



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY
(Modalidad: Investigación)

EMILIO DAVID BRITO RODRÍGUEZ

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2008

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

Aprobado por:

Prof. Julio C. Ramos Fernández

Asesor Académico

Prof. Gladys Lárez

Jurado Principal

Prof. Jacques Laforgue

Jurado Principal

INDICE GENERAL

	Pág.
DEDICATORIA	iii
AGRADECIMIENTO	iv
LISTA DE TABLAS	v
LISTA DE FIGURAS	vi
RESUMEN	viii
INTRODUCCIÓN	
CAPÍTULO I	
1.1. Números Complejos	12
1.2. Propiedades Algebraicas De Los Números Complejos	13
1.3. FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA	15
1.3.1. Límite De Una Función Compleja De Variable Compleja	16
1.3.2. Continuidad De Una Función Compleja De Variable Compleja	16
1.3.3. Derivada De Funciones Complejas De Variable Compleja	17
1.4. Integrales Sobre Contornos	18
CAPÍTULO II	
2.1. Transformada Continua De Fourier	30
2.2. Aplicaciones De La Transformada De Fourier	39
2.2.1. Temperatura De La Tierra	40
2.2.2. Solución De Ecuaciones Diferenciales	42
2.2.3. Flujo Del Calor	42
2.3. Espacio De Las Sucesiones Bilaterales Infinitas	43
2.4. Transformada Discreta De Fourier	49
2.5. Evaluación Numérica De La Transformada Discreta De Fourier	54
2.6 Estabilidad De La Transformada Discreta De Fourier	
	58

2.7. Algoritmo Y Ejemplos Numéricos	63
CAPÍTULO III	
3.1. El Teorema De Cauchy-Goursat	66
3.2. Fórmula Integral De Cauchy	73
3.3. La Integral De Cauchy	77
3.4. Evaluación Numérica De La Integral De Cauchy	85
3.5. Algoritmo Y Ejemplos Numéricos	91
CONCLUSIONES	99
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100
ANEXOS	101

DEDICATORIA

A mis padres, Luz y Emilio José, por el apoyo durante todo el camino recorrido.

A mi hijo y amigo, Emilio Enrique, lo más grande que me ha dado Dios.

A mis hermanas, tíos y tías, por las palabras de aliento y las muestras de cariño sincero.

A todos los que quisieron ver este logro alcanzado y por cosas del destino no están aquí.

A ti, porque nunca has salido de mi corazón...

“No se preocupe por sus dificultades en las matemáticas.
Yo puedo asegurarle que las mías son todavía mayores.”

John Locke. Pensador inglés

“Me gusta la cerveza, es estimulante para el cerebro”

Karl Weierstrass. Matemático alemán

¡Lo que ha hecho Dios!

Números 23:23

AGRADECIMIENTO

A Dios, por habernos mostrado su lenguaje celestial. La matemática.

Al profesor Julio César Ramos Fernández: mi más sincero agradecimiento por aceptar ser mi tutor para la elaboración de este trabajo. Por las jornadas dedicadas a la revisión, corrección y discusión de este texto, incluso con un océano de por medio. ¡Gracias Compinche!

Al Departamento de Matemáticas y a la Coordinación de Postgrado en Matemáticas por permitirme el acceso y uso de la Sala de Cálculo y del Laboratorio de Postgrado.

A la familia Salazar Benítez: Por recibirme y quererme como un miembro más de la familia.

A todos los que, de una forma u otra, me ayudaron en la realización de este sueño.

LISTA DE TABLAS

Tabla 2.1: Ejemplos de funciones y sus respectivas transformadas de Fourier.	39
Tabla 2.2. Sucesión x y su TRF.	65
Tabla 3.1: Formula integral de Cauchy aplicada a ciertos valores de z, para $h(z) = z$.	93
Tabla 3.2: FIC con $h(z) = \bar{z}$ para algunos valores de z.	96

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Ubicación de $C_{in}(\gamma)$, $Tr(\gamma)$ y $C_{ext}(\gamma)$.	19
Figura 1.2. Polígono de lados paralelos a los ejes entre los puntos (x_0, y_0) y (x, y) contenido en Ω .	24
Figura 1.3: Partición de T en T_1, T_2, T_3 y T_4	27
Figura 1.4: Sucesión de triángulos $T^1, T^2, \dots, T^n, \dots$ encajados.	28
Figura 2.1: Gráficas de las funciones del Ejemplo 2.1.6.	38
Figura 2.2: Gráficas de las funciones del Ejemplo 2.1.7.	38
Figura 2.3: Gráfica de la función $u(t, x)$ para $x = \sqrt{\pi/2}$.	41
Figura 2.4. Gráfica de x y su transformada de Fourier.	64
Figura 2.5. Gráfica de los datos de la tabla 2.2.	65
Figura 3.1: Partición de un polígono convexo en triángulos.	67
Figura 3.2: Partición de un polígono no convexo en regiones convexas.	68
Figura 3.3: Poligonal no simple.	69
Figura 3.4: Construcción de un cerrado conteniendo a γ y contenido en Ω .	70
Figura 3.5: Poligonal P aproximado a γ .	71
Figura 3.6: Teorema de Cauchy para dominios múltiplemente conexos	73
Figura 3.7. Índice de una curva cerrada simple alrededor de un punto z_0 .	74
Figura 3.8: Situación de γ y γ_0 .	75
Figura 3.9: Gráfica de Γ_z .	78
Figura 3.10. Un punto z_0 que no está sobre una curva γ , está a una distancia positiva de γ .	79
Figura 3.11. γ_0 un círculo con centro en z_0 suficientemente pequeño para que no se cruce con γ .	83

Figura 3.12. El disco unitario y su imagen mediante la fórmula integral de Cauchy para $h(z) = z$	94
Figura 3.13. El disco unitario y su imagen mediante la fórmula integral de Cauchy para $h(z) = e^z$.	94
Figura 3.14. El triángulo T y su imagen mediante la fórmula integral de Cauchy para $h(z) = e^z$.	95
Figura 3.15. El disco unitario, su inverso y la FIC aplicada al inverso del disco para $h(z) = \bar{z}$.	96
Figura 3.16. El triángulo T , su inverso y la FIC aplicada al inverso de T para $h(z) = \bar{z}$.	97
Figura 3.17: El disco unitario D , su inverso y la FIC aplicada al exterior de D con $h(z) = \exp(\bar{z})$.	98

RESUMEN

En este trabajo, se realizó un estudio extenso de las distintas transformadas de Fourier (continua y discreta) y del método numérico que con preferencia se utiliza para hallar sus aproximaciones (transformada rápida de Fourier). También se desarrolló e implementó un algoritmo en MATLAB para la evaluación numérica de la integral de Cauchy.

Palabras o Frases Claves:

INTRODUCCIÓN

En 1814, Augustin Cauchy enunciaba y daba una prueba del famoso teorema, que hoy lleva su nombre, en el que establecía que la integral de una función holomorfa f , con derivada continua sobre y en el interior de un contorno cerrado γ , es nula. El resultado de Cauchy es un teorema de importancia capital en la teoría de cálculo integral con variable compleja y permaneció invariante por más de 80 años hasta que, en el año 1900, Edouard Goursat observara que se podía eliminar una de las hipótesis que Cauchy había impuesto; de hecho, Goursat demostró que el teorema de Cauchy también era cierto si se omitía la hipótesis que la derivada de la función holomorfa f sea continua; y por esta razón, a este resultado se le suele llamar también el Teorema de Cauchy-Goursat.

Una de las consecuencias más importantes del resultado de Cauchy-Goursat es el célebre Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy (descubierto por el mismo Cauchy en 1825), el cual dice que si f es una función analítica sobre y en el interior de un contorno simple y cerrado γ , entonces los valores de f en los puntos interiores de γ quedan determinados por los valores de f en γ , de hecho, si z_0 es un punto cualquiera en el interior de la región encerrada por γ , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

La integral del lado derecho de la expresión anterior queda bien definida si se exige solamente que f sea continua en γ y que $z_0 \notin \gamma$. En este caso, se obtiene una función compleja h definida en el interior (y el exterior) de la región encerrada por la curva γ y dada por

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds,$$

la cual se conoce como la *integral de Cauchy*.

Entre las propiedades más importantes de la integral de Cauchy, es posible citar que es una función analítica sobre el dominio encerrado por la curva γ , y por tal motivo, resulta una herramienta poderosa para construir aplicaciones conformes en el plano complejo. Además, como la parte real de una función analítica es una función armónica, la integral de Cauchy se puede utilizar para resolver ciertos problemas de fronteras que involucren funciones cuyo Laplaciano tenga que ser nulo. Sin embargo, a pesar de las múltiples aplicaciones teóricas que tiene la integral de Cauchy, tanto en matemáticas como en otras áreas del conocimiento (como por ejemplo, en la teoría de la elasticidad), surge el problema de que, en general, la integral involucrada en su definición no se puede calcular explícitamente con los métodos de integración tradicionales (tanto reales como complejos), y de allí surge la necesidad de desarrollar métodos numéricos eficientes que permitan aproximar esta integral de Cauchy.

Un primer intento para aproximar la integral de Cauchy consiste en parametrizar el contorno γ y aproximar las integrales parte real e imaginaria resultantes por un método de cuadratura Gaussiana de los que se estudian en un curso de análisis numérico; sin embargo, surge la dificultad técnica de seleccionar el conjunto de polinomios ortonormales adecuado, así como el hecho de que las integrales parte real e imaginaria que resultan suelen tener una expresión más complicada de tratar que la original. Por tal motivo, hay que ver la integral de Cauchy como un todo y no como la suma de dos integrales.

En vista de que todo contorno simple y cerrado en un dominio simplemente conexo se puede deformar continuamente en una circunferencia, se estudia el caso particular de que γ sea la frontera del disco unitario con centro en el origen y radio 1. Entonces, el desarrollo en serie de Taylor del núcleo de Cauchy $(e^{i\theta} - z)^{-1}$ para los

distintos valores de z en el interior (o exterior) del disco unitario implica que se debe estudiar métodos numéricos para aproximar integrales del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{i\theta z} d\theta.$$

Por esta razón, se ha dedicado el Capítulo II de este trabajo para analizar las distintas transformadas de Fourier (continua y discreta); haciendo especial énfasis en la transformada rápida de Fourier, su evaluación numérica y sus aplicaciones.

En el Capítulo III de este trabajo se recopilan las demostraciones de los teoremas de Cauchy-Goursat así como el teorema de la fórmula integral de Cauchy. En la tercera sección de este capítulo, se definen y estudian las propiedades más importantes de la integral de Cauchy; mientras que en la cuarta y quinta sección de este capítulo, se desarrolla e implementa un algoritmo en MATLAB 6.5 para la evaluación numérica de la integral discreta de Cauchy. El capítulo finaliza con una aplicación que involucra el cálculo aproximado de integrales reales que son parte real de una integral de Cauchy. El trabajo se completa con un Capítulo I de preliminares, donde se resumen las notaciones, definiciones y resultados que se necesitaron, procedentes de un curso básico de análisis complejo.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

Este capítulo está concebido con la finalidad de establecer las notaciones, definiciones y resultados de un curso de análisis complejo que se usarán en el transcurso del presente trabajo; haciendo especial énfasis en la teoría concerniente a la integración de funciones complejas sobre ciertas curvas denominadas contornos, ya que en el capítulo 3 se analizará un método numérico para su aproximación.

