multiplicando por $|\varphi(w)| \geq 0$ y usando la hipótesis, se obtiene que

$$\begin{aligned}
|\varphi(w)| &= \left(1-|w|^2\right)^\alpha |f_w(w)|\,|\varphi(w)| \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^\alpha |f_w(z)|\,|\varphi(z)| \\
&= \|M_\varphi(f_w)\| \\
&\leq \|M_\varphi\|\;\|f_w\|_v \leq 2^\alpha \|M_\varphi\|,
\end{aligned}$$

lo cual muestra que $\varphi \in H^{\infty}$. Esto culmina la demostración del teorema. $\blacksquare$

Combinando los resultados anteriores, se tiene la siguiente consecuencia.

**Corolario 3.2.1.** *Para $\alpha > 0$ fijo, sea $v(z) = (1 - |z|^2)^{\alpha}$, donde $z \in \mathbb{D}$. El operador $M_{\varphi} : H_v^{\infty} \to H_v^{\infty}$ es acotado si y sólo $M_{\varphi} : H_v^0 \to H_v^0$ es acotado. En este caso, $\|M_{\varphi}\| = \|\varphi\|_{\infty}$.*

Finalizamos esta sección planteando el siguiente problema.

**Problema.** ¿Será cierto el Corolario 3.2.1 para cualquier peso $v$?

Observe que si el peso $v$ es tal que para cada $w \in \mathbb{D}$, se pueda encontrar una función $f_w \in H_v^0$ tal que $\|f_w\|_v \leq 1$ y $v(w)\,|f_w(w)| \leq 1$, entonces se pudiese argumentar como en la primera parte de la demostración del Teorema 3.2.1 y obtener el resultado deseado.

## 3.3 Invertibilidad del Operador Multiplicación sobre $H_v^{\infty}$

Una vez establecidas las condiciones necesarias y suficientes para que el Operador Multiplicación $M_{\varphi}$ sea continuo sobre el espacio $H_v^{\infty}$, se centrará la atención en caracterizar aquellos operadores $M_{\varphi} : H_v^{\infty} \to H_v^{\infty}$ que son invertibles. Observe que debido a que el operador $M_{\varphi}$ siempre es inyectivo (Teorema 3.1.1), este problema es equivalente a hallar condiciones bajo las cuales $M_{\varphi}$ sea sobreyectivo. El resultado que se tiene es el siguiente.

**Teorema 3.3.1.** *Sea $v$ un peso definido en $\mathbb{D}$ y $\varphi \in H^{\infty}$. El Operador Multiplicación $M_{\varphi} : H_v^{\infty} \to H_v^{\infty}$ es invertible (o, equivalentemente, sobreyectivo) con inversa continua si y sólo si $\frac{1}{\varphi} \in H^{\infty}$.*

**Demostración.** En efecto, observe que el operador $M_{\varphi} : H_v^{\infty} \to H_v^{\infty}$ es invertible si existe un operador (lineal) $T : H_v^{\infty} \to H_v^{\infty}$ que satisface

$$M_{\varphi}\left(T(f)\right) = T\left(M_{\varphi}(f)\right) = f$$

para toda función $f \in H_v^\infty$, de aquí, claramente se obtiene que

$$\varphi \cdot T(f) = f$$

para toda función $f \in H_v^\infty$; de donde se concluye que la inversa es

$$T(f) = \frac{1}{\varphi} \cdot f.$$

Esto es,

$$M_\varphi^{-1} = M_{1/\varphi}$$

y la inversa del Operador Multiplicación $M_\varphi$ es también un Operador Multiplicación $M_\psi$ con símbolo $\psi = 1/\varphi$. Luego, por el Teorema 3.2.1, el operador $M_\psi$ será continuo si y sólo si $\psi = 1/\varphi \in H^\infty$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

**Corolario 3.3.1.** *El operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ tiene inversa continua si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

**Demostración.** En efecto, por el Teorema 3.3.1, el operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ tiene inversa continua si y sólo si la función $1/\varphi \in H^\infty$, lo cual ocurre si y sólo si se puede encontrar una constante $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{\varphi(z)} \right| \leq M$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. El resultado sigue con $\varepsilon = 1/M$. ■

Haciendo uso de lo establecido en el Teorema 3.2.2, y procediendo como en la demostración del Teorema 3.3.1, se encuentra el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.2.** *Para $\alpha > 0$ fijo, sea $v(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, donde $z \in \mathbb{D}$ y $\varphi \in H^\infty$. El operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es invertible con inversa continua si y sólo si $1/\varphi \in H^\infty$.*

**Demostración.** En efecto, se sabe que si $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es invertible, entonces su inversa será un Operador Multiplicación con símbolo $\psi = 1/\varphi$. Luego, por el Teorema 3.2.2, $M_\psi : H_v^0 \to H_v^0$ es continuo o acotado si y sólo si $\psi \in H^\infty$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

## 3.4 Compacidad del Operador Multiplicación sobre $H_v^\infty$

En esta sección, se establece que el Operador Multiplicación $M_\varphi$ actuando sobre el espacio $H_v^\infty$ no puede ser compacto. Recuerde, en primer lugar (ver el Capítulo 1, Sección 1.3), que debido a que se está suponiendo que la función $\varphi$ es analítica y no constante sobre $\mathbb{D}$, entonces por el Teorema 1.3.7, su imagen $\varphi(\mathbb{D})$ es un dominio, es decir, un conjunto abierto y conexo; en particular, $\varphi(\mathbb{D})$ es un conjunto no numerable. Este hecho ayuda a establecer el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.1.** *El operador $M_\varphi$ actuando sobre $H_v^\infty$ no es compacto.*

**Demostración.** En efecto, recuerde que el espectro puntual (ver la Sección 1.2 del Capítulo 1) del operador $M_\varphi$ viene dado por

$$\sigma\left(M_\varphi\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left(\lambda I - M_\varphi\right)^{-1} \text{ no existe}\right\},$$

donde $I$ denota el operador identidad actuando sobre el espacio $H_v^\infty$. Pero si $f$ es cualquier elemento de $H_v^\infty$, entonces, por definición se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\lambda I - M_\varphi\right)(f) &= \lambda I(f) - M_\varphi(f) \\
&= \lambda f - \varphi f = (\lambda - \varphi) f \\
&= M_\psi(f),
\end{aligned}$$

donde $\psi(z) = \lambda - \varphi(z)$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Esto significa que para $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, la transformación $(\lambda I - M_\varphi)$ actuando sobre $H_v^\infty$ es un Operador Multiplicación con símbolo $\psi = \lambda - \varphi$. Luego, en virtud del Teorema 3.3.1, el operador $M_\psi$ es invertible si y sólo si $1/\psi \in H^{\infty}$. Con esta información, se puede escribir

$$\sigma\left(M_{\varphi}\right)=\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \frac{1}{\lambda-\varphi} \notin H^{\infty}\right\};$$

pero existen dos casos para los cuales la función $\psi(z)=1/\left(\lambda-\varphi(z)\right)$ con $z \in \mathbb{D}$ no sea acotada:

(1) Existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi\left(z_0\right)=\lambda$; lo cual significa que $\lambda \in Rang(\varphi)$,

(2) o bien que $\lambda \in \mathbb{C}$ sea un punto de acumulación de $\varphi(\mathbb{D})$; es decir, que exista una sucesión de puntos $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ tal que $\varphi\left(z_n\right) \rightarrow \lambda$ cuando $n \rightarrow \infty$. Con lo cual se está diciendo que $\lambda \in \overline{\varphi(\mathbb{D})}$.

En conclusión se tiene que $\sigma(M_{\varphi})=\overline{\varphi(\mathbb{D})}$. En particular, $\sigma(M_{\varphi})$ contiene al conjunto $\varphi(\mathbb{D})$ el cual ya se sabe que no es numerable pues $\varphi$ es una función analítica y no constante sobre $\mathbb{D}$. Así que $M_{\varphi}$ no puede ser compacto, pues es un hecho bien conocido (ver Teorema 1.2.1) que los operadores compactos tienen espectro puntual a lo sumo numerable. Esto culmina la demostración del teorema.

■

**Comentario.** Dado que el espectro de un operador compacto es a lo sumo numerable y tiene como único punto de acumulación al cero, se observa, del argumento anterior que la única forma que el Operador Multiplicación $M_{\varphi}$ sea compacto es que el símbolo $\varphi$ sea la función nula. En este caso, $M_{\varphi} \equiv 0$, el operador nulo.

## 3.5 La norma esencial del Operador Multiplicación sobre $H_v^{\infty}$

En vista que el Operador Multiplicación $M_{\varphi}$ no es compacto sobre $H_v^{\infty}$ (ver el Teorema 3.4.1), y dado que la familia de los operadores compactos sobre $H_v^{\infty}$, denotado por $\mathcal{K}$, es un subconjunto cerrado del espacio de los operadores acotados $\mathcal{B}\left(H_v^{\infty}\right)$ con la norma de los operadores (ver Capítulo 1, Sección 1.1), es natural preguntarse que tan lejos está el Operador Multiplicación $M_\varphi$ del conjunto cerrado $\mathcal{K}$; es decir, se quiere estimar la cantidad

$$\|M_\varphi\|_e := dist\,(M_\varphi, \mathcal{K}) = \inf\{\|M_\varphi - K\| : K \in \mathcal{K}\}\,.$$

A esta cantidad se le llama *la norma esencial* del operador $M_\varphi$ (ver Definición 1.2.4). Para un operador $T \in \mathcal{B}(H_v^\infty)$, el número $\|T\|_e$ resulta la norma de la clase $T + \mathcal{K}$ en el álgebra de Calkin $\mathcal{B}(H_v^\infty)/\mathcal{K}$ (ver Müller (2003), pág. 151). De manera entonces, que si denotamos por $\sigma_e(T)$ el espectro de las clases $T + \mathcal{K}$ en esta álgebra, el cual se conoce como el *espectro esencial*, y definimos el *radio espectral esencial* por

$$r_e(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(T)\},$$

entonces como consecuencia del Teorema 1.2.1 del Capítulo 1, se tiene que

$$r_e(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|_e^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|_e^{\frac{1}{n}}\,. \tag{3.3}$$

El resultado que se tiene en esta sección y el cual calcula la norma esencial del Operador Multiplicación $M_\varphi$ actuando sobre el espacio $H_v^\infty$ es el siguiente.