1.1. Números Complejos

Los números complejos, elementos del conjunto \mathbb{C} , se pueden definir como pares ordenados de la forma

$$z = (x, y),$$

donde x e y son números reales. Los pares de la forma $(x, 0)$ son llamados reales puros, los pares de la forma $(0, y)$ son llamados imaginarios puros. De aquí, al número real x se le llama parte real y el número real y es llamado parte imaginaria y se escribe

$$\operatorname{Re}(z) = x, \operatorname{Im}(z) = y.$$

De la igualdad de pares ordenados, es claro que dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ son iguales si, y sólo si, sus partes reales e imaginarias son respectivamente iguales, es decir,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

La suma $z_1 + z_2$ y el producto de $z_1 z_2$ de dos números complejos se define por

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1.1)$$

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2); \quad (1.2)$$

en particular, $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, luego si se piensa en un número real x como $(x, 0)$ y denotando por i el número imaginario $(0, 1)$, se obtiene

$$(x, y) = x + iy; \quad (1.3)$$

del mismo modo, al asumir que $z^2 = zz$, $z^3 = zz^2, \dots$, se consigue que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0);$$

es decir, $i^2 = -1$. Usando la expresión para i , además de la expresión (1.3), las ecuaciones (1.1) y (1.2) se convierten en

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2). \end{aligned}$$

1.2. Propiedades Algebraicas De Los Números Complejos

Dado un número complejo $z = x + iy$, se define el complejo conjugado de z por $\bar{z} = x - iy$, que se denotará por \bar{z} , esto es,

$$\bar{z} = x - iy.$$

El módulo, de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denotará por $|z|$, esto es,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sean r y θ las coordenadas polares del par (x, y) que corresponde al punto $z = x + iy$. Como

$$x = r \cos \theta \text{ y } y = r \sin \theta,$$

z puede ser expresado en la forma polar como

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

La ecuación $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ que define la expresión $e^{i\theta}$ o $\exp(i\theta)$, para todo valor real de θ , se conoce como *fórmula de Euler*. Si se escribe un número complejo

no nulo en forma polar, la fórmula de Euler permite expresar z de una forma más compacta, en forma exponencial:

$$z = re^{i\theta};$$

de aquí, se tiene que el inverso multiplicativo de un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ es

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta},$$

análogamente, si se escribe $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, se obtiene

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \text{ y } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

Una de las ventajas, desde el punto de vista computacional, de este tipo de representación es su facilidad de almacenamiento y utilización en memoria.

Para finalizar esta sección se enumeran algunos conceptos que se estarán usando frecuentemente en el transcurso de este trabajo

- Un conjunto G de \mathbb{C} se dice *abierto* si para cada $a \in G$ puede ser encontrado un $r > 0$ tal que el conjunto $D(a, r)$ está contenido en G , donde

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

- Un conjunto E de \mathbb{C} se dice *convexo* si para cualesquiera $x, y \in E$, el conjunto $[x, y] = \{z_t = (1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$ está contenido en E .
- Un *polígono* P con vértices z_0, z_1, \dots, z_n , denotado por $P = [z_0, z_1, \dots, z_n]$, no es más que el conjunto

$$P = \bigcup_{k=0}^{n-1} [z_k, z_{k+1}].$$

- Un conjunto abierto G de \mathbb{C} es *conexo* si para cada par de puntos $a, b \in G$ existe una función continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Equivalentemente, un conjunto abierto G de \mathbb{C} es conexo si para cada par de puntos z_1, z_2 en G estos pueden ser unidos por una línea poligonal que está completamente contenida en G .
- Un conjunto abierto y conexo no vacío de \mathbb{C} se llama *dominio o región*.
- Un conjunto K de \mathbb{C} se dice *compacto* si es cerrado y acotado. Entre las propiedades de los conjuntos compactos, se puede mencionar el *Lema de la distancia*, que establece que si K es compacto, C es cerrado y $K \cap C = \emptyset$, entonces, la distancia $d(K, C)$ de K a C es mayor que cero. Esto es, existe un número $\rho > 0$ tal que $|z - w| > \rho$ para todo $z \in K$ y $w \in C$.

1.3. FUNCIONES COMPLEJAS DE VARIABLE COMPLEJA

Sea D un conjunto de números complejos. Una función f compleja de variable compleja, definida sobre D , es una regla o ley que asigna a cada z en D un número complejo w . Este número w es llamado valor de f en z y se denota por $f(z)$, esto es

$$w = f(z).$$

El conjunto D es llamado dominio de definición de f . Además, si $w = u + iv$ es el valor de una función f en $z = x + iy$; es decir, $u + iv = f(x + iy)$; entonces, se puede observar que cada número real u y v depende de las variables x y y , luego $f(z)$ puede ser expresado en términos de un par de funciones con valores reales de las variables reales x y y :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

El estudio de límites, continuidad y diferenciabilidad de funciones complejas de variable compleja se hace de manera similar al caso de las funciones reales de variable real. A continuación se resume lo referente a estos conceptos.

1.3.1. Límite De Una Función Compleja De Variable Compleja

Sea f una función definida en todos los puntos z de un entorno abierto de z_0 , la afirmación de que el límite de $f(z)$, cuando z tiende a z_0 , es un número w_0 , es decir,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0;$$

significa que, dado un número real positivo ε , existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

1.3.2. Continuidad De Una Función Compleja De Variable Compleja

Una función f es continua en un punto z_0 si se satisfacen estas tres condiciones:

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe,
- $f(z_0)$ existe,
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Esta última afirmación dice que para cada número positivo ε , existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ si } |z - z_0| < \delta.$$

Si dos funciones son continuas en un punto, su suma y su producto también son continuas; su cociente es una función continua en las mismas circunstancias, siempre que el denominador no se anule en ese punto. También la composición de dos funciones continuas es continua. Otras propiedades de las funciones continuas que se usarán son (Ver Ahlfors, pág. 64):

- Bajo la aplicación de una función continua, la imagen de cada conjunto compacto es compacto, y por tanto cerrado.

Asociado al concepto de continuidad se encuentra la noción de continuidad uniforme sobre un conjunto E de \mathbb{C} . Más precisamente, una función compleja f

definida sobre un conjunto E de \mathbb{C} se dice *uniformemente continua* en E si para cada número positivo ε , existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

para todos $z, z_0 \in E$ que satisfacen $|z - z_0| < \delta$. Note que toda función uniformemente continua en E es continua en E ; pero que el recíproco es falso (por ejemplo, la función $f(z) = \frac{1}{z}$, con $z \in E = D(0,1) \setminus \{0\}$); sin embargo, se tiene el siguiente resultado (Ver Ahlfors, pág. 65)

- En un conjunto compacto cada función continua es uniformemente continua.

1.3.3. Derivada De Funciones Complejas De Variable Compleja

Sea f una función cuyo dominio de definición contiene un entorno de z_0 . La derivada de f en z_0 , escrita por $f'(z_0)$, se define por la ecuación

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

siempre que dicho límite exista. La función se llama *diferenciable* en z_0 cuando exista su derivada en z_0 . Una función f de la variable compleja z se dice *analítica* (u *holomorfa*) en un conjunto abierto si tiene derivada en todo punto de ese abierto. Una función analítica en todos los puntos del plano se dice *entera*. El conjunto de las funciones analíticas en un conjunto Ω se denota por $H(\Omega)$.

En el caso de que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea diferenciable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces las funciones u y v satisfacen *las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0), \end{cases}$$

lo cual es equivalente a escribir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. En este caso, la derivada de la función f en el

punto $z_0 = x_0 + iy_0$ es justamente $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

El hecho de que las funciones u y v cumplan con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ no es condición suficiente para que la función f sea diferenciable en ese punto. Hay que exigir, además de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, que las parciales u_x , u_y , v_x y v_y sean continuas en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$.

1.4. Integrales Sobre Contornos

En esta sección se dará en detalle lo referente a la integración de funciones complejas de variable compleja. En primer lugar, se definirán los conjuntos sobre los cuales se van a calcular las integrales.

DEFINICIÓN 1.4.1. Un *arco o curva* C en el plano complejo es una función que asigna a cada punto $a \leq t \leq b$ el punto $z = (x, y)$ dado por

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b),$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones reales y continuas del parámetro t .

Esta definición establece que una curva es una aplicación continua del intervalo $a \leq t \leq b$ en el plano xy o plano z ; y los puntos imagen se ordenan por valores crecientes de t . La *gráfica* de un arco C se define por medio de la ecuación:

$$Tr(C) = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\}.$$

DEFINICIÓN 1.4.2. Una curva C es un *arco simple* o *arco de Jordan*, si no se corta a si mismo, esto es, C es simple si $z(t_1) \neq z(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$. Cuando el arco C es simple excepto por el hecho de que $z(b) = z(a)$, se dice que C es una *curva simple y cerrada* o *curva de Jordan*.

Si γ es una curva simple y cerrada, se denotará por $C_{\text{int}}(\gamma)$, a la región acotada en el plano complejo cuya frontera es $Tr(\gamma)$; mientras que $C_{\text{ext}}(\gamma)$ denotará la región no acotada cuya frontera es $Tr(\gamma)$. (Ver Figura 1.1)

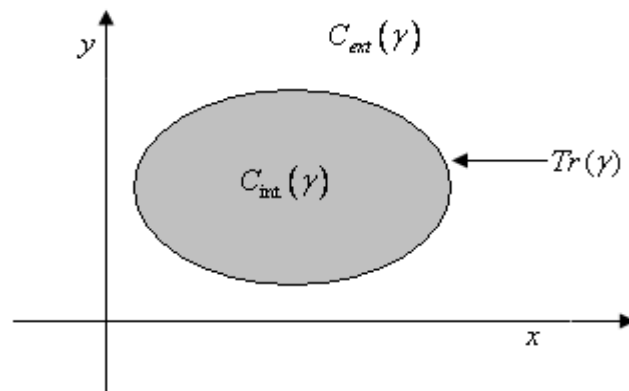


Figura 1.1. Ubicación de $C_{\text{int}}(\gamma)$, $Tr(\gamma)$ y $C_{\text{ext}}(\gamma)$.