**Teorema 3.5.1.** *Sea $v$ un peso en $\mathbb{D}$ y sea $\varphi \in H^\infty$. Entonces para $M_\varphi : H_v^\infty \mapsto H_v^\infty$ tenemos*

$$r_e(M_\varphi) = \|M_\varphi\|_e = \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

**Demostración.** Debido a que se esta suponiendo que $\varphi \in H^\infty$, entonces por el Teorema 3.2.1, se tiene que el operador $M_\varphi \in \mathcal{B}(H_v^\infty)$; de hecho, se tiene que

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Además, de la fórmula (3.3) es claro que

$$r_e(M_\varphi) \leq \|M_\varphi\|_e\,,$$

pues el ínfimo de un conjunto siempre es más pequeño que cualquiera de sus elementos y es fácil ver que $\|T^n\|_e \leq \|T\|_e^n$.

También, como el operador nulo $O \equiv 0$ es compacto sobre $H_v^\infty$, se tiene, por definición de la norma esencial, que

$$\|M_\varphi\|_e = \inf\{\|M_\varphi - K\| : K \in \mathcal{K}\} \leq \|M_\varphi - O\| = \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Luego, se ha obtenidos la siguiente cadena de desigualdades.

$$r_e(M_\varphi) \leq \|M_\varphi\|_e \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty;$$

así que resta mostrar que

$$r_e(M_\varphi) \geq \|\varphi\|_\infty.$$

Con este fin, note primero que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$M_\varphi^n(f) = (M_\varphi \circ M_\varphi \circ \cdots \circ M_\varphi)(f) = \varphi^n \cdot f = M_{\varphi^n}(f)$$

por lo cual,

$$r_e(M_\varphi) = \lim_{n\to\infty} \|M_\varphi^n\|_e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|M_{\varphi^n}\|_e^{\frac{1}{n}}$$

y tanto $M_\varphi$ como $M_{\varphi^n}$ no son compactos, para $\varphi \not\equiv 0$. Luego, por la Proposición 1.2.3, se debe tener $\|M_{\varphi^n}\|_e > 0$.

Así, por definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_\varepsilon$ tal

$$\|M_{\varphi^n}\|_e \geq \|M_{\varphi^n} - K_\varepsilon\| - \varepsilon.$$

Por otro lado, si:

(1) $\|\varphi\|_\infty > 1$,

usando el hecho que $\lim_{n\to\infty}(r^n - b)^{\frac{1}{n}} = r$, para $r > 1$ y $b < r^n$ con $n$ grande, se tiene que

$$\|M_{\varphi^n}\|_e \geq \|M_{\varphi^n} - K_\varepsilon\| - \varepsilon \geq \|M_{\varphi^n}\| - \|K_\varepsilon\| - \varepsilon = \|\varphi^n\|_\infty - \|K_\varepsilon\| - \varepsilon$$

de donde

$$\|M_{\varphi^n}\|_e^{\frac{1}{n}} \geq (\|\varphi\|_\infty^n - \|K_\varepsilon\| - \varepsilon)^{\frac{1}{n}},$$

pues $\|\varphi^n\|_\infty = \|\varphi\|_\infty^n$. Por tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$ y de la arbitrariedad de $\varepsilon$ se tiene que

$$r_e(M_\varphi) = \lim_{n\to\infty} \|M_{\varphi^n}\|_e^{\frac{1}{n}} \geq \|\varphi\|_\infty.$$

(2) Si $\|\varphi\|_\infty \leq 1$,

usando el hecho que $\lim_{n\to\infty}(b - r^n)^{\frac{1}{n}} = 1$, para $r < 1$ y $b > r^n$ con $n$ grande, se tiene que

$$\|M_{\varphi^n}\|_e \geq \|M_{\varphi^n} - K_\varepsilon\| - \varepsilon \geq \|K_\varepsilon\| - \|M_{\varphi^n}\| - \varepsilon = \|K_\varepsilon\| - \|\varphi^n\|_\infty - \varepsilon$$

de donde

$$\|M_{\varphi^n}\|_e^{\frac{1}{n}} \geq (\|K_\varepsilon\| - \|\varphi\|_\infty^n - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$$

y por tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$ y de la arbitrariedad de $\varepsilon$ se tiene

$$r_e(M_\varphi) = \lim_{n\to\infty} \|M_{\varphi^n}\|_e^{\frac{1}{n}} \geq 1 \geq \|\varphi\|_\infty.$$

■

Procediendo como en la demostración del Teorema 3.5.1, y haciendo uso de lo establecido en el Teorema 3.2.2, se encuentra el siguiente resultado para el espacio $H_v^0$.

**Corolario 3.5.1.** *Sea $v(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, $z \in \mathbb{D}$ con $\alpha > 0$ y $\varphi \in H^\infty$. Entonces para $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ se tiene*

$$r_e(M_\varphi) = \|M_\varphi\|_e = \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

## 3.6 Operador Multiplicación Fredholm sobre $H_v^\infty$

Ahora se centra la atención en buscar condiciones necesarias y suficientes para que el Operador Multiplicación $M_\varphi$ actuando sobre el espacio $H_v^\infty$ tenga la propiedad de ser Fredholm. Recuerde (ver el Capítulo 1, Sección 1.2) que un operador $T \in \mathcal{B}(H_v^\infty)$ se dice que es Fredholm si $dim\,(Ker(T)) < \infty$ y $codim\,(Rang(T)) < \infty$; sin embargo, como el Operador Multiplicación $M_\varphi$ es inyectivo (ver el Teorema 3.1.1), se tiene lo siguiente.

**Proposición 3.6.1.** *Sea $v$ un peso en $\mathbb{D}$ y $\varphi \in H^\infty$. El operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es Fredholm si y sólo si $codim\,(Rang\,(M_\varphi)) < \infty$.*

El resultado principal de esta sección, se puede enunciar como sigue.

**Teorema 3.6.1.** *Sea $v$ un peso en $\mathbb{D}$ y $\varphi \in H^\infty$. El operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es Fredholm si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $1 > |z| \geq 1 - \varepsilon$.*

**Demostración.** Suponga primero que no es cierto que exista un $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $1 > |z| \geq 1 - \varepsilon$. Se mostrará que el operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ no es Fredholm.

Debido a lo supuesto, para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede encontrar un $z_n \in \mathbb{D}$ tal que $1 > |z_n| \geq 1 - 1/n$ y $|\varphi\,(z_n)| < 1/n$. Así, se ha construido una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y $|\varphi\,(z_n)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Todavía más, como $|z_n| \to 1^-$ cuando $n \to \infty$, por definición de límite, dado $m \in \mathbb{N}$, se puede encontrar $z_{n_m} \in \mathbb{D}$, donde los índices $n_m$ crecen con $m$, tal que

$$1 - |z_{n_m}| \leq \frac{1}{2^m};$$

esto significa, por el criterio de comparación para series, que la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} (1 - |z_{n_m}|)$$

es convergente; y por tanto, el Teorema 1.6.4, permite asumir, pasando a subsucesión si es necesario, que $\{z_n\}$ es una sucesión interpolante para $H^\infty$.

Luego, por definición de sucesiones interpolantes para el espacio $H^\infty$ (ver Capítulo 1, Sección 1.6), dado $N \in \mathbb{N}$ y la sucesión $(0, 0, ..., \varphi(z_N), \varphi(z_{N+1}), ...) \in l^\infty$ (pues $\varphi \in H^\infty$), se puede encontrar una función $\varphi_N \in H^\infty$ tal que

$$\varphi_N(z_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ n < N, \\ \varphi(z_n), & \text{si } \ n \geq N. \end{cases}$$

y que también satisface

$$\|\varphi_N\|_\infty \leq C \sup_{n \geq N} |\varphi(z_n)|$$

para algún $C > 0$ fijo. Esta última desigualdad implica que $\|\varphi_N\|_\infty \to 0$ cuando $N \to \infty$ pues $|\varphi(z_n)| \to 0$.

Como el conjunto de operadores no Fredholm es cerrado (ver Teorema 1.2.2), el resultado buscado sigue, si se logra mostrar que los operadores $M_{\varphi-\varphi_N}$ no son Fredholm para $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, ya que del Teorema 3.2.1, se cumple la desigualdad

$$\|M_{\varphi-\varphi_N} - M_\varphi\| \leq \|\varphi_N\|_\infty$$

lo cual implica que $\lim_{N\to\infty} \|M_{\varphi-\varphi_N} - M_\varphi\| = 0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo, para mostrar que el operador $M_{\varphi-\varphi_N}$ no es Fredholm, sea

$$X_N = \{f \in H_\upsilon^\infty : f(z_n) = 0 \text{ para toda } n \geq N\}.$$

Observe que $X_N$ es un subespacio cerrado de $H_\upsilon^\infty$, pues para toda sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $X_N$ tal que $\|f_k - f\|_\upsilon \to 0$ se tiene, por definición, que dado $\varepsilon > 0$ existe un $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\upsilon(z)|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$$

siempre que $k \geq K$, para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, para $z_n \in \mathbb{D}$ con $n \geq N$ se tiene

$$\upsilon(z_n)|f_k(z_n) - f(z_n)| < \varepsilon$$

siempre que $k \geq K$; y por tanto $\upsilon(z_n)|f(z_n)| = 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, ya que $f_k(z_n) = 0$. Así, $f \in X_N$ pues $\upsilon(z_n) \geq 0$.

Por otra parte, de la definición de $X_N$, se puede ver que los funcionales evaluación $\delta_{z_n}$ con $n \geq N$, definidos por $\delta_{z_n}(f) = f(z_n)$, son elementos del espacio ortogonal

$$X_N^{\perp} = \{F \in (H_\upsilon^\infty)' : F(f) = 0, \text{ para todo } f \in X_N\}.$$

También, se puede ver que el conjunto $\{\delta_{z_n} : n \geq N\}$ es linealmente independiente, pues al considerar la combinación lineal $\sum_{k=1}^n \alpha_k \delta_{z_k} \equiv 0$, se tiene $\sum_{k=1}^n \alpha_k f(z_k) = 0$ para toda $f \in H_\upsilon^\infty$, se puede usar $f(z) = z^m$, $m = 0, 1, ..., n-1$ y obtener el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 0 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + ... + \alpha_n z_n = 0 \\ \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + ... + \alpha_n z_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 z_1^{n-1} + \alpha_2 z_2^{n-1} + ... + \alpha_n z_n^{n-1} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

conocida como la matriz de Vandermonde, cuyo determinante es

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j) \neq 0$$

(ver Pita Ruiz (1991), pag. 172), pues todos los $z_n$ son distintos entre sí. Por tanto, el sistema homogéneo (3.4) admite solución única $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. De aquí que se puede deducir que el espacio $X_N^{\perp}$ es infinito dimensional. Luego, como $(H_v^\infty/X_N)' = X_N^\perp$ (ver Capítulo 1, Sección 1.1) se concluye que el espacio cociente $H_v^\infty/X_N$ es infinito dimensional (ver Capítulo 1, Sección 1.1).

Por otra parte, si $g \in Rang(M_{\varphi-\varphi_N})$, entonces, por definición, se puede encontrar $f \in H_v^\infty$ tal que

$$g = M_{\varphi-\varphi_N}(f) = (\varphi - \varphi_N) \cdot f,$$

esto implica que para cada $n \geq N$ se cumple

$$g(z_n) = (\varphi(z_n) - \varphi_N(z_n)) \cdot f(z_n) = 0$$

pues $\varphi_N(z_n) = \varphi(z_n)$ para $n \geq N$. Por tanto $g \in X_N$, y así se ha establecido que $Rang(M_{\varphi-\varphi_N}) \subset X_N$. Esta última relación implica (ver Proposición 1.1.1) que

$$dim\,(H_v^\infty/Rang\,(M_{\varphi-\varphi_N})) \geq dim\,(H_v^\infty/X_N) = \infty$$

y el operador $M_{\varphi-\varphi_N}$ no es Fredholm.

Suponga ahora que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $1 > |z| \geq 1-\varepsilon$. Se demostrará que el operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es Fredholm. Dado que $\varphi$ no se anula en el anillo $1-\varepsilon \leq |z| < 1$, por el principio de identidad de Weierstrass (ver Teorema 1.3.8), $\varphi$ puede tener sólo una cantidad finita de ceros $z_1, ..., z_n \in \mathbb{D}$ con multiplicidades $m_1, ..., m_n$, respectivamente, en el disco $|z| < 1-\varepsilon$. Esto significa que existe una función analítica $h$ sobre $\mathbb{D}$ tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y que satisface

$$\varphi(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_n)^{m_n} h(z),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Observe que si $i \in \{1, 2, ..., n\}$ es fijo, entonces

$$\varphi^{(k)}(z_i) = 0$$

para todo $k \in \{0, 1, ..., m_i - 1\}$. De manera que si $g$ es cualquier función en $H_v^\infty$ y $f = \varphi \cdot g$, entonces por la regla para derivar el producto de funciones, se obtiene que

$$f^{(k)}(z_i) = 0 \tag{3.5}$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y todo $k \in \{0, 1, ..., m_i - 1\}$. Luego, denotando por $\delta_z^{(k)}$, el funcional de evaluación para la $k$-ésima derivada, donde $z \in \mathbb{D}$ es fijo, se tiene por (3.5), que

$$\delta_{z_i}^{(k)}(f) := f^{(k)}(z_i) = 0$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, todo $k \in \{0, 1, ..., m_i - 1\}$ y toda función $f \in Rang\,(M_\varphi)$. Esto significa que

$$Rang(M_\varphi) \subset Ker\,\delta_{z_i}^{(k)} = \left\{h \in H_v^\infty : \delta_{z_i}^{(k)}(h) = 0\right\}$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y todo $k \in \{0, 1, ..., m_i - 1\}$; es decir,

$$Rang(M_\varphi) \subset \cap_{i=1}^{n} \cap_{k=0}^{m_i-1} Ker\,\delta_{z_i}^{(k)}. \tag{3.6}$$

Se mostrará que (3.6) realmente es una igualdad. En efecto, si

$$g \in \cap_{i=1}^{n} \cap_{k=0}^{m_i-1} Ker\,\delta_{z_i}^{(k)},$$

entonces $g \in Ker\,\delta_{z_i}^{(k)}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y todo $k \in \{0, 1, ..., m_i - 1\}$; esto significa que $g \in H_v^\infty$ y que

$$g^{(k)}(z_i) = \delta_{z_i}^{(k)}(g) = 0$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y todo $k \in \{0, 1, ..., m_i - 1\}$. De manera entonces que para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la función $g$ tiene un cero de orden al menos $m_i$ en $z_i \in \mathbb{D}$; luego, cancelando los factores comunes entre $g$ y $\varphi$, se puede decir que la función $h = g/\varphi$ es analítica sobre $\mathbb{D}$.

Observe que la función $h$ pertenece al espacio $H_v^\infty$ y dado que $g = h \cdot \varphi$, se tendría que $g \in Rang\,(M_\varphi)$ que es lo que se quiere establecer. En efecto, se tiene que

$$\|h\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|h(z)| \leq \sup_{|z|\leq 1-\varepsilon} v(z)\,|h(z)| + \sup_{1-\varepsilon\leq|z|<1} v(z)\,|h(z)|\,, \tag{3.7}$$

luego como la función $h$ es analítica sobre $\mathbb{D}$, resulta que es también continua sobre el compacto $|z| \leq 1-\varepsilon$, así que el producto $v \cdot h$ es continua sobre el compacto $|z| \leq 1-\varepsilon$ y debe existir una constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{|z|\leq 1-\varepsilon} v(z)\,|h(z)| \leq M.$$

Por otra parte, la hipótesis dice que $|\varphi(z)| > \varepsilon$ para todo $1-\varepsilon \leq |z| < 1$; así que

$$\begin{aligned} \sup_{1-\varepsilon\leq|z|<1} v(z)\,|h(z)| &= \sup_{1-\varepsilon\leq|z|<1} v(z)\frac{|g(z)|}{|\varphi(z)|} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\sup_{1-\varepsilon\leq|z|<1} v(z)\,|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|g\|_v < \infty \end{aligned}$$

pues $g \in H_v^\infty$. Así, sustituyendo toda esta información en (3.7) se concluye que $h \in H_v^\infty$ y por tanto, se ha establecido que

$$Rang(M_\varphi) = \cap_{i=1}^{n} \cap_{k=0}^{m_i-1} Ker\,\delta_{z_i}^{(k)}.$$

Por la Proposición 1.1.1 se obtiene que

$$codim\,(Rang(M_\varphi)) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i-1} codim\left(Ker\left(\delta_{z_i}^{(k)}\right)\right),$$

Pero por la Proposición 1.1.2

$$codim\left(Ker\left(\delta_{z_i}^{(k)}\right)\right) = dim\left(H_v^\infty/Ker\left(\delta_{z_i}^{(k)}\right)\right) = dim\left(\delta_{z_i}^{(k)}\left(H_v^\infty\right)\right) = dim\mathbb{C} = 1,$$

pues los $\delta_{z_i}^{(k)}$ son funcionales lineales. Por tanto,

$$codim\,(Rang(M_\varphi)) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i-1} 1 = \sum_{i=1}^{n} m_i < \infty$$

y $M_\varphi$ es Fredholm. ■

Revisando la demostración del teorema anterior se puede ver que el resultado es cierto si se cambia el espacio $H_v^\infty$ por $H_v^0$; formalmente.