La generalización más inmediata de una integral real es la integral definida de una función compleja sobre un intervalo real. Si $f(t) = u(t) + iv(t)$ es una función continua, definida sobre un intervalo (a, b) , se establece por definición

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt .$$

Esta integral posee la mayoría de de las propiedades de la integral real, en particular, si $c = \alpha + i\beta$ es una constante compleja, se obtiene

$$\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt$$

Pero esto es igual a

$$\int_a^b (\alpha u - \beta v)dt + i \int_a^b (\alpha v + \beta u)dt .$$

Cuando $a \leq b$, la identidad fundamental

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (1.4)$$

se cumple para cada función $f(t)$ compleja. Además, si $f(t) = u(t) + iv(t)$, $a \leq t \leq b$ admite antiderivada en el intervalo (a, b) ; es decir, si existe una función compleja F tal que $F'(t) = f(t)$ para todo $t \in (a, b)$, entonces vale el teorema fundamental del cálculo; esto es,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Si se considera ahora un arco diferenciable a trozos o *contorno* γ con la ecuación $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces, las partes real e imaginaria del arco $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, son funciones diferenciables en el intervalo (a, b) excepto posiblemente en una cantidad finita de puntos en (a, b) , donde son continuas. Si la función $f(z)$ está definida y es continua en γ , entonces $f(z(t))$ también es continua y se puede definir

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt . \quad (1.5)$$

Ésta es la definición de integral compleja definida de $f(z)$ extendida sobre el arco γ . Si $z'(t)$ no es continua sobre (a, b) , el intervalo de integración deberá ser subdividido de una manera conveniente.

Si se define el opuesto de γ , denotado por $-\gamma$, por la ecuación $z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$, que no es otra cosa que el arco γ recorrido desde el punto b al punto a , se tendrá

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz. \quad (1.6)$$

La integral (1.5) también posee una propiedad aditiva muy importante. Un arco γ puede ser subdividido en un número finito de subarcos $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, y se escribirá $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$. Su correspondiente integral satisface la relación

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz. \quad (1.7)$$

Por otro lado, la integral sobre un camino cerrado es invariante bajo el intercambio de parámetros. Un punto inicial y un punto final determinan dos subarcos γ_1, γ_2 , y la invarianza se sigue del hecho de que la integral sobre $\gamma_1 + \gamma_2$ es igual a la integral sobre $\gamma_2 + \gamma_1$.

Además de las integrales de la forma (1.5) también es posible considerar integrales de línea respecto a \bar{z} . La definición más conveniente que se usará será la de doble conjugación

$$\int_{\gamma} f \bar{dz} = \overline{\int_{\gamma} f dz}.$$

Usando esta notación se pueden definir las integrales respecto a x o y por

$$\int_{\gamma} f dx = \frac{1}{2} \left[\int_{\gamma} f dz + \int_{\gamma} f \bar{dz} \right],$$

$$\int_{\gamma} f dy = \frac{1}{2i} \left[\int_{\gamma} f dz - \int_{\gamma} f \bar{dz} \right].$$

Con $f = u + iv$, se obtiene que la integral (1.5) puede ser escrita en la forma

$$\int_{\gamma} (u dx + v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx)$$

la cual separa la parte real y la imaginaria.

Una integral de línea esencialmente diferente se obtiene mediante la integración con respecto a la longitud del arco, y su definición es

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z(t)) |z'(t)| dt.$$

Esta integral es también independiente de la escogencia de la parametrización. En contraste con (1.6) se tiene

$$\int_{-\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|;$$

mientras que (1.7) se mantiene válido en la misma forma. La desigualdad

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \tag{1.8}$$

es consecuencia de (1.4).

Para $f = 1$ la integral (1.8) se reduce a $\int_{\gamma} |dz|$. En este caso, si γ es un arco

diferenciable con ecuación $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces

$$L(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

la cual es por definición la *longitud del arco* γ .

Suponga ahora que p y q son funciones reales definidas y continuas en un dominio Ω del plano complejo. Es de interés saber cuándo integrales de la forma

$$\int_{\gamma} p dx + q dy$$

dependen sólo de los puntos extremos del arco γ . En otras palabras, si γ_1 y γ_2 tienen los mismos puntos iniciales y finales, se desea que

$$\int_{\gamma_1} p dx + q dy = \int_{\gamma_2} p dx + q dy.$$

En primer lugar, se tiene que decir que la integral depende sólo de los puntos extremos es equivalente a decir que la integral sobre cualquier curva cerrada es cero. En efecto, si γ es una curva cerrada, entonces γ y $-\gamma$ tienen los mismos puntos extremos, y si la integral depende sólo de los puntos extremos, se obtiene

$$\int_{\gamma} = \int_{-\gamma} = -\int_{\gamma}$$

(donde se ha omitido el integrando por comodidad), y en consecuencia $\int_{\gamma} = 0$.

Recíprocamente, si γ_1 y γ_2 tienen los mismos puntos extremos, entonces $\gamma_1 - \gamma_2$ es una curva cerrada, y si la integral sobre una curva cerrada se anula, se sigue que

$$\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}.$$

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales la integral de línea depende sólo de los puntos extremos.

TEOREMA 1.4.3. La integral de línea $\int_{\gamma} p dx + q dy$, definida en un dominio Ω ,

depende sólo de los puntos extremos de γ si y sólo si existe una función $U(x, y)$ en

Ω tal que posea derivadas parciales $\frac{\partial U}{\partial x} = p$, $\frac{\partial U}{\partial y} = q$

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia se obtiene de inmediato, puesto que si se cumple la condición, es posible escribir usando la notación usual:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} p dx + q dy &= \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt \\ &= U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) \end{aligned}$$

y el valor de esta diferencia depende sólo de los puntos extremos.

Para probar la necesidad, escoja un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, unido a (x, y) por un polígono γ , contenido en Ω , cuyos lados sean paralelos a los ejes de coordenadas (Ver. Fig.1.2)

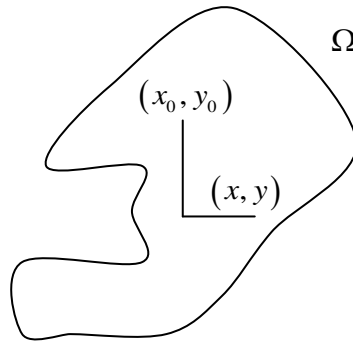


Figura 1.2. Polígono de lados paralelos a los ejes entre los puntos (x_0, y_0) y (x, y) contenido en Ω .

y defina una función U por

$$U(x, y) = \int_{\gamma} p dx + q dy.$$

Puesto que la integral sólo depende de los puntos extremos, la función está bien definida. Más aún, si se escoge el último segmento horizontal de γ , se puede mantener y constante y hacer variar x sin cambiar los otros segmentos. En el último segmento se escoge x como parámetro para obtener

$$U(x, y) = \int^x p(x, y) dx + const,$$

el límite inferior de la integral es irrelevante. De esta expresión se sigue que $\frac{\partial U}{\partial x} = p$.

Del mismo modo, al escoger el último segmento vertical, se obtiene $\frac{\partial U}{\partial y} = q$. ■

Es usual escribir

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dy,$$

y decir que la expresión $pdx + qdy$, si puede ser escrita en esta forma, es una *diferencial exacta*. La función U , si existe, está únicamente determinada, salvo una constante (si dos funciones tienen la misma derivada parcial, entonces su diferencia debe ser una constante).

En este orden de ideas, $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ es una diferencial exacta cuando existe una función $F(z)$ en Ω con derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(z)}{\partial x} &= f(z) \\ \frac{\partial F(z)}{\partial y} &= if(z) \end{aligned}$$

Esto es, $F(z)$ satisface la ecuación de Cauchy Riemann

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i \frac{\partial F}{\partial y},$$

puesto que $f(z)$ es continua por hipótesis (de otro modo $\int_{\gamma} f dz$ no podría estar definida) $F(z)$ es analítica con derivada $f(z)$. Con todo esto se ha probado:

TEOREMA 1.4.4. La integral $\int_{\gamma} f dz$, con f continua, depende sólo de los puntos extremos de γ si y sólo si f es la derivada de una función analítica en Ω .

El resultado anterior expresa que si la función f admite *antiderivada o primitiva* en Ω , es decir, si existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$, entonces la integral sobre curvas γ , contenidas en Ω , que une los puntos z_1 y z_2 no depende del contorno γ ; en particular se tiene:

- $\int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1$.
- $\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \frac{1}{n+1} \{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}\}$, donde $n \neq -1$.

Para finalizar este capítulo, se enuncia y demuestra el célebre teorema de Cauchy-Goursat para triángulos.

TEOREMA 1.4.5. (Cauchy-Goursat) Si $f \in H(\Omega)$, siendo Ω un abierto de \mathbb{C} , entonces para todo triángulo $T \subset \Omega$ se verifica

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

donde ∂T es la frontera de T .

DEMOSTRACIÓN. Dado el triángulo T , se considera una partición del mismo en cuatro triángulos $T_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ contruidos trazando los segmentos que unen los puntos medios de cada lado de T . Se considera ahora la frontera de T , ∂T , con una orientación determinada, y se denotará por $L(\partial T)$ su longitud. Se tendrán en cuenta dos hechos elementales:

- $L(\partial T_i) = \frac{1}{2} L(\partial T)$ para cada i . (1.9)

- $\max_{z, w \in T} |z - w| \leq L(\partial T)$, para cualquier triángulo T . (1.10)

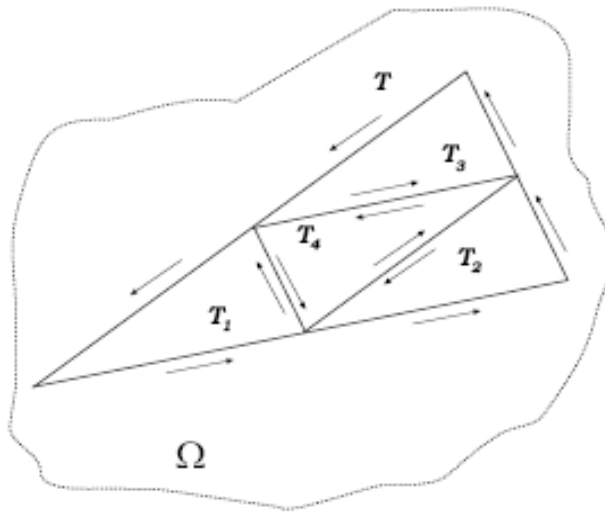


Figura 1.3: Partición de T en T_1, T_2, T_3 y T_4

Considerando para cada triángulo T_i de la partición la misma orientación que tiene T (Ver la Figura 1.3) y, atendiendo a la propiedad aditiva de la integral, se verifica

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T_i} f(z)dz,$$

dado que todos los lados de los triángulos T_i interiores de T son recorridos dos veces, una vez en sentido contrario a la otra. Para simplificar la notación se escribirá $I(T) = \int_{\partial T} f(z)dz$, y lo mismo para las integrales de f sobre la frontera de cualquier otro triángulo. Ahora se escoge de entre los cuatro triángulos T_i aquel triángulo, que se denotará T^1 , que verifica

$$|I(T_i)| \leq |I(T^1)|,$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces por dicha selección, es claro que

$$|I(T)| \leq \sum_{i=1}^4 |I(T_i)| \leq 4 |I(T^1)|.$$

Partiendo de T^1 se repite el proceso y se construye T^2 ; y así sucesivamente. Se consigue de esta manera una sucesión de triángulos $T^1, T^2, \dots, T^n, \dots$ encajados, esto es $T^{n+1} \subset T^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $L(\partial T^n) = \frac{1}{2^n} L(\partial T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; y
 - $|I(T)| \leq 4^n |I(T^n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (1.11)

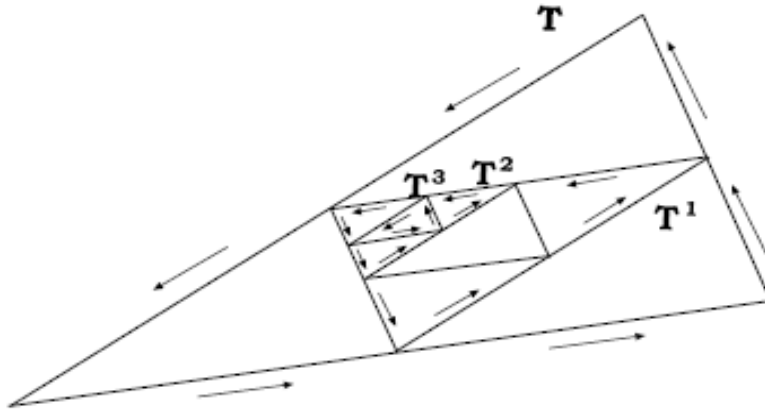


Figura 1.4: Sucesión de triángulos $T^1, T^2, \dots, T^n, \dots$ encajados.