**Corolario 3.6.1.** *Sea $v$ un peso en $\mathbb{D}$ y $\varphi \in H^\infty$. El operador $M_\varphi : H_v^0 \to H_v^0$ es Fredholm si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $1 > |z| \geq 1-\varepsilon$.*

## 3.7 Operador Multiplicación con rango cerrado sobre $H_v^\infty$

En esta sección, se considera el problema de caracterizar los operadores multiplicación continuos $M_\varphi$ que tienen rango cerrado en $H_v^\infty$. Se sabe por el Teorema 3.1.1, que el operador $M_\varphi$ siempre es inyectivo. Así una aplicación directa del Teorema 1.2.4, permite concluir lo siguiente:

**Proposición 3.7.1.** *Sea $\varphi \in H^\infty$, el Operador Multiplicación $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ tiene rango cerrado si y sólo si éste es acotado por debajo; es decir, si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\|M_\varphi f\|_v \geq L\|f\|_v$$

*para toda función $f \in H_v^\infty$.*

Se verá a continuación, que en muchos casos los operadores multiplicación que tienen rango cerrado en $H_v^\infty$ son los mismos que tienen rango cerrado en $H^\infty$. Antes, se introduce el siguiente concepto.

**Definición 3.7.1.** Una función $\varphi \in H^\infty$ se dice que *no está lejos del cero* en $\partial\mathbb{D}$ si existe $w_0 \in \partial\mathbb{D}$ tal que

$$\varphi^*(w_0) = \lim_{r\to 1^-} \varphi(r\, w_0) = 0.$$

**Comentario 3.7.1.** Observe que $\varphi \in H^\infty$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$ si

$$\liminf_{z\to\partial\mathbb{D}} |\varphi(z)| = \delta > 0.$$

Con este concepto en mente, se puede caracterizar los operadores multiplicación con rango cerrado en $H^\infty$.

**Teorema 3.7.1.** *Sea $\varphi \in H^\infty$, el Operador Multiplicación $M_\varphi : H^\infty \mapsto H^\infty$ tiene rango cerrado si y sólo si $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$.*

**Demostración.** Suponga primero que $\varphi$ no está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y sea $\varphi^*$ el límite radial de $\varphi$, entonces por la Definición 3.7.1, se puede encontrar un subconjunto $A$ de $\partial\mathbb{D}$ de medida positiva tal que $|\varphi^*| < \varepsilon$ en $A$. Todavía más, por hipótesis $\varphi \in H^\infty$, así que se puede suponer, sin perder generalidad, que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Luego, por el principio del máximo para funciones analíticas (Teorema 1.3.6), $\|\varphi^*\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$ y se tiene que $|\varphi^*| \leq 1$ en $\partial\mathbb{D} \setminus A$.

Considere ahora la función $\psi$ definida sobre $\partial\mathbb{D}$ tal que

$$\psi\left(e^{it}\right) = \begin{cases} 1, & e^{it} \in A, \\ \varepsilon, & e^{it} \in \partial\mathbb{D} \setminus A. \end{cases}$$

Entonces $\psi$ es una función medible y positiva sobre $\partial\mathbb{D}$ tal que $\log\,\psi \in L^1(\partial\mathbb{D})$. Luego (ver Capítulo 1, Sección 1.6), la función

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\,\psi\left(e^{it}\right)dt\right\}.$$

es exterior y en virtud de las propiedades de la integral de Poisson (ver (1.8)), es claro que $|f^*(e^{it})| = \psi(e^{it}) = 1$ para $e^{it} \in A$ y que $|f^*(e^{it})| = \psi(e^{it}) = \varepsilon$, para $e^{it} \in \partial\mathbb{D} \setminus A$; de donde se deduce que $\|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty = 1$. Luego, considerando por separados los casos $w \in A$ y $w \in \partial\mathbb{D} \setminus A$, se obtiene

$$\|M_\varphi f\|_\infty = \|\varphi \cdot f\|_\infty = \|\varphi^* \cdot f^*\|_\infty = \sup_{w\in\partial\mathbb{D}} |\varphi^*(w)|\,|f^*(w)| \leq \varepsilon.$$

Así, dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $M_\varphi$ no puede ser acotado por debajo en $H^\infty$, pues recuerde que si $M_\varphi$ fuese acotado por debajo en $H^\infty$, entonces existiría $L > 0$ tal que

$$\|M_\varphi f\|_\infty \geq L$$

para toda función $f \in H^\infty$ tal que $\|f\|_\infty = 1$.

Recíprocamente, si $M_\varphi$ no tiene rango cerrado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede encontrar una función $f_n \in H^\infty$ tal que $\|f_n\|_\infty = 1$ y

$$\|M_\varphi f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Esto significa que

$$\left|\varphi\left(re^{i\theta}\right)\right|\left|f_n\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \tag{3.8}$$

para todo $r \in (0,1)$ y todo $\theta \in [0,2\pi]$. Además, como $\|f_n\|_\infty = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede usar el teorema de Montel (Teorema 1.5.4) y suponer, pasando a subsucesión si es necesario, que $f_n \to f \in H^\infty$ cuando $n \to \infty$. También, el hecho que $\|f_n\|_\infty = 1$, garantiza la posibilidad de conseguir un ángulo $\theta_n \in [0,2\pi]$ tal que

$$|f_n^*(w_n)| = \lim_{r\to 1^-}\left|f_n\left(re^{i\theta_n}\right)\right| = 1,$$

donde $w_n = e^{i\theta_n} \in \partial\mathbb{D}$. Luego, como $\partial\mathbb{D}$ es un conjunto acotado, el teorema de Bolzano (ver Apostol (1981) pag. 66), implica que $\{w_n\}$ contiene una subsucesión $\{w_{n_k}\}$, que converge a un cierto $w_0 = e^{i\theta_0} \in \partial\mathbb{D}$. Luego, usando la desigualdad (3.8), se cumple

$$\left|\varphi\left(re^{i\theta_{n_k}}\right)\right|\left|f_{n_k}\left(re^{i\theta_{n_k}}\right)\right| \leq \frac{1}{n_k}$$

para todo $r \in (0,1)$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, tomando primero límite cuando $k \to \infty$, usando el hecho que $\varphi$ y las funciones $f_n$ son continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ (redefiniendo, claro está, estas funciones como su límite radial en la frontera de $\mathbb{D}$); y finalmente, tomando límite cuando $r \to 1^-$ se concluye que

$$|\varphi^*(w_0)| = 0;$$

es decir, la función $\varphi$ no está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

**Comentario 3.7.2.** En vista del Teorema 1.6.2, se puede ver que si $M$ es una función interior, entonces $M^* \geq 2\pi$; por lo cual, toda función interior $M$ genera operadores multiplicación en $H^\infty$ con rango cerrado.

Ahora se muestra que si $v$ es un peso esencial, entonces los operadores multiplicación con rango cerrado sobre $H_v^\infty$ son los mismo que en $H^\infty$; pero antes se necesita el siguiente lema.

**Lema 3.7.1.** *Sea $\varphi \in H^\infty$ y supongamos que $v$ y $w$ son pesos en $\mathbb{D}$ tal que $u := \frac{v}{w}$ es equivalente a un peso esencial. Si el Operador Multiplicación $M_\varphi$ tiene rango cerrado sobre $H_v^\infty$, entonces el Operador Multiplicación $M_\varphi$ tiene rango cerrado sobre $H_w^\infty$.*

**Demostración.** Asuma que $M_\varphi$ no tiene rango cerrado en $H_w^\infty$, es decir, en vista del Teorema 1.2.4, que $M_\varphi$ no está acotado inferiormente en $H_w^\infty$; así que dado $n \in \mathbb{N}$, se pueden encontrar funciones $f_n \in H_w^\infty$ con $\|f_n\|_w = 1$ y tal que

$$\|M_\varphi f_n\|_w \leq \frac{1}{n}.$$

Además, como $\|f_n\|_w = 1$, también existirá $z_n \in \mathbb{D}$ tal que

$$|f_n(z_n)|w(z_n) > \frac{1}{2}.$$

Por hipótesis, la función peso $u$ es equivalente a un peso esencial, significa que existe una constante $k > 0$ tal que

$$u(z) \leq \widetilde{u}_e(z) \leq k\, u(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; donde

$$\widetilde{u}_e\,(z) = \frac{1}{\sup\left\{|h(z)| : \|h\|_u \leq 1\right\}}.$$

Así, si $c \in (0,1)$ es fijo y se denota

$$S_n = \sup\left\{|h(z_n)| : \|h\|_u \leq 1\right\},$$

entonces, por definición de supremo, se puede encontrar una función $g_n \in H_u^\infty$ tal que $\|g_n\|_u \leq 1$ y

$$|g_n(z_n)| \geq c\, S_n.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u(z_n)|g_n(z_n)| &\geq \frac{1}{k}\widetilde{u}_e(z_n)|g_n(z_n)| \\ &\geq \frac{c}{k}\widetilde{u}_e(z_n)\, S_n \\ &= \frac{c}{k} = m > 0. \end{aligned}$$

Note además que $f_n \cdot g_n \in H_v^\infty$ pues

$$\begin{aligned} \|f_n \cdot g_n\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f_n(z)||g_n(z)| &= \sup_{z\in\mathbb{D}} u(z)|f_n(z)|w(z)|g_n(z)| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} u(z)|f_n(z)| \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|g_n(z)| \\ &= \|f_n\|_w \|g_n\|_u \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

También, por propiedad del supremo, se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_n g_n\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f_n(z)|\,|g_n(z)| \\ &\geq v(z_n)|f_n(z_n)||g_n(z_n)| \\ &= u(z_n)|g_n(z_n)|w(z_n)|f_n(z_n)| \geq m\frac{1}{2} = \frac{m}{2} > 0. \end{aligned}$$

Así que $\{f_n \cdot g_n\}$ es una sucesión en $H_v^\infty$ que no converge a cero en $H_v^\infty$; pero que satisface

$$\begin{aligned} \|M_\varphi\,(f_n g_n)\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|\varphi(z)f_n(z)||g_n(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} u(z)|\varphi(z)f_n(z)|w(z)|g_n(z)| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} u(z)|\varphi(z)f_n(z)| \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)|g_n(z)| \\ &= \|M_\varphi f_n\|_w \|g_n\|_u \\ &\leq \frac{1}{n}; \end{aligned}$$

de donde se concluye que $\|M_\varphi\,(f_n g_n)\|_v \to 0$ cuando $n \to \infty$ y el operador $M_\varphi$ no puede tener rango cerrado en $H_v^\infty$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

Como consecuencia inmediata del resultado anterior y del Teorema 3.7.1, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.7.1.** *Sea $v$ un peso esencial en $\mathbb{D}$ y $\varphi \in H^\infty$. Si $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ tiene rango cerrado, entonces $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$.*

**Demostración.** Considere el peso $w \equiv 1$, entonces como el peso $u = v/w = v$ es esencial y $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ tiene rango cerrado, el Lema 3.7.1 implica que el operador $M_\varphi$ tiene rango cerrado en $H^\infty$, así que el resultado sigue del Teorema 3.7.1. ■

**Comentario 3.7.3.** Es un problema abierto mostrar si lo mismo ocurre para $H_v^0$ en vez de $H_v^\infty$.

Se verá ahora que en muchas situaciones, el recíproco del Corolario 3.7.1 es también cierto. En primer lugar, se considera el peso usual $v_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, con $\alpha > 0$ y $z \in \mathbb{D}$. El siguiente resultado se puede deducir de los que aparecen en Bonet; Domanski, y Lindstrom (1999); sin embargo, se puede contar con la siguiente demostración.

**Teorema 3.7.2.** *Considere el peso $v_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, con $\alpha > 0$ y $z \in \mathbb{D}$; y suponga que $\varphi \in H^\infty$. El operador $M_\varphi$ tiene rango cerrado sobre $H_{v_\alpha}^\infty$ si y sólo si $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$.*

**Demostración.** Suponga primero que el operador $M_\varphi$ tiene rango cerrado sobre $H_{v_\alpha}^\infty$, entonces como la función $v_\alpha$ es un peso esencial (ver Capítulo 2, Sección 2.4), el Corolario 3.7.1 implica que la función $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$.

Se supone ahora que $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$. Entonces se tiene que

$$\delta = \liminf_{z\to\partial\mathbb{D}} |\varphi(z)| > 0.$$

Si el operador $M_\varphi$ no tiene rango cerrado en $H_{v_\alpha}^\infty$, se puede encontrar una sucesión $\{f_n\}$ tal que $\|f_n\|_{v_\alpha} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\|M_\varphi(f_n)\|_{v_\alpha} = \|\varphi \cdot f_n\|_{v_\alpha} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty. \tag{3.9}$$

Se afirma que $f_n \to 0$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Con este fin, sea $K$ un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, sin perder generalidad, se puede suponer que $K = \overline{D}(0,r)$, el disco Euclídeo cerrado con centro en el origen y radio $r \in (0,1)$. Como $\varphi \in H(\mathbb{D})$ y $\delta > 0$, se puede encontrar $r_1 \in (r,1)$ tal que

$\varphi(z) \neq 0$ para todo $|z| = r_1$. Luego, al denotar $m = \min_{|z|=r_1} |\varphi(z)| > 0$, se tiene, en virtud del principio del módulo máximo, que para cualquier $|z| \leq r_1$ se cumple que

$$\left(1 - r_1^2\right)^\alpha m \, |f_n(z)| \leq \left(1 - |z|^2\right)^\alpha |\varphi(z) \cdot f_n(z)| \leq \|\varphi \cdot f_n\|_{v_\alpha},$$

de donde, claramente se deduce que $f_n \to 0$ uniformemente sobre el subconjunto compacto $K$ de $\mathbb{D}$.

Por otra parte, como $\|f_n\|_{v_\alpha} = 1$, se puede encontrar $z_n \in \mathbb{D}$ tal que

$$\left(1 - |z_n|^2\right)^\alpha |f_n(z_n)| \geq \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Luego, se tiene una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ el cual debe contener una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ que converge a un punto $w_0 \in \partial\mathbb{D}$; pues en otro caso, existiría un $r' \in (0,1)$ tal que $\{z_n\} \subset D(0, r')$ y se tendría

$$\left(1 - |z_n|^2\right)^\alpha |f_n(z_n)| \leq \sup_{|z| \leq r'} |f_n(z)| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, pues $f_n \to 0$ sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Esto da una contradicción con (3.10). Así, se puede suponer que $z_n \to w_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Finalmente, como $\delta = \liminf_{z \to \partial\mathbb{D}} |\varphi(z)| > 0$, se puede encontrar $r_2 \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| > \frac{\delta}{2}$ para todo $r_2 < |z| < 1$. De aquí que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $r_2 < |z_n| < 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha |\varphi(z)| \, |f_n(z)| &\geq \left(1 - |z_n|^2\right)^\alpha |\varphi(z_n)| \, |f_n(z_n)| \\ &\geq \frac{\delta}{2} \left(1 - |z_n|^2\right)^\alpha |f_n(z_n)| \geq \frac{\delta}{4}; \end{aligned}$$

lo cual significa que $\|\varphi f_n\|_{v_\alpha} \geq \frac{\delta}{4} > 0$. Esto da una contradicción con (3.9). ■

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, el Lema 3.7.1 y el Corolario 3.7.1, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.7.2.** *Sea $v$ un peso esencial sobre $\mathbb{D}$ tal que $u := v_\alpha/v$ es equivalente a un peso esencial para algún $\alpha > 0$. El operador $M_\varphi$ tiene rango cerrado sobre $H_v^\infty$ si y sólo si $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$.*

**Comentario 3.7.4.** Es conocido que un peso radial es equivalente a un peso moderado si y sólo si es normal. Mas aún, si $v$ es moderado entonces $v(z)/(1-|z|^2)^\alpha$ y $(1-|z|^2)^\beta/v(z)$ son esenciales para cierta selección de $\alpha, \beta$, $0 < \alpha, \beta < \infty$. Así, según el Corolario 3.7.2, existe una gran cantidad de pesos para las cuales el operador $M_\varphi$ posee rango cerrado sobre el espacio $H_v^\infty$.

Ahora se mostrará que para un peso esencial, si la función $\varphi$, que induce el Operador Multiplicación $M_\varphi$, es exterior (ver Capítulo 1, Sección 1.6 para la definición y algunas propiedades de las funciones exteriores), entonces los conceptos de invertibilidad, isomorfismo y Fredholm coinciden. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.7.3.** *Sea $\varphi$ una función exterior y $v$ un peso esencial. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

*(a)* $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ *es invertible;*

*(b)* $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ *es un operador Fredholm;*

*(c)* $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ *es un isomorfismo en sí mismo;*

*(d)* $\varphi$ *está lejos del cero en* $\partial\mathbb{D}$*;*

*(e) Existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $|\varphi(z)| > \varepsilon$ *para cada* $z \in \mathbb{D}$.

**Demostración.** Las implicaciones $(e) \Rightarrow (a) \Rightarrow (b)$ siguen del Corolario 3.3.1 y el Teorema 3.6.1. La implicación $(b) \Rightarrow (c)$ ocurre pues todo operador Fredholm tiene rango cerrado y como $M_\varphi$ siempre es inyectiva, se obtiene que es acotado inferiormente, es decir, $M_\varphi$ es un isomorfismo. La implicación $(c) \Rightarrow (d)$ es consecuencia del Corolario 3.7.1. Así que sólo queda mostrar que $(d) \Rightarrow (e)$. Con este fin, sea $\varphi$ una función exterior y suponga que $(d)$ se cumple; es decir, suponga que $|\varphi|$ está esencialmente acotada lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$. Entonces, como $\varphi$ es una función exterior (ver Capítulo 1, Sección 1.6), se tiene que

$$\varphi(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log|\varphi^*(e^{it})|dt\right\}.$$

Por tanto

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\left(\frac{1}{|\varphi^*(e^{it})|}\right) dt\right\}$$

y $\frac{1}{\varphi}$ es una función exterior generada por $\log|\frac{1}{\varphi^*}(e^{it})|$, aquí se usa el hecho que $|\varphi|$ está esencialmente acotada lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$ para ver que $\frac{1}{|\varphi^*|}$ es una función medible y positiva tal que su logaritmo está en $L^1(\partial\mathbb{D})$. Luego, como toda función exterior pertenece a $H^\infty$. El resultado sigue aplicando el Corolario 3.3.1. ■

Por la factorización interior-exterior de funciones analíticas acotadas (ver Teorema 1.6.3), se tiene que

$$\varphi = B \cdot m \cdot Q,$$

donde $B$ es un producto de Blaschke, $m$ es una función interior singular y $Q$ es una función exterior, y se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.7.4.** *Sea $v$ un peso esencial y $\varphi \in H^\infty$, con factorización $\varphi = B\cdot m\cdot Q$, donde $B$ es un producto de Blaschke, $m$ es una función interior singular y $Q$ es una función exterior. El operador $M_\varphi$ tiene rango cerrado sobre $H_v^\infty$ si y sólo si los operadores $M_B$, $M_m$ y $M_Q$ tienen todos rangos cerrados sobre $H_v^\infty$.*