Por la propia construcción de la sucesión de los triángulos $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la sucesión de sus diámetros tiende a cero, además, aplicando el principio de los intervalos encajados, se verifica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n = \{z_0\}$. Como $f \in H(\Omega)$, existe $f'(z_0)$ y, por lo tanto, la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es continua en Ω y permite escribir

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0), \quad \forall z \in \Omega.$$

Integrando sobre ∂T^n miembro a miembro en esta última igualdad se obtiene

$$I(T^n) = \int_{\partial T^n} f(z_0) dz + \int_{\partial T^n} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\partial T^n} g(z)(z - z_0) dz = \int_{\partial T^n} g(z)(z - z_0) dz,$$

ya que las funciones $f(z_0)$ y $f'(z_0)(z - z_0)$ admiten primitiva en todo \square , por lo que su integral a lo largo de cualquier contorno cerrado es nula.

Por tanto, teniendo en cuenta (1.11), la propiedad de acotación de la integral, (1.10) y (1.9), se tiene que, para todo n ,

$$\begin{aligned} |I(T)| &\leq 4^n |I(T^n)| = 4^n \left| \int_{\partial T^n} g(z)(z - z_0) dz \right| \leq 4^n \max_{z \in \partial T^n} |g(z)(z - z_0)| L(\partial T^n) \\ &\leq 4^n \max_{z \in \partial T^n} |g(z)| L(\partial T^n)^2 \leq 4^n \max_{z \in \partial T^n} |g(z)| \left(\frac{L(\partial T)}{2^n} \right)^2 = L(\partial T)^2 \max_{z \in \partial T^n} |g(z)|. \end{aligned}$$

Por último, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, teniendo en cuenta la continuidad de g en z_0 , existe un $\delta > 0$ verificando que $g(D(z_0, \delta)) \subset D(0, \varepsilon)$. Por otra parte, como el diámetro de los triángulos T^n tiende a 0 y $z_0 \in T^n$ para cualquier n , existe un n_0 de tal manera que $T^n \in D(z_0, \delta)$ para todo $n \geq n_0$. En consecuencia,

$$|g(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in T^n \text{ y } \forall n \geq n_0$$

luego, $|I(T)| < \varepsilon L(\partial T)^2$ para todo $\varepsilon > 0$ y por tanto,

$$I(T) = \int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Esto finaliza la prueba. ■

CAPÍTULO II

TRANSFORMADAS DE FOURIER

En este capítulo, se introduce la definición de la transformada de Fourier de una función f y la transformada inversa de Fourier; se mostrarán algunas propiedades y se darán ejemplos y algunas aplicaciones. Además de definir el operador transformada discreta de Fourier, se estudiará su evaluación numérica y el concepto de transformada rápida de Fourier; se discutirá su estabilidad y finalmente se darán unos ejemplos.

2.1. Transformada Continua De Fourier

En esta sección, se analizan las propiedades de la transformada continua de Fourier. Sea T el intervalo: $T = (-\pi, \pi]$ y $L^1(T)$ el espacio de las funciones medibles (Ver Royden, 1968, pág. 66 para la definición y propiedades de las funciones medibles) f sobre T tales que

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \infty .$$

Los *coeficientes de Fourier* de una función $f \in L^1(T)$ se definen mediante la fórmula:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Así, se asocia a cada $f \in L^1(T)$ una función \hat{f} en \mathbb{Z} . La *serie de Fourier* de f es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} ,$$

y sus sumas parciales son

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Más generalmente, si l es un número real positivo, $T_l = (-l, l]$ y $f \in L^1(T_l)$ es una función periódica de periodo $2l$, entonces su *serie de Fourier en forma compleja* se define por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-\pi i n t / l} dt \right) e^{\pi i n t / l}. \quad (2.1)$$

Luego, al tomar $\xi_n = n/2l$ y

$$h(\xi) = \int_{-l}^l f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

entonces, la sumatoria (2.1) se puede escribir en la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) h(\xi_n) e^{2\pi i \xi_n t},$$

que tiene el aspecto de una suma de Riemann. Así, bajo ciertas condiciones en el límite (ver Rudin, 1966, pág. 124) se tendrá la igualdad formal, es decir

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \right] e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.1.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, se define su *transformada de Fourier* como:

$$F(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt. \quad (2.2)$$

Y su transformada inversa como:

$$\hat{f}^{-1}(t) = [F(t)]^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Como ocurre con las series de Fourier en el caso de funciones periódicas, la transformada de Fourier realiza una descomposición o *análisis* de f en componentes; ahora en lugar de presentar sólo frecuencias discretas formando una sucesión, aparece

un rango continuo de frecuencias (todo ω). A cada frecuencia ξ le corresponde un coeficiente $\hat{f}(\xi)$, que será, en general, un número complejo, su módulo es la *amplitud*, y su argumento es la *fase*. La reconstrucción de f a partir de \hat{f} es conocido como la *síntesis*.

A continuación se muestra un teorema donde se verifican una serie de propiedades de la transformada de Fourier.

TEOREMA 2.1.2. La transformada definida por (2.2) es una función que cumple con las siguientes propiedades:

a. Linealidad: $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$

b. Escalado: $[f(c\omega)]^\wedge = \frac{1}{c} F\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad c > 0$

c. Desplazamiento en tiempo: $\hat{f}(\omega - t_0) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$

d. Desplazamiento en frecuencia: $[e^{i\omega_0 t} f(t)]^\wedge = F(\omega - \omega_0)$

e. Simetría: $[F(\omega)]^\mathfrak{F} = 2\pi f(-t)$

f. Modulación: $[f(t) \cos(\omega_0 t)]^\mathfrak{F} = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$

$[f(t) \sin(\omega_0 t)]^\mathfrak{F} = \frac{i}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$

DEMOSTRACIÓN. a. Linealidad: $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)^\wedge(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t) e^{-i\omega t} + \beta g(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega)
\end{aligned}$$

b. Escalado: $[f(ct)]^\wedge = \frac{1}{c} F\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad c \neq 0$

$$[f(c\omega)]^\wedge = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct) e^{-i\omega t} dt,$$

$ \begin{aligned} z &= ct, dz = c dt \\ t &= \frac{z}{c}, c > 0 \end{aligned} $

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega \frac{z}{c}} \frac{dz}{c} \\
&= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega \frac{z}{c}} dz \\
&= \frac{1}{c} F\left(\frac{\omega}{c}\right)
\end{aligned}$$

c. Desplazamiento en tiempo: $\hat{f}(\omega - t_0) = e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i\omega t} dt, & \boxed{\begin{array}{l} u = t - t_0, \quad du = dt \\ t = u + t_0 \end{array}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega(u+t_0)} du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} e^{-i\omega t_0} du \\
&= e^{-i\omega t_0} \hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

d. Desplazamiento en frecuencia: $\left[e^{i\omega_0 t} f(t) \right]^\wedge = F(\omega - \omega_0)$

$$\begin{aligned}
\left[e^{i\omega_0 t} f(t) \right]^\wedge &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\
&= F(\omega - \omega_0)
\end{aligned}$$

e. Simetría: $[F(\omega)]^\$ = 2\pi f(-t)$

$$\begin{aligned}
f(t) &= \hat{f}^{-1} \left[\hat{f}(\omega) \right] = \hat{f}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
\Rightarrow f(-t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \Rightarrow 2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
\Rightarrow [F(\omega)]^\$ &= 2\pi f(-t)
\end{aligned}$$

f. Modulación: $[f(t) \cos(\omega_0 t)]^\$ = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$

$$\begin{aligned}
[f(\omega) \cos(\omega_0 \omega)]^{\mathcal{F}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \quad \boxed{\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]
\end{aligned}$$

$$[f(\omega) \sin(\omega_0 \omega)]^{\mathcal{F}} = \frac{i}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

$$\begin{aligned}
[f(\omega) \sin(\omega_0 \omega)]^{\mathcal{F}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \quad \boxed{\sin(\omega_0 t) = \frac{-i}{2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})} \\
&= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{i}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]
\end{aligned}$$

La prueba del teorema está completa. ■

Para las próximas propiedades de la transformada de Fourier, es necesaria la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1.3. Sean f y g dos funciones, tales que sus transformadas de Fourier existen, entonces la *convolución* de f y g , denotada por $f * g$, se define como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x - u) du.$$

Entonces se tiene las siguientes propiedades:

TEOREMA 2.1.4. Con las notaciones anteriores se cumple:

g. Convolución en tiempo: $[f * g]^{\$} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

h. Convolución en frecuencia: $[f \cdot g]^{\$} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, la convolución en tiempo sigue de las identidades

$$\begin{aligned}
 [f * g]^{\$} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(u-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(u-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} g(x) f(u-x) dx du \quad \boxed{\begin{array}{l} u = t + x, \quad du = dt \\ t = u - x \end{array}} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x)} g(x) f(t) dx dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} g(x) dx \\
 &= \hat{f} \cdot \hat{g}.
 \end{aligned}$$

La convolución en frecuencia:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) \hat{f}(t-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i u s} ds \int_{-\infty}^{\infty} g(w) e^{-i(t-u)w} dw \frac{1}{2\pi} du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(w) e^{-i\{us+tw-uw\}} dudwds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(w) e^{-i w (s-w) u} du \frac{1}{2\pi} dw ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(w) e^{-i w (s-w) u} (2\pi \delta_D(s-w)) dw ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(w) e^{-i w (s-w) u} \delta_D(s-w) dw ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(s) e^{-i w (s-s) u} \delta_D(s-s) ds = [f \cdot g]
\end{aligned}$$

COMENTARIO 2.1.5. El símbolo $\delta_D(\xi)$ se utiliza para denotar el delta de Dirac. Ésta es una "función generalizada" (ver Gelfand, 1964, pág. 103 para la definición y las propiedades de funciones generalizadas) que viene definida por la siguiente fórmula integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_D(x-a) f(x) dx = f(a),$$

con $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_D(x) dx = 1$. La delta de Dirac no es una función estrictamente hablando,

puesto que se puede ver que requeriría tomar valores infinitos. Asimismo, $\frac{d}{dx}(\delta_D(x))$

denota la primera derivada del delta de Dirac en el sentido de una distribución.

A continuación se presentan unos ejemplos ilustrativos que muestran la relación que existe entre algunas funciones y su transformada de Fourier.

EJEMPLO 2.1.6. Sea f la función característica del intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, es decir, $f(x) = 1$ si $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, y $f(x) = 0$ en otro caso; entonces,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2}{\xi} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\xi}\right).$$

La relación entre f y $\hat{f}(\xi)$ podemos apreciarla en la figura 2.1.



Figura 2.1: Gráficas de las funciones del Ejemplo 2.1.6.

EJEMPLO 2.1.7. Sea $f(x) = e^{-2\pi|x|}$; entonces,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{4\pi}{4\pi^2 + \xi^2}$$

El comportamiento de f y $\hat{f}(\xi)$ puede ser apreciado en la figura 2.2.

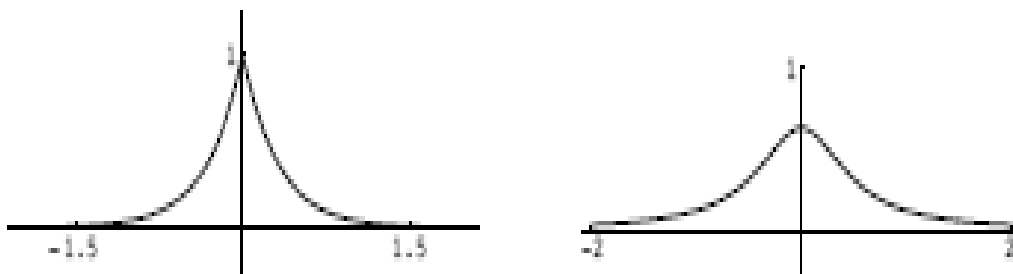


Figura 2.2: Gráficas de las funciones del Ejemplo 2.1.7.

En la tabla dada a continuación se muestran algunas funciones y sus respectivas transformadas de Fourier

Tabla 2.1: Ejemplos de funciones y sus respectivas transformadas de Fourier.

$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
a (constante)	$2a\pi\delta_D(\xi)$
x	$2i\pi\frac{d}{d\xi}(\delta_D(\xi))$
$\cos(x)$	$\pi[\delta_D(\xi-1) + \delta_D(\xi+1)]$
$\sin(x)$	$\pi i[-\delta_D(\xi-1) + \delta_D(\xi+1)]$
$\cos(ax)$	$\pi[\delta_D(\xi-a) + \delta_D(\xi+a)]$
$\sin(ax)$	$\pi i[-\delta_D(\xi-a) + \delta_D(\xi+a)]$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$
e^{x-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(\xi+i)^2}$
$xe^{- x }$	$\frac{-4i\xi}{(1+\xi^2)^2}$
xe^{-x^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}i\xi e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$
$(4x^2 - 2)e^{-x^2}$	$-\sqrt{\pi}\xi^2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2}$

2.2. Aplicaciones De La Transformada De Fourier

Con la finalidad de motivar el desarrollo e implementación de métodos numéricos para aproximar la transformada de Fourier, en esta sección se dan tres ejemplos que ilustran cómo se puede aplicar la transformada de Fourier para resolver problemas de diferentes áreas de la ciencia.

2.2.1. Temperatura De La Tierra

Un problema interesante es el de calcular la temperatura de la tierra a una profundidad x a partir de la temperatura de la superficie. Descríbase la temperatura de la superficie terrestre como una función periódica en el tiempo t y de período 1 (año). La temperatura $u(t, x)$, con tiempo $t \geq 0$ y profundidad $x \geq 0$ es también periódica en t y es natural asumir que $u(t, x)$ es acotada. Bajo estas circunstancias $u(t, x)$ puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada $0 \leq x < \infty$ fijo como sigue:

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) e^{2\pi i n t},$$

Con coeficientes de Fourier dados por

$$c_n(x) = \int_0^1 u(t, x) e^{-2\pi i n t} dt.$$

Se sabe que la función u satisface la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right).$$

Por lo tanto, los coeficientes c_n satisfacen la ecuación diferencial

$$c_n'' = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{-2\pi i n t} dt = 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) e^{-2\pi i n t} dt = 4\pi i n c_n;$$

o, equivalentemente,

$$c_n'' = \left[(2\pi |n|)^{1/2} (1 \pm i) \right]^2 c_n,$$

donde se toma el signo positivo o negativo de acuerdo a si $n > 0$ ó $n < 0$.

Por otra parte es sabido que

$$c_n(0) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \hat{f}(n),$$

luego, resolviendo la ecuación, se obtiene que, tomando en cuenta que c_n es acotado:

$$c_n(x) = \hat{f}(n) \exp\left[-(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)x\right],$$

y por lo tanto resulta finalmente

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp\left[-(2\pi|n|)^{1/2}x\right] \exp\left[2\pi i n t \mp (2\pi|n|)^{1/2}ix\right].$$

Supóngase ahora, por ejemplo, que la temperatura de la superficie viene dada por una función sinusoidal simple $f(t) = \sin(2\pi t)$ (lo cual significa que la temperatura anual media $\hat{f}(0) = \int_0^1 f$ es cero). En este caso, la función u vendrá dada

por:

$$u(t, x) = \exp(-\sqrt{2\pi}x) \sin(2\pi t - \sqrt{2\pi}x).$$

Esta fórmula indica que la temperatura a la profundidad $x = \sqrt{\pi/2}$ queda afectada por el factor $e^{-\pi}$ y está en oposición de fase con respecto a las estaciones en la superficie, como lo indica la figura 2.3.

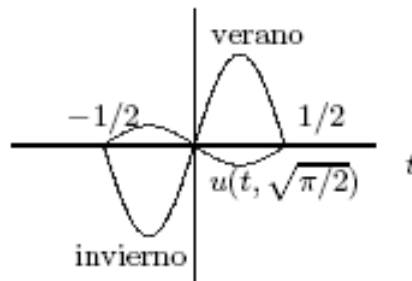


Figura 2.3: Gráfica de la función $u(t, x)$ para $x = \sqrt{\pi/2}$.

2.2.2. Solución De Ecuaciones Diferenciales

Tal vez una de las propiedades más importantes de las integrales de Fourier es que transforma operadores diferenciales con coeficientes constantes en operadores polinomiales de acuerdo con la fórmula $\hat{f}' = 2\pi i \gamma \hat{f}$.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo resolver la ecuación diferencial

$$u'' - u = -f,$$

en la cual f es una función conocida y debemos encontrar u en $L^1(\square)$. Aplicando el operador $\hat{\cdot}$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene que $(4\pi^2\gamma^2 + 1)\hat{u} = \hat{f}$, o equivalentemente

$$\hat{u} = (4\pi^2\gamma^2 + 1)^{-1} \hat{f}$$

Pero $(1 + 4\pi^2\gamma^2)^{-1}$ es la transformada de Fourier de la función $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ y por consiguiente se tiene que

$$\begin{aligned} u &= \left[(4\pi^2\gamma^2 + 1)^{-1} \hat{f} \right]^\vee = \left[(4\pi^2\gamma^2 + 1)^{-1} \right]^\vee * (\hat{f})^\vee = \frac{1}{2}e^{-|x|} * f \\ &= \frac{1}{2} \int_{\square} e^{-|x-y|} f(y) dy. \end{aligned}$$

2.2.3. Flujo Del Calor

El problema del flujo del calor se describe mediante la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \square$$

con la condición de borde $\lim_{t \rightarrow 0} u = f$. La solución de este problema es similar a la solución del problema anterior. Primero se aplica la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación y se tiene:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -2\pi^2\gamma^2 \hat{u},$$

Luego se calcula \hat{u} :

$$\hat{u} = \hat{f} \exp(-2\pi^2 \gamma^2 t),$$

Finalmente, al aplicar la transformada inversa se obtiene

$$u(t, x) = \left[\exp(-2\pi^2 \gamma^2 t) \hat{f} \right]^\vee = \frac{\exp(-x^2/2t)}{(2\pi t)^{1/2}} * f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2t}\right]}{(2\pi t)^{1/2}} f(y) dy,$$

donde la expresión $\frac{\exp(-x^2/2t)}{(2\pi t)^{1/2}}$ es conocida como el *núcleo de Gauss*.

2.3. Espacio De Las Sucesiones Bilaterales Infinitas

Dado n un entero positivo, se denotará por Π_n el espacio de todas las sucesiones infinitas bilaterales

$$x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}, \quad x_k \in \square,$$

que son periódicas con período n , es decir, tales que para todo $k \in \square$

$$x_{k+n} = x_k.$$

Una sucesión $x \in \Pi_n$ está completamente determinada por los elementos de un segmento periódico, que se denotará por x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Si se desea mostrar los elementos de x de manera explícita, se escribirá

$$x := \|\!| x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \!\!\|,$$

donde el símbolo $\|\!| \cdot \!\!\|$ indica repetición periódica.

Se define la adición de dos sucesiones $x = \{x_k\}$ y $y = \{y_k\}$ en Π_n por

$$(x + y)_k := x_k + y_k, \tag{2.3}$$

y la multiplicación por un escalar $c \in \square$ por

$$(cx)_k := cx_k. \tag{2.4}$$

Entonces se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 2.3.1. El espacio Π_n dotado con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar antes mencionadas es un espacio lineal.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que Π_n es un espacio lineal sólo basta verificar que, dados $x, y \in \Pi_n$, y un escalar $c \in \mathbb{R}$, entonces $cx + y \in \Pi_n$.

Sean $x, y \in \Pi_n$, entonces $x := \|\|: x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \|\|$ y $y := \|\|: y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \|\|$, sea también $c \in \mathbb{R}$, se forma ahora la combinación $cx + y$:

$$\begin{aligned} cx + y &= c \|\|: x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \|\| + \|\|: y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \|\| \\ &= \|\|: cx_0, cx_1, \dots, cx_{n-1} \|\| + \|\|: y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \|\| \quad (\text{por 2.3}) \\ &= \|\|: cx_0 + y_0, cx_1 + y_1, \dots, cx_{n-1} + y_{n-1} \|\| \quad (\text{por 2.4}). \end{aligned}$$

Esta representación explícita muestra que $cx + y$ es una sucesión infinita bilateral que cumple con la condición $cx_{k+n} + y_{k+n} = cx_k + y_k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, es decir, es periódica con período n , por tanto $cx + y \in \Pi_n$. ■

Ahora se hallará una base para el espacio Π_n y se establecerá su dimensión. Cualquier sucesión $x \in \Pi_n$ puede ser expresada como una combinación lineal de las n sucesiones

$$e^{(m)} = \{e_k^{(m)}\}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

donde,

$$e_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & k \equiv m \pmod{n} \\ 0, & k \not\equiv m \pmod{n} \end{cases}$$

y $m \pmod n$ indica el resto de dividir k entre n . Claramente, las sucesiones $e^{(m)}$ son linealmente independientes, y por tal motivo Π_n es un espacio vectorial de dimensión n .