**Demostración.** Suponga primero que $M_\varphi$ tiene rango cerrado, es decir, que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|M_\varphi f\|_v \geq C\|f\|_v$$

para cada función $f \in H_v^\infty$. Se quiere probar que $M_B$, $M_m$ y $M_Q$ tienen todos rango cerrado en $H_v^\infty$; es decir, que existen constantes $k_1$, $k_2$, y $k_3$, todas positivas, tales que

1.- $\|M_B f\|_\upsilon \geq k_1 \|f\|_\upsilon$,

2.- $\|M_m f\|_\upsilon \geq k_2 \|f\|_\upsilon$,

3.- $\|M_Q f\|_\upsilon \geq k_3 \|f\|_\upsilon$,

para toda $f \in H_\upsilon^\infty$. En efecto, basta considerar sólo el caso del operador $M_Q$ (los otros casos son similares), y observar que

$$\begin{aligned}
\|M_\varphi f\|_\upsilon &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \upsilon(z)|\varphi(z)f(z)| \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \upsilon(z)|B(z)||m(z)||Q(z)f(z)| \\
&\leq \|B\|_\infty \|m\|_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} \upsilon(z)|Q(z)f(z)| \\
&\leq k\|M_Q f\|_\upsilon
\end{aligned}$$

de donde se obtiene,

$$\|M_Q f\|_\upsilon \geq \frac{1}{k}\|M_\varphi f\|_\upsilon \geq \frac{C}{k}\|f\|_\upsilon \geq k_3\|f\|_\upsilon$$

con $k_3 = C/k$.

Ahora suponga que $M_B$, $M_m$ y $M_Q$ tienen todos rango cerrado. Se quiere demostrar que $M_\varphi$ tiene rango cerrado. Entonces para cualquier función $f \in H_\upsilon^\infty$, se tiene que

$$\|M_\varphi f\|_\upsilon = \sup_{z\in\mathbb{D}} \upsilon(z)|B(z)||m(z)||Q(z)||f(z)|;$$

pero como $M_B$ tiene rango cerrado, existe $k_1 > 0$ tal que

$$\|Bf\|_\upsilon = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\upsilon(z)|B(z)||f(z)|}{|m(z)||Q(z)|}|m(z)||Q(z)| \geq k_1\|f\|_\upsilon.$$

Así, si se denota

$$I(m) := \inf_{z\in\mathbb{D}} |m(z)| \leq |m(z)|$$

y se hace

$$I(Q) := \inf_{z\in\mathbb{D}} |Q(z)| \leq |Q(z)|,$$

entonces, sustituyendo en las expresiones anteriores, se obtiene la desigualdad

$$\frac{1}{I(m)I(Q)}\|M_\varphi f\|_v \geq k_1\|f\|_v$$

de donde

$$\|M_\varphi f\|_v \geq k_1 I(m)I(Q)\|f\|_v. \tag{3.11}$$

Por otra parte, como $m$ es interior singular, es acotada inferiormente (ver (1.7)), luego, existe una constante $k_2$ tal que

$$|m(z)| \geq k_2$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, lo cual a su vez implica que $I(m) \geq k_2$. Además, como $Q$ es una función exterior y $M_Q$ tiene rango cerrado, por Teorema 3.7.3, existe una constante $k_3 > 0$ tal que

$$|Q(z)| \geq k_3$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; de donde se obtiene que $I(Q) \geq k_3$.

Sustituyendo toda esta información en (3.11), se concluye que

$$\|M_\varphi f\|_v \geq k_1 k_0 k_3 \|f\|_v \geq C\|f\|_v.$$

para toda función $f \in H_v^\infty$. Esto significa que $M_\varphi$ tiene rango cerrado en $H_v^\infty$ y la demostración del teorema está completa. ■

Se finaliza esta sección con la caracterización de Operador Multiplicación con rango cerrado sobre $H_v^\infty$ para cualquier peso $v$ y para cualquier función $\varphi$; pero antes, a manera de preliminares, se recuerda algunos hechos de Análisis Funcional (ver Garnett (2007)).

Sea $X$ un álgebra de Banach commutativa con unidad y $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$. El *espectro común*, $\sigma(x)$, se define como el conjunto de todos los $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que no existen $y_1, ..., y_n \in X$ que satisfaga

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_i)\, y_i = 1.$$

Análogamente, para un espacio de Banach $Y$ y operadores $T_i : Y \to Y$ mutuamente conmutativos, definimos el *espectro común de aproximación puntual*, $\sigma_{ap}(T)$, con $T = (T_1, ...T_n)$, como el conjunto de aquellos $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tales que

$$(T_1 - \lambda_1 \cdot id_Y, ..., T_n - \lambda_n \cdot id_Y) : Y \to Y^n$$

no es un isomorfismo en sí mismo,

$$(T_1 - \lambda_1, ..., T_n - \lambda_n)(y) = ((T_1 - \lambda_1 \cdot id)(y), ..., (T_n - \lambda_n \cdot id)(y)).$$

Un *homomorfismo complejo*, o *funcional lineal multiplicativo*, es un homomorfismo no nulo $m : X \to \mathbb{C}$ de $X$ en los números complejos tal que $m(f \cdot g) = m(f) \cdot m(g)$. Trivialmente $m(1) = 1$. Se tiene que si $M$ es un ideal (propio) maximal de $X$, entonces $M$ es el núcleo de un homomorfismo complejo $m : X \mapsto \mathbb{C}$ El conjunto $M(X)$ de homomorfismos complejos de $X$ se llama el *espacio ideal maximal* de $X$, entre sus propiedades, se puede mencionar que $M(X)$ está contenido en la bola unitaria del espacio de Banach dual $X'$. Para cada álgebra de Banach conmutativa $X$ y cada espectro $\widetilde{\sigma}$ en $X$ existe un conjunto compacto $\widetilde{A} \subseteq M(X)$ tal que

$$\widetilde{\sigma}(b_1, ..., b_n) = \left\{(b_1(a), ..., b_n(a)) : a \in \widetilde{A}\right\}.$$

Sea $X$ un álgebra de Banach con espacio ideal maximal $M(X)$. Si $f \in X$, entonces la *transformada de Gelfand* de $f$ es la función $\hat{f} : X \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{f}(m) = m(f)$, donde $m$ es el homomorfismo complejo cuyo núcleo es $M(X)$. El álgebra de Banach $X$ se llama *uniforme* si la transformada de Gelfand es una isometría, esto es, si

$$\|\hat{f}\| = \|f\|$$

para toda $f \in X$. De hecho, se tiene que la transformada de Gelfand es una isometría si y sólo si

$$\|f^2\| = \|f\|^2$$

para toda $f \in X$. Para un álgebra uniforme $X$, un subconjunto $K$ de $M(X)$ se llama *una frontera* (para $X$) si

$$\|f\| = \sup_{m \in K} |f(m)|$$

para toda $f \in X$. De hecho, existe una frontera cerrada más pequeña $K_0$, la cual esta contenida en cada frontera $K$ para $X$, esta frontera más pequeña se conoce como *frontera de Shilov* de $X$ y se denota por $\Gamma(X)$. Se observa que $X$ es un álgebra uniforme en la frontera de Shilov.

Con estas notaciones, ahora se puede enunciar y dar un esbozo de la demostración del siguiente resultado.

**Teorema 3.7.5.** *Para cualquier peso $\upsilon$ existe un subconjunto cerrado $A_\upsilon$ de $\partial\mathbb{D}$, tal que $M_\varphi : H_\upsilon^\infty \mapsto H_\upsilon^\infty$ tiene rango cerrado si y sólo si $\varphi$ no se anula en $A_\upsilon$ (o equivalentemente, $\sigma_{ap}(M_\varphi) = \varphi(A_\upsilon)$)*

**Demostración.** Sea $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, ..., \varphi_2) \in (H^\infty)^n$ arbitraria. Se define

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}) := \sigma_{ap}(M_{\varphi_1}, ..., M_{\varphi_n}),$$

donde el espectro $\sigma_{ap}$ se calcula en el álgebra de endomorfismos de $H_\upsilon^\infty$; es decir, sobre los homomorfismos de $H_\upsilon^\infty$ sobre sí mismo, por lo que este espectro depende del peso $\upsilon$. Se tiene que

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}) \subseteq \sigma(\widetilde{\varphi}),$$

el espectro común en $H_\upsilon^\infty$. En efecto, se supone que $\lambda \notin \sigma(\widetilde{\varphi})$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \lambda_i)\, y_i = 1$$

para algunos $(y_1, \cdots, y_n) \in (H^\infty)^n$. Si $\lambda \in \widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi})$, entonces existe una sucesión $(f_k) \subseteq H_\upsilon^\infty, \|f_k\|_\upsilon = 1$, tal que $\|M_{\varphi_i - \lambda_i} f_k\|_\upsilon \to 0$ cuando $k \to 0$ para $i = 1, ..., n$. Esto contradice la observación que

$$\|f_k\|_\upsilon = \left\| \sum_{i=1}^{n} M_{y_i} M_{\varphi_i - \lambda_i} f_k \right\|_\upsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \|M_{y_i}\| \cdot \|M_{\varphi_i - \lambda_i} f_k\|_\upsilon \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Otra propiedad útil que satisfacen los espectro (ver Zelazko (1979)) es

$$\widetilde{\sigma}(P(\widetilde{\varphi})) = P(\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}))$$

para todo operador polinomial $P$ de la forma

$$P\left(x_1, \cdots, x_n\right) = \left(P_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, P_m(x_1, ..., x_n)\right)$$

donde $P_1, ..., P_m$ son polinomios de $n$ variables. También, para $X = H^\infty$ y $\widetilde{\sigma}$ definida anteriormente, existe un conjunto compacto $\widetilde{A}_v \subseteq M(X)$ tal que

$$\widetilde{\sigma}\left(b_1, ..., b_n\right) = \left\{(b_1(a), ..., b_n(a)) : a \in \widetilde{A}_v\right\}.$$

Ahora se puede culminar la demostración del resultado. Tomando $\phi \equiv z$, se tiene que $M_{\phi-\lambda}$ tiene rango cerrado en cada $H_v^\infty$ para cada $\lambda \in \mathbb{D}$. Así, que por la definición de $\sigma_{ap}$, se debe tener que

$$\sigma_{ap}(M_\phi) \cap \mathbb{D} = \emptyset;$$

de donde se deduce que $\phi(\widetilde{A}_v) \cap \mathbb{D} = \emptyset$, esto es, $\mathbb{D} \cap \widetilde{A}_v = \emptyset$. Por otra parte, si $\varphi \in H^\infty$ y $\lambda \in \varphi(\Gamma(H^\infty))$, entonces $M_{\varphi-\lambda}$ no posee rango cerrado en $H_v^\infty$ pues, en este caso, $|\varphi - \lambda|$ no está lejos del cero en la frontera de $\mathbb{D}$. Así, $\lambda \in \sigma_{ap}(M_\varphi)$ sobre $H_v^\infty$. Se ha mostrado que

$$\varphi(\Gamma(H^\infty)) \subseteq \varphi(\widetilde{A}_v)$$

para todo $\varphi \in H^\infty$ y el resultado sigue tomando $A_v = \widetilde{A}_v \cup \Gamma(H^\infty)$. ∎

**Comentario 3.7.5.** De la demostración del resultado anterior y del Ejemplo 5, pág. 183 del libro Garnett (2007), se puede notar que el conjunto $A_v$ al cual hace referencia el Teorema 3.7.5 es un subconjunto cerrado de $\partial\mathbb{D}$. Luego, si una función $\varphi$ está lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$, entonces ésta induce un Operador Multiplicación con rango cerrado sobre $H_v^\infty$ para todo peso $v$ definido sobre $\mathbb{D}$; sin embargo, existirán pesos que permitan que la función $\varphi$ se anule en algún subconjunto de $\partial\mathbb{D}$.

## 3.8 Ejemplos

A continuación se utilizan los resultados obtenidos en este capítulo para dar ejemplos de funciones $\varphi$ que inducen Operadores Multiplicación continuos, invertibles, Fredholm o con rango cerrado.

**Ejemplo 3.8.1.** Sea $a \in \mathbb{D}$ fijo, y el automorfismo del disco $\varphi_a(z) = (a-z)/(1-\bar{a}z)$, con $z \in \mathbb{D}$. Observe que $\lim_{|z|\to 1^-} |\varphi_a(z)| = 1$, pues para cada $\varepsilon > 0$, se selecciona $\delta = \varepsilon(1-|a|)/4$. Entonces, procediendo de manera similar que en la demostración de la Proposición 1.4.1 para $1-\delta < |z| < 1$, se tiene

$$0 \leq 1 - |\varphi_a(z)| \leq 1 - |\varphi_a(z)|^2 \leq \varepsilon.$$

Luego por el Principio del Módulo Máximo y el Teorema 3.2.1, el Operador Multiplicación $M_{\varphi_a} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es continuo para todo peso $v$, ya que $\|M_{\varphi_a}\| = \|\varphi_a\|_\infty = 1$. Sin embargo, al considerar la función $1/\varphi_a(z) = (1-\bar{a}z)/(a-z)$, se aprecia que cuando $|z| \to 1^-$ entonces $1/\varphi_a(z) \to \infty$, razón por la cual $1/\varphi \notin H^\infty$. Así, haciendo uso del Teorema 3.3.1, se puede concluir que el operador $M_{\varphi_a} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ no es invertible en este caso.

Por otro parte, de la definición de límite para $\lim_{|z|\to 1^-} |\varphi_a(z)| = 1$, para $\varepsilon < 4/(5-|a|)$ se selecciona $\delta = \varepsilon(1-|a|)/4$. Se tiene que $\delta < 1-\varepsilon$ y

$$|\varphi_a(z)| \geq 1-\varepsilon \text{ siempre que } 1-\delta < |z| < 1.$$

Así, tomando $\tilde{\varepsilon} = (\delta + 1 - \varepsilon)/2$ se concluye que

$$|\varphi_a(z)| \geq 1-\varepsilon \geq \tilde{\varepsilon}; \text{siempre que } 1-\tilde{\varepsilon} \leq 1-\delta < |z| < 1,$$

y se puede concluir del Teorema 3.6.1 que el operador $M_{\varphi_a}$ es Fredholm sobre $H_v^\infty$.

Note además que $\varphi_a$ no se anula en ningún subconjunto cerrado de $\partial\mathbb{D}$ ya que $\lim_{|z|\to 1^-} |\varphi_a(z)| = 1$, y por tanto del Teorema 3.7.5 se puede garantizar que el operador $M_{\varphi_a}$ tiene rango cerrado en $H_v^\infty$ para cualquier peso $v$ en $\mathbb{D}$.

**Ejemplo 3.8.2.** Considere la función analítica $\varphi(z) = 2 + z$, con $z \in \mathbb{D}$, se tiene de la aplicación del Teorema 3.2.1, que el operador $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es continuo, pues $|\varphi(z)| = |2 + z| \leq 2 + |z| \leq 3$ y por tanto $\varphi \in H^\infty$. Aquí también sigue del hecho de que $|1/\varphi(z)| = |1/(2 + z)| \leq 1$, por lo cual $1/\varphi \in H^\infty$, y de la aplicación del Teorema 3.3.1, que $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es invertible. Además, como $|\varphi(z)| = |2 + z| \geq 2 + |z| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, se puede elegir $0 < \varepsilon \leq 1$ tal que $|\varphi| \geq \varepsilon$ siempre que $1 - \varepsilon \leq |z| < 1$, y usando el Teorema 3.6.1 se tiene que el operador $M_\varphi$ es fredholm sobre $H_v^\infty$ y también posee rango cerrado.

**Ejemplo 3.8.3.** Sea $\varphi(z) = 1 - z$ para $z \in \mathbb{D}$. De la desigualdad

$$|\varphi(z)| = |1 - z| \leq 1 + |z| \leq 2$$

se obtiene que $\varphi \in H^\infty$ y por tanto del Teorema 3.2.1 el operador $M_\varphi$ es continuo. Observe también que $1/\varphi \notin H^\infty$ pues

$$\lim_{z \to 1} \frac{1}{\varphi(z)} = \infty$$

de donde, por el Teorema 3.3.1, el operador $M_\varphi$ no es invertible.

Por otra parte, si el operador $M_\varphi$ fuese Fredholm entonces existiría un $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $1 - \varepsilon \leq |z| < 1$; lo cual es falso pues $\lim_{z\to 1} \varphi(z) = 0$. Esta última relación implica que la función $\varphi$ no esta lejos del cero en la frontera $\partial\mathbb{D}$, y por tanto el operador $M_\varphi$ no tiene rango cerrado para una gran cantidad de pesos (ver Corolario 3.7.2 y el comentario después de éste); sin embargo, dado que la función $\varphi$ se anula solamente en un punto de la frontera del disco $\mathbb{D}$, el Teorema 3.7.5 sugiere que existen pesos $v$ para los cuales el Operador Multiplicación $M_\varphi$ tenga rango cerrado sobre $H_v^\infty$; pero se presenta la dificultad que en este teorema no se da un método para hallar el subconjunto $\mathcal{A}_v$ de $\partial\mathbb{D}$.

## CONCLUSIONES

Los espacios tipo Korenblum generalizados, $H_v^\infty$, aparecen como aquellos espacios generados por ciertas funciones, definidas en $\mathbb{D}$, denominadas pesos. Se demostró que estos espacios son de Banach y que son generalizaciones de los espacios de las funciones analíticas acotadas $H^\infty$ y de los espacios de Korenblum o tipo Bloch, los cuales se obtienen a través de las funciones peso $v(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, para $\alpha > 0$. Se conviene que la función peso $v$, presente en la definición del espacio $H_v^\infty$, debe ser acotada; esto se hace para garantizar la pertenencia de algunos elementos importantes a los espacios $H_v^\infty$ como es el caso de las funciones constantes y los polinomios analíticos. Análogo a lo considerado para el espacio $H_v^\infty$, el espacio $H_v^0$ aparece como la generalización del espacio de Korenblum pequeño $H_\alpha^0$ y $H_v^0 \subset H_v^\infty$. Se tiene que $H_v^0$ es un subespacio cerrado de $H_v^\infty$.