Seguidamente, se dotará al espacio Π_n de una norma. Con este fin, para cada elemento $x = \{x_k\} \in \Pi_n$ se define la relación

$$\|x\| := \left(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades:

[N1] $\|x\| \geq 0$, ya que $|x_k| \geq 0$, para todo k y $(y)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, para todo $y \geq 0$, además,

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \left(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i|^2 = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow x_i = 0, \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

[N2] Si $x \in \Pi_n$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|cx\| &= \left\| \{cx_0, cx_1, \dots, cx_{n-1}\} \right\| \\ &= \left(|cx_0|^2 + |cx_1|^2 + \cdots + |cx_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|c|^2 |x_0|^2 + |c|^2 |x_1|^2 + \cdots + |c|^2 |x_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(|c|^2 \left[|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|c|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |c| \|x\| \end{aligned}$$

[N3] Para cada $x, y \in \Pi_n$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &= \left(|x_0 + y_0|^2 + |x_1 + y_1|^2 + \cdots + |x_{n-1} + y_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(|x_0|^2 + |y_0|^2 + |x_1|^2 + |y_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 + |y_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 + |y_0|^2 + |y_1|^2 + \cdots + |y_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(|y_0|^2 + |y_1|^2 + \cdots + |y_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Así $(\Pi_n, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión finita.

Ahora se probará que este espacio es completo y por tanto es un espacio de Banach. Con este fin, sea $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\Pi_n, \|\cdot\|)$, esto quiere decir:

1. $y_m \in \Pi_n = \{x_n^{(m)}\}_{n \in \mathbb{N}} = \|\cdot\|: x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \dots, x_{n-1}^{(m)} \|\cdot\|$.
2. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $l, m \geq n_0$ entonces $\|y_m - y_l\|^2 < \varepsilon^2$.

Pero,

$$y_m - y_l = \|\cdot\|: (x_0^{(m)} - x_0^{(l)}), (x_1^{(m)} - x_1^{(l)}), \dots, (x_{n-1}^{(m)} - x_{n-1}^{(l)}) \|\cdot\|,$$

de donde, se tiene que

$$\|y_m - y_l\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k^{(m)} - x_k^{(l)}|^2 < \varepsilon^2,$$

esto implica que para cada $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, fijo, se obtiene

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(l)}| < \varepsilon, \text{ siempre que } l, m \geq n_0.$$

La sucesión de números complejos $\{x_k^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{C} , el cual es completo. Por la completitud de \mathbb{C} , existe $x_k \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_k^{(m)} = x_k,$$

o equivalentemente,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_k^{(m)} - x_k| = 0$$

y ésta es una convergencia en \square para cada k fijo, luego

$$x_0^{(m)} \rightarrow x_0, \quad x_1^{(m)} \rightarrow x_1, \quad \dots, \quad x_{n-1}^{(m)} \rightarrow x_{n-1}, \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty.$$

Considérese (por construcción) $y = \|\cdot\|: x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \|\in \Pi_n$. Se probará que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |y^{(m)} - y| = 0,$$

teniendo en cuenta que

$$\|y_m - y\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k^{(m)} - x_k|^2,$$

para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ fijo.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, la relación

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_k^{(m)} - x_k| = 0$$

significa que existe $m_k \in \square$ tal que

$$m \geq m_k \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}.$$

Por tanto, al hacer $M = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{m_k\}$ y al suponer $m \geq M$, se concluye

$$\|y_m - y\|^2 < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2.$$

La prueba de la afirmación está completa. ■

A continuación se mostrará que Π_n es isomorfo a \square^n . Para esto se probará que el operador $T: \Pi_n \rightarrow \square^n$, tal que

$$x = \|\cdot\|: x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \|\mapsto T(x) = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

es un isomorfismo.

En efecto, sean $T(x), T(y) \in \square^n$ tales que $T(x) = T(y)$, entonces por la definición del operador T , se tiene

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$$

lo cual implica que $x_0 = y_0, x_1 = y_1, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}$, donde $x_j, y_j \in \square$, $j = 0, 1, \dots, n-1$; luego, si se consideran estos x_j y y_j y se forman las sucesiones infinitas bilaterales x, y dadas por $x = \|\|: x_0, x_1, \dots, x_{n-1} : \|\|$, $y = \|\|: y_0, y_1, \dots, y_{n-1} : \|\| \in \Pi_n$ se tiene que $x = y$. Por tanto T es inyectivo.

Para establecer la sobreyectividad, se selecciona $\tilde{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \square^n$, arbitrario, es claro que $y_k \in \square$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, luego si se construye con estos y_k la sucesión infinita bilateral dada por $y = \|\|: y_0, y_1, \dots, y_{n-1} : \|\| \in \Pi_n$ se tiene que $\tilde{y} = T(y)$, por tanto T es también sobreyectivo, y así es T biyectivo.

Finalmente, se tiene la relación

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(\|\|: x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_{n-1} + y_{n-1} : \|\|) \\ &= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_{n-1} + y_{n-1}) \\ &= (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Por tanto T es un isomorfismo; es decir, Π_n es un espacio isomorfo a \square^n . En resumen, en esta sección se ha establecido el siguiente resultado:

TEOREMA 2.3.2. El espacio de sucesiones $(\Pi_n, \|\|\|)$, con la norma definida en (2.5), es un espacio de Banach isomorfo a \square^n (por tanto de dimensión finita n).

2.4. Transformada Discreta De Fourier

En esta sección, se establece la existencia de la transformada discreta de Fourier y se mostrará la relación que existe entre ésta y la transformada continua de Fourier estudiada en la primera sección de este capítulo. Con este fin, se define, para cada sucesión $x = \{x_k\} \in \Pi_n$, *el operador reversión* R , mediante la expresión

$$Rx := \{x_{-k}\};$$

entonces, claramente R es un operador lineal que aplica biyectivamente Π_n en Π_n y que satisface la relación $\|Rx\| = \|x\|$ para todo $x = \{x_k\} \in \Pi_n$; es decir, el operador R es una isometría. (ver Vera – Ezquerro, 1997, pág 135 para más propiedades de los operadores isométricos).

De manera similar, *el operador desplazamiento* D (a la izquierda), se define por

$$Dx := \{x_{k+1}\} = \|\cdot\|: x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0 \cdot\|,$$

donde $x = \{x_k\} \in \Pi_n$. Esto es, D desplaza la sucesión x un paso a la izquierda. Entonces, se puede ver que, al igual que el operador reversión, D es un operador lineal que aplica biyectivamente Π_n en Π_n y que satisface la relación $\|Dx\| = \|x\|$ para todo $x = \{x_k\} \in \Pi_n$. Además, usando el operador desplazamiento, cualquier sucesión $x = \{x_k\} \in \Pi_n$ puede ser representada en términos de la sucesión unidad

$$e := e^{(0)} = \|\cdot\|: 1, 0, \dots, 0 \cdot\|.$$

Así se tiene, por ejemplo,

$$\|\cdot\|: 0, 1, 0, \dots, 0 \cdot\| = D^{-1}e,$$

y por tanto

$$x = x_0e + x_1D^{-1}e + \dots + x_{n-1}D^{-n+1}e. \quad (2.6)$$

Ahora, se probará la existencia de un operador lineal \hat{f} de Π_n en Π_n que satisface las tres siguientes propiedades:

(F1) Para todo $x \in \Pi_n$

$$\|\hat{f}x\| = \|x\|.$$

(F2) Para $x \in \Pi_n$, si $\hat{f}x = y = \{y_k\}$ y si D denota el operador desplazamiento, entonces

$$\hat{f}Dx = \{w^k y_k\}, \quad (2.7)$$

para alguna constante w compleja.

De aquí se observa que la sucesión $\hat{f}Dx$ también pertenece a Π_n , y por tal motivo, ésta debe ser periódica con período n , y así, debe cumplirse que $w^{k+n} y_k = w^k y_k$ para todo $k \in \mathbf{Z}$. De esta relación se sigue que w es una raíz n -ésima de la unidad y por tanto, se exige que (2.7) se cumpla para:

$$w := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right).$$

(F3) Si e denota la sucesión unitaria, se exige que:

$$(\hat{f}e)_k \geq 0,$$

para todo $k \in \mathbf{Z}$, donde $(\hat{f}e)_k$ denota el k -ésimo elemento de la sucesión $(\hat{f}e)$.

En efecto, sea \hat{f} un operador con las propiedades requeridas, y

$$\hat{f}e = \{f_k\},$$

donde todos los $f_k \geq 0$. Si $x = \{x_k\} \in \Pi_n$, entonces, de la relación (2.6) es posible escribir

$$\begin{aligned}\hat{f}x &= \hat{f}(x_0e + x_1D^{-1}e + \cdots + x_{n-1}D^{-n+1}e) \\ &= x_0\hat{f}e + x_1\hat{f}D^{-1}e + \cdots + x_{n-1}\hat{f}D^{-n+1}e\end{aligned}$$

Usando (F2), se tiene que $\hat{f}x = \{y_k\}$, donde

$$y_k = (x_0 + w^{-k}x_1 + \cdots + w^{-(n-1)k}x_{n-1})f_k.$$

La propiedad (F1) ahora requiere

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |y_k|^2,$$

donde, al usar (F3), se obtiene

$$|y_k|^2 = y_k \bar{y}_k = \sum_{i,j=0}^{n-1} x_i \bar{x}_j w^{-k(i-j)} f_k^2.$$

Así se tendrá

$$\|y\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} f_k^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} x_i \bar{x}_j w^{-k(i-j)} = \sum_{i,j=0}^{n-1} x_i \bar{x}_j \sum_{k=0}^{n-1} w^{-k(i-j)} f_k^2.$$

Esto es igual a $\|x\|^2$ para todo $x = \{x_k\} \in \Pi_n$ si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^{-k(i-j)} f_k^2 = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Estas relaciones pueden ser vistas como un sistema lineal de ecuaciones para las n cantidades $f_0^2, f_1^2, \dots, f_{n-1}^2$. El sistema se debe satisfacer para todo $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por tanto, el sistema tiene la solución única

$$f_k^2 = \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

y así se obtiene

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

En conclusión, si el operador \hat{f} satisface las propiedades (F1), (F2) y (F3), entonces éste está únicamente determinado y dado por $\hat{f}x = y$ donde, para todo k ,

$$y_k = (\hat{f}x)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j w^{-jk}, \quad (2.8)$$

donde

$$w := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right). \quad (2.9)$$

Recíprocamente, es fácil verificar que el operador definido por (2.8) cumple las propiedades (F1), (F2) y (F3). Este operador es llamado el **Operador Discreto de Fourier** de orden n . Éste será denotado por \hat{f}_n si es necesario indicar su dependencia de n , del mismo modo, la raíz de la unidad definida en (2.9) será en ocasiones denotada por w_n .