Dada una función analítica $\varphi$, el Operador Multiplicación $M_\varphi$, se define por la relación $M_\varphi(f) = \varphi \cdot f$. Para el Operador Multiplicación actuando sobre los espacios $H_v^\infty$ se obtuvieron los siguientes resultados:

- El operador $M_\varphi$ aplica continuamente al espacio $H_v^\infty$ en sí mismo si y sólo si el coeficiente multiplicativo $\varphi$ es acotado. En este caso se cumple la igualdad $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

- Por otra parte si $v$ es un peso cualquiera y $\varphi$ acotada, para que $M_\varphi : H_v^\infty \to H_v^\infty$ sea invertible será necesario y suficiente que la función $1/\varphi$ sea acotada. Aquí la propiedad $1/\varphi \in H^\infty$ puede ser sustituida por la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

- El operador $M_\varphi$ no es compacto sobre $H_v^\infty$; sin embargo, se puede estimar qué tan lejos se encuentra de la familia de operadores compactos sobre $H_v^\infty$

(para cada peso $\upsilon$ en $\mathbb{D}$) por medio de las igualdades

$$r_e(M_\varphi) = \|M_\varphi\|_e = \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty,$$

siempre que $\varphi \in H^\infty$.

- Puede garantizarse que el operador $M_\varphi$ sea Fredholm para cada peso $\upsilon$ en $\mathbb{D}$ y $\varphi \in H^\infty$ siempre que exista $\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(z)| \geq \varepsilon$ para todo $1 > |z| \geq 1 - \varepsilon$. El recíproco también es cierto. En particular, para una función exterior $\varphi$, las propiedades de invertibilidad, isomorfismo y Fredholm coinciden.

- En cuanto a la propiedad rango cerrado se puede decir que existe una cantidad muy grande de funciones peso $\upsilon$ para las cuales $M_\varphi : H_\upsilon^\infty \to H_\upsilon^\infty$ posee rango cerrado, siempre y cuando $\varphi$ esté lejos del cero en $\partial\mathbb{D}$.

Las propiedades del Operador Multiplicación actuando sobre el espacio $H_\upsilon^0$ se analizaron utilizando el peso usual $\upsilon(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$.

**BIBLIOGRAFÍA**


[1] Ahlfors, L. y Grunsky, H. 1937. Über die Blochsche Konstante. *Math. Z., 42:* 671-673.

[2] Anderson, J.M., Clunie, J., y Pommerenke, Ch. 1974. On Bloch functions and normal functions. *J, Reine Angew. Math, 270:* 12-37.

[3] Anderson, J. y Shields, A. 1976. Coefficient multipliers of Bloch functions. *Trans. Amer. Math. Soc., 224:* 255-265.

[4] Anderson, J.M. 1985. Bloch Functions: the basic theory, Operators and Function Theory. (S.C. Power, editor), D. Reidel, 1-17.

[5] Apostol, T. 1981. Análisis Matemático. Segunda edición. Reverté S.A. Barcelona, España.

[6] Arazy, J. 1982. Multipliers of Bloch Functions. University of Haifa Mathematics Publication Series 54.

[7] Bennett, J., Stegenga, D., y Timoney, R. 1981. Coefficients of Bloch and Lipschitz funcions. *Illinois J. Math, 25:* 520-531.

[8] Bierstedt, K.; Bonet, J. y Taskinen, J. 1998. Associated weights and spaces of holomorphic functions. *Studia. Math, 127:* 70-79.

[9] Bonet, J.; Domanski P., and Lindström, M. 1999 . Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions. *Studia Math.(2), 137:* 177-194.

[10] Bonet, J.; Domanski P.; Lindström, M., y Taskinen J. 1997 . Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions. *J. Austtral. Math.Soc., 64:* 101-118.

[11] Bourbaki, N. 1989. Elements of mathematics. Algebra I, chapters 1-3. Springer Verlag. New York.

[12] Carleson, L. 1958. An interpolation problem for bounded analytic functions. *Amer. J. Math., 80:* 912-930.

[13] Conway, J. 1978. Functions of one complex variable. Segunda edición, Springer Verlag. New York.

[14] Conway, J. 1990. A Course in Functional Analysis. Segunda edición, Springer Verlag. New York.

[15] Churchill, R.; Brown, J. y Verhey, R. 1978. Variables complejas y sus aplicaciones. Segunda Edición, MaGraw-Hll. México.

[16] Fernández, J. 1984. On the coefficients of Bloch functions. *J. London. Math. Soc. (2), 29:* 94-102.

[17] Garnett, J. 2007. Bounded Analytic Functions. Academic Press. New York.

[18] Grubb, G. 2009. Distributions and Operators. Academic Press. New York.

[19] Hille, E. 1962. Analytic Function Theory. Volúmen II, Blaisdell Publishing Company. Whaltham, Massachusetts.

[20] Korenblum, B. 1975. An extension of de Nevanlinna theory. *Acta Math, 135:* 187-219.

[21] Kostrikin, E. 1992. Introducción al Álgebra. Segunda edición , McGraw Hill. Madrid.

[22] Müller, V. 2003. Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras. Birkhäuser Verlag. Basel.

[23] Pita Ruiz, C. 1991. Álgebra Lineal. McGraw Hill. Caracas.

[24] Ramos, J. 2002. Caracterización de conjuntos dominantes en los espacios de Bergman con peso. Trabajo de Ascenso para ascender a la categoría de Profesor Agregado. Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná.

[25] Ransford, T. 1995. Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge Univ. Press.

[26] Román, J. 1993. Algebra Lineal. MacGraw-Hill. Madrid.

[27] Rubel, L. and Shields, A. 1970. The second duals of certain spaces of analytic functions. *J. Austral. Math. Soe. Ser. A, 11:* 276-280.

[28] Rudin, W. 1980. Real and complex analysis. Tercera edición, McGraw-Hill. New York.

[29] Shields, A. and Williams, D. 1971. Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc., 162:* 287-302.

[30] Stein, E. y Shakarchi, R. 2003. Complex Analysis. Princeton University Press. New Jersey.

[31] Vera, A. y Alegría, P. 1997. Un curso de análisis funcional. AVL. Bilbao.

[32] Zelazko, W. 1979. An axiomatic approach to joint spectra I. *Studia Math., 64:* 249-261.

[33] Zhu, K. 1989. Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications Toeplitz operators. *J. Funct. Anal., 87:* 31-50.

[34] Zhu, k. 1990. Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, New York.

[35] Zhu, K. 1993. Bloch Type Spaces of Analytic Functions. *Rocky Mountain J. Math, 23:* Number 3 1143-1177.

# Hoja de Metadatos

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

| | |
|---|---|
| **Título** | **PROPIEDADES DEL OPERADOR MULTIPLICACIÓN SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE BANACH DE FUNCIONES ANALÍTICAS** |
| **Subtítulo** | |

**Autor(es)**

| Apellidos y Nombres | Código CVLAC / e-mail | |
|---|---|---|
| **Antón Marval, Gabriel M.** | CVLAC | V-15.936.786 |
| | e-mail | GabMAM@hotmail.com |
| | e-mail | |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |

**Palabras o frases claves:**

| |
|---|
| **Operador Multiplicación** |
| **Espacio de Korenblum** |
| **Espacios de funciones analíticas** |
| **Funciones peso** |
| |
| |
| |
| |
| |
| |

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

**Líneas y sublíneas de investigación:**

| Área | Subárea |
|---|---|
| Ciencias | Matemática |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**Resumen (abstract):**
**En este trabajo se estudian las propiedades del Operador Multiplicación actuando sobre los espacios de Korenblum generalizados. Se caracterizan además, la continuidad, la invertibilidad, la compacidad, y las propiedades Fredholm y rango cerrado de dicho operador, mediante las diversas propiedades de las denominadas funciones pesos y las de los coeficientes multiplicativos que definen al operador.**

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

**Contribuidores:**

| Apellidos y Nombres | ROL / Código CVLAC / e-mail | |
|---|---|---|
| Ramos Fernández, Julio C. | ROL | CA [ ] AS [ ] TU [x] JU [ ] |
| | CVLAC | V-10.949.733 |
| | e-mail | jramos@sucre.udo.edu.ve |
| | e-mail | |
| Carpintero, Carlos | ROL | CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X] |
| | CVLAC | V-8.443.180 |
| | e-mail | carpintero.carlos@gmail.com |
| | e-mail | |
| Arzolay, Wilmer | ROL | CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X] |
| | CVLAC | V-09.859.622 |
| | e-mail | warzolay@udo.edu.ve |
| | e-mail | |
| | ROL | CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ] |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |

**Fecha de discusión y aprobación:**

| Año | Mes | Día |
|---|---|---|
| 2011 | 02 | 07 |

**Lenguaje:** Spa

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

**Archivo(s):**

| Nombre de archivo | Tipo MIME |
|---|---|
| Tesis_AntónG.pdf | Aplication / PDF |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**Alcance:**

**Espacial :** **Universal** (Opcional)

**Temporal:** **Intemporal** (Opcional)

**Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciatura en Matemática**

**Nivel Asociado con el Trabajo:** **Licenciatura**

**Área de Estudio: Matemática**

**Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:**

**Universidad de Oriente**

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/5

**Derechos:**

**Yo, Gabriel Moisés Antón Marval, autor de la tesis de grado titulada: Propiedades del Operador Multiplicación sobre ciertos espacios de Banach de funciones analíticas, autorizo la publicación del título y resumen de este trabajo.**

**Br. Gabriel Antón**
**AUTOR**

**Prof. Julio Ramos**
**TUTOR**

**Prof. Carlos Carpintero**
**JURADO 1**

**Prof. Wilmer Arzolay**
**JURADO 2**

**POR LA SUBCOMISÓN DE TESIS:**

**Prof. Jacques Laforgue**

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
COMISIÓN DE TRABAJO DE GRADO
UNIVERSIDAD DE ORIENTE VENEZUELA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
ESCUELA DE CIENCIAS - NÚCLEO DE SUCRE