La propiedad (F1) expresa el hecho de que el operador \hat{f} es isométrico. Es conocido (ver Vera – Ezquerro, 1997, pág 135) del álgebra lineal que para cualquier operador de un espacio normado lineal finito en sí mismo que cumpla (F1), el operador inverso existe y es igual al operador adjunto, el cual en el caso de \hat{f} está dado por

$$\left(\overline{\hat{f}y}\right)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_j w^{jk}. \quad (2.10)$$

Usando esta notación se tiene

$$\hat{f}^{-1} = \overline{\hat{f}}.$$

En relaciones como (2.8) y (2.10) la sumatoria con respecto a j puede ser extendida sobre cualquier conjunto de n enteros j que sean distintos módulo n . así se obtiene, por ejemplo,

$$\left(\overline{\hat{f}y}\right)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} y_{-j} w^{-jk}, \text{ para todo } k,$$

lo cual es justamente el resultado de aplicar \hat{f} a la sucesión Ry . Así, también se cumple que

$$\hat{f}^{-1} = \hat{f}R.$$

Multiplicando a la derecha por \hat{f} y a la izquierda por \hat{f}^{-1} , en ambos miembros, se obtiene

$$\hat{f}^{-1} = R\hat{f}.$$

Con todo esto se ha establecido:

TEOREMA 2.4.1. El único operador de Π_n en Π_n que cumple las propiedades (F1), (F2) y (F3) es el operador discreto de Fourier \hat{f} definido por

$$(\hat{f}x)_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j w^{-jk}, \quad (2.11)$$

donde $w := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$. El operador inverso \hat{f}^{-1} satisface

$$\hat{f}^{-1} = \overline{\hat{f}} = \hat{f}R = R\hat{f}.$$

Comentario 2.4.2. El nombre de Fourier en \hat{f} se justifica por las muchas conexiones existentes entre \hat{f} y los operadores del análisis continuo de Fourier, por ejemplo, el hecho de que (2.8) tiene la forma de una discretización de la transformada de Fourier, otra conexión es que el operador inverso definido en (2.10) permite recuperar los valores de una función dados los valores de su transformada, similar al caso de la transformada continua de Fourier. El signo del exponente en w^{-jk} está también justificado por esta analogía. La selección del factor escalar $1/\sqrt{n}$, por otro lado, es menos importante. La selección está dada por el hecho matemático de que con este factor \hat{f} es una isometría estricta. Desde el punto de vista numérico la escogencia del

factor es de gran modo irrelevante, porque en los extensos cálculos lineales que involucra \hat{f} el factor escalar 1 es usualmente escogido y el factor correcto es insertado sólo al final, dependiendo de la aplicación particular que se tenga.

2.5. Evaluación Numérica De La Transformada Discreta De Fourier

Considérese el problema algorítmico de calcular la sucesión $y := \hat{f}_n x$ para un $x \in \Pi_n$ dado. Puesto que y es periódica, es suficiente con calcular los elementos de un período completo de y , cuyos elementos se llamarán y_0, y_1, \dots, y_{n-1} . Para calcular dichos elementos directamente de la fórmula (2.8), asumiendo que las potencias requeridas de $w = w_n$ ya están formadas, entonces para cada y_k con $k = 0, 1, \dots, n-1$, se requieren $n-1$ multiplicaciones complejas y por tanto un total de $n(n-1)$ de operaciones. Las aplicaciones modernas del análisis de Fourier, empleado en el análisis de series temporales, requieren valores tan grandes como $n = 2^{14}$ y por tanto, en estos casos, se necesitan un total de $n(n-1) = 2.68 \times 10^8$ operaciones por lo que el tiempo requerido para formar una transformación de Fourier sencilla se convierte en una aplicación de escala prohibitiva del método del cálculo de \hat{f} .

Un hecho fundamental del análisis práctico de Fourier es que mediante un hábil arreglo de las operaciones aritméticas, el trabajo requerido para formar $\hat{f}_n x$ puede ser reducido drásticamente. Esta reducción puede ser efectuada para todos los valores de n , pero es fácil de implementar si el entero n está altamente compuesto, es decir si puede ser escrito como una potencia de 2. Aquí la base de la reducción es una fórmula que data de la era pre-computadora, pero cuya importancia para aplicaciones de gran escala fue descubierta por primera vez por J. Cooley y J. Tukey (1965). Si

$n = 2^l$, la fórmula de reducción resulta en un algoritmo que permite la evaluación de $\hat{f}_n x$ en sólo $\frac{1}{2}nl = \frac{1}{2}n \log_2 n$ multiplicaciones complejas.

Con el objetivo de explicar el método para reducir el número de operaciones, sea $n = pq$, y para un $x = \{x_k\} \in \Pi_n$ dado, sea

$$x^{(j)} = \{x_k^{(j)}\} = \{x_{j+pk}\}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1;$$

es decir, $x^{(j)}$ es la subsucesión de aquellos elementos de x cuyo índice es equivalente con j modulo p . Evidentemente

$$x^{(j)} \in \Pi_q, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Se asumirá que las p sucesiones

$$y^{(j)} = \{y_m^{(j)}\} := \hat{f}_q x^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1$$

son conocidas. Luego, al tratar de expresar $y = \hat{f}_n x$ en términos de los elementos de las sucesiones $y^{(j)}$, para todo entero m , se tendrá

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{-mk} x_k = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{h=0}^{q-1} w_n^{-m(j+ph)} x_{j+ph},$$

y en vista de que $w_n^p = w_q$, se obtiene

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} w_n^{-mj} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{h=0}^{q-1} w_q^{-mh} x_{j+ph}.$$

Considerando que las cantidades

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{h=0}^{q-1} w_q^{-mh} x_{j+ph} = y_m^{(j)},$$

son conocidas por hipótesis, se obtiene

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} w_n^{-mj} y_m^{(j)}, \quad (2.12)$$

la cual es todavía una representación de la clase deseada. Para construir la sucesión y de subsucesiones $y^{(j)}$ mediante el uso de (2.12) evidentemente se requiere un costo de $(p-1)\mu$ para cada valor de m , donde μ denota la unidad de costo de una multiplicación, lo cual resulta en costo un total de $(p-1)m\mu$.

El número de adiciones es aproximadamente el mismo. Ignorando el producto por $1/\sqrt{p}$, el cual en realidad no necesita ser llevado, ya que esta multiplicación puede ser guardada para $m=0$. Ahora, sea el período n factorizable en los l factores

$$n = n_1 n_2 \cdots n_l. \quad (2.13)$$

No se requiere que los n_i sean primos. La fórmula (2.12) puede ser usada recursivamente para calcular $\hat{f}_n x$; para esto se requieren n_1 transformaciones de período $q = n_2 n_3 \cdots n_l$; para calcular esto, se necesitan $n_1 n_2$ transformaciones de período $q = n_3 \cdots n_l$, y así, hasta obtener las n transformadas $\hat{f}_1 x$, la cual es trivial dado que $\hat{f}_1 x = x$. El número total de multiplicaciones será entonces

$$n(n_1 - 1) + n_1 \frac{n}{n_1} (n_2 - 1) + \cdots + n_1 \cdots n_{l-1} \frac{n}{n_1 \cdots n_{l-1}} (n_l - 1) = n \sum_{i=1}^l (n_i - 1).$$

Por ejemplo, si $n = 2^l$, el número requerido de multiplicaciones será $nl = n \log_2 n$. Así es claro que se ha alcanzado una mejora en el orden de magnitud sobre el método de evaluación en (2.8).

A continuación, se describe una variante de (2.12) que a veces conduce a una economía mayor. Sea $m = k + lq$, donde $k = 0, 1, \dots, q-1$; $l = 0, 1, \dots, p-1$. Se tiene entonces

$$w_n^{-mj} = w_n^{-(k+ql)j} = w_n^{-kj} w_p^{-lj},$$

y como cada subsucesión $y^{(j)}$ tiene período q , se sigue

$$y_{k+lq} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} w_p^{-lj} w_n^{-kj} y_k^{(j)}, \quad k = 0, 1, \dots, q-1 \quad l = 0, 1, \dots, p-1 \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.14) son evaluadas:

a. Formando los $(p-1)q$ productos:

$$z_k^{(j)} = w_n^{-kj} y_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1 \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

b. Formando los $(p-1)^2 q$ productos:

$$w_p^{-lj} z_k^{(j)}, \quad l, j = 1, 2, \dots, p-1 \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

Aquí se ha ignorado nuevamente la trivialidad de las multiplicaciones para $k = 0$. Los pasos de $y^{(j)}$ a $z_k^{(j)}$ requieren ahora un total de $(p-1)q + (p-1)^2 q = pq(p-1)$ multiplicaciones.

Así, en general, no hay ahorro en comparación con los usados en (2.12). No obstante, sí $p = 2^l$, entonces $w_p^l = -1$ y las multiplicaciones de tipo (b) no necesitan ser contadas. Los pasos de $y^{(j)}$ a $z_k^{(j)}$ requieren ahora sólo de $q(p-1)\mu$, y si $n = 2^l$ y (2.14) es usada recursivamente, entonces el número total de μ para evaluar $\hat{f}_n x$ no es mayor de $\frac{1}{2}nl = \frac{1}{2}n \log_2 n$.

Con esto se ha probado el siguiente teorema:

TEOREMA 2.5.1. Si n se factoriza en la forma (2.13), entonces no más de

$n \sum_{i=1}^l (n_i - 1)$ multiplicaciones complejas son requeridas para evaluar $\hat{f}_n x$ para un

$x \in \Pi_n$; en el caso especial $n = 2^l$, el número requerido de multiplicaciones no excede a $\frac{1}{2}nl = \frac{1}{2}n \log_2 n$.

DEFINICIÓN 2.5.2. Cualquier algoritmo que use las fórmulas (2.12) ó (2.14) para la evaluación recursiva de $y := \hat{f}_n x$ es por definición una *transformación rápida de Fourier* (TRF).

2.6 Estabilidad De La Transformada Discreta De Fourier

Ahora se estudiará la estabilidad de la Transformada Discreta de Fourier (T.D.F). Para esto, se consideran dos tipos de estabilidades, a saber, (a) *la estabilidad matemática* (o condición), la cual es la sensibilidad del resultado del algoritmo al cambio en los datos y (b) *la estabilidad numérica*, la cual es la sensibilidad del resultado respecto a errores de redondeo durante la realización del algoritmo. Mientras que la estabilidad matemática es una propiedad sólo de la transformación que aplica los datos en el resultado, la estabilidad numérica puede depender del algoritmo usado para evaluar la transformación y del equipo de computación usado para realizar los cálculos.

A continuación se estudia la estabilidad matemática. Los datos son los elementos x_k de una sucesión $x \in \Pi_n$; el resultado de la aplicación de la T.D.F consiste en los elementos y_k de la sucesión $y := \hat{f}_n x$. Si los datos son cambiados por $\delta x = \{\delta x_k\}$, en vista de la linealidad de \hat{f}_n , el resultado de la aplicación de \hat{f}_n cambia precisamente a:

$$\delta y := \hat{f}_n \delta x$$

Si el tamaño de estos cambios puede ser expresado numéricamente, un cambio puede ser hecho con respecto a la norma, en el cual dichos cambios estén siendo medidos. Una estimación formal se obtiene si usamos la norma Euclidiana, por tanto, por la propiedad (F1) se tiene:

$$\|\delta y\| = \|\delta x\|.$$

Así, en la norma Euclidiana la T.D.F. no amplifica los cambios en los datos. Sin embargo, en algunas aplicaciones son requeridas cotas para los elementos individuales de δy en términos de las cotas de los elementos individuales de δx . Si para todo δx_k se tiene que $|\delta x_k| \leq \varepsilon$, se sigue inmediatamente de (2.7) que el máximo cambio en cualquier δy_k satisface:

$$|\delta y_k| = \left| \hat{f} \delta x \right|_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\delta x_j w^{-jk}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\delta x_j| |w^{-jk}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} .n. \varepsilon = \sqrt{n} \varepsilon,$$

es decir,

$$|\delta y_k| \leq \sqrt{n} \varepsilon.$$

La constante \sqrt{n} , la cual es fácilmente calculable, es llamada *número de condición* para la T.D.F.

Para estudiar la estabilidad numérica de la T.D.F. considérese el siguiente algoritmo que calcule la transformada, una variante de una Transformada Rápida de Fourier (T.R.F.) para $n = 2^l$, donde l arreglos $x^{(m)}$ de longitud n son generados sucesivamente por fórmulas del tipo:

$$x_k^{m+1} = x_{k'}^m + w x_{k''}^m,$$

donde k' y k'' son índices apropiados y $|w| = 1$, y finalmente al calcular

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} x_k^{(l)}$$

usando $x^{(m)}$ como un símbolo genérico para un elemento en el m -ésimo nivel de cálculo, y denotando por w cualquier número complejo de módulo 1, el algoritmo se describe por el conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &:= x; \\ x^{(m)} &:= w x^{(m-1)} + x^{(m-1)} \quad m = 2, \dots, l \\ y &:= \frac{1}{\sqrt{n}} x^{(l)}. \end{aligned}$$

Estas fórmulas raramente son ejecutadas exactamente por cualquier computador digital. Como es bien sabido cualquier máquina M puede presentar sólo un cierto conjunto discreto C_M de números complejos. Así, en la computación de máquina, dado un $x \in C$ éste generalmente será reemplazado por un número $x^\Delta \in C_M$. Bajo ciertas suposiciones razonables, la precisión de este reemplazamiento puede ser caracterizada por un número real $\eta > 0$, llamado *constante de precisión* de M , la cual posee la propiedad de que para todo $x \in C$

$$x^\Delta = x(1+u), \quad u \in C, \quad |u| \leq \eta.$$

Idealmente, si la parte real e imaginaria de x son representadas con números flotantes de N – dígitos en la base β , η podría ser tan pequeño como $2^{-\frac{1}{2}}\beta^{-N+1}$.

No obstante, si $x, y \in C_M$, los números $x+y$ y xy en general no están en C_M . En su lugar la máquina devuelve los números $(x+y)^\Delta$ y $(xy)^\Delta$ en C_M , los cuales satisfacen:

$$(x+y)^\Delta = (x+y)(1+u); \quad (xy)^\Delta = (xy)(1+u)$$

donde nuevamente $u \in C$, $|u| \leq \eta$. Así, se puede escribir

$$(x+y)^\Delta = x+y+|x+y|u; \quad (xy)^\Delta = xy+|xy|u.$$

En el análisis de tales expresiones frecuentemente es necesario reemplazar $|x+y|$ y $|xy|$ por expresiones conocidas a priori.

Observaciones similares se cumplen para la evaluación de funciones elementales f . En lugar de $f(x)$, el cual para cada $x \in C_M$ en general no está en C_M , la máquina retorna el valor $f^\Delta(x) \in C_M$ que satisface:

$$f^\Delta(x) = f(x)(1+u), \quad u \in C, \quad |u| \leq \eta.$$

Así, por ejemplo, en una T.D.F., la raíz w de la unidad es reemplazada por un número $w^\Delta \in C_M$ tal que:

$$w^\Delta = w + u, \quad u \in C, \quad |u| \leq \eta.$$

Si muchas operaciones aritméticas y evaluaciones de funciones son realizadas secuencialmente, los errores de redondeo cometidos en cada paso se propagan a través de los cálculos, y en lugar de las cantidades matemáticas x definidas por el algoritmo, la máquina genera ciertos números $\tilde{x} \in C_M$. En general $\tilde{x} \neq x^\Delta$; sin embargo, usualmente existe $\zeta > 0$ independiente de η tal que $|\tilde{x} - x^\Delta| \leq \zeta\eta$ para todo η suficientemente pequeño. En el *modelo de propagación lineal del error* se calculan, bajo ciertas suposiciones en los datos, cotas para ζ trabajando con ciertas suposiciones posteriores módulo η^2 , esto es, obviando potencias de u más grandes que la primera. Los números ζ obtenidos de esta manera son llamados *coeficientes del error de propagación*. En este modelo, el resultado se acota de la siguiente forma:

$$|\tilde{x} - x^\Delta| \leq (\zeta + O(\eta))\eta = \zeta\eta \text{ mod } \eta^2.$$

En el presente contexto, el fin será hallar los coeficientes del error de propagación bajo las suposiciones de que los números iniciales $x \in C$ satisfacen $|x| \leq \gamma$. Es claro que las siguientes cotas se cumplen para los números exactos $x^{(m)}$:

$$|x^{(m)}| \leq 2^m \gamma, \quad m = 0, 1, \dots, l.$$

En el análisis que sigue, cotas para $u|\tilde{x}^{(m)}|$ son requeridas. Reemplazando $|\tilde{x}^{(m)}|$ por cotas en $|x^{(m)}|$ se introduce un error que sólo es $O(\eta^2)$, y por tanto es permisible en el modelo lineal.

Al representar los números $\tilde{x}^{(m)}$ generados por el algoritmo en la forma:

$$\tilde{x}^{(m)} = x^{(m)} + \xi_m \gamma u, \quad m = 0, 1, \dots$$

donde $\xi_0 = 1$, se buscarán relaciones de recurrencia para los ξ_m . Para la T.R.F., la relación básica de recurrencia es,

$$\tilde{x}^{(m)} = \left[(w^\Delta \tilde{x}^{(m-1)})^\Delta + \tilde{x}^{(m-1)} \right]^\Delta,$$

que se transforma en:

$$\begin{aligned} x^{(m)} + \xi_m \gamma u &= (w + u) \left(x^{(m-1)} + \xi_{m-1} \gamma u \right) + 2^{m-1} \gamma u + x^{(m-1)} + \xi_{m-1} \gamma u + 2^m \gamma u \\ &= w x^{(m-1)} + x^{(m-1)} + \left(2\xi_{m-1} + 2^{m+1} \right) \gamma u. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\xi_m = 2\xi_{m-1} + 2^{m+1};$$

el cual para $\xi_0 = 1$ se obtiene $\xi_m = (2^m + 1)2^m$. Para $m = n = 2^l$ se tiene:

$$\left| \tilde{x}^{(l)} - x^{(l)} \right| \leq \xi_l \gamma \eta = n(2 \log_2 n + 1) \quad \text{mod } \eta^2$$

la división final por \sqrt{n} , da como resultado

$$\left| \tilde{y} - y \right| \leq \sqrt{n} (2 \log_2 n + 3) \gamma \eta \quad \text{mod } \eta^2.$$

En resumen se ha probado el siguiente teorema:

TEOREMA 2.6.1. En el modelo lineal de propagación del error, si todos los elementos de $x := \{x_k\} \in \Pi_n$ satisfacen $|x_k| \leq \gamma$, los coeficientes de la propagación del error para los elementos de $y := \mathfrak{T}_n x$ valen no más de:

$$\sqrt{n} (2 \log_2 n + 3) \gamma,$$

para la T.R.F. si $n = 2^l$.

Dado que esta cota es $O(n^{1/2} \log_2 n)$, este algoritmo posee una ventaja en orden de magnitud, tanto en estabilidad numérica como en velocidad.

COMENTARIO 2.6.2. Es un problema interesante de la teoría de computación el porqué las operaciones de orden $O(n^{\frac{1}{2}} \log_2 n)$ realizadas por una T.R.F. son lo más rápido posible. Esto se mantiene como una conjetura hasta la fecha ya que aún no ha sido probado.

2.7. Algoritmo Y Ejemplos Numéricos

Para finalizar este capítulo se menciona que actualmente la mayoría de los “softwares” que se utilizan para el desarrollo de métodos numéricos en matemáticas incluyen, en su librería, una función para calcular (numéricamente) la transformada discreta de Fourier. Por ejemplo, el programa MATLAB versión 6.5 dispone de la función $Y=\text{fft}(X)$, la cual calcula la transformada discreta de Fourier Y del vector X de longitud N , mediante la fórmula

$$Y(k) = \sum_{j=1}^N X(j) w_N^{(j-1)(k-1)},$$

donde $k = 0, 1, \dots, N-1$ y $w_N = \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}\right)$. Este software hace uso del algoritmo de Cooley-Tukey descrito en la sección 2.5.

A continuación, a manera de ejemplo, se muestran los comandos en MATLAB para hallar y graficar la transformada discreta de Fourier de la función

$$x(t) = \frac{1}{t} e^{-t} \text{sen}(14\pi t) + \frac{1}{5} \text{chirp}\left(t, 0, \frac{1}{128}, 150\right),$$

donde la variable t varía en $[0,1]$ y la función $y = \text{chirp}(t, f_0, t_1, f_1)$ simula una perturbación que pueda tener una señal (como por ejemplo un ruido o una distorsión en una imagen). Aquí f_0 es la distorsión en el tiempo inicial $t=0$, y f_1 es la distorsión en el tiempo t_1 . Los comandos que se usan son:

```

%function y=graf_fft_orig
T=1/128:1/128:1;
x=(1./T).*exp(-T).*sin(2*pi*7*T)+0.2*chirp(T,0,1/128,150);
y=fft(x);
subplot(1,2,1); plot (T,x);title('x');
subplot(1,2,2); plot (T,abs(y));title('Abs(TRF(x))');

```

La instrucción $T=1/128:1/128:1$; indica que evaluaremos la función x en los valores de T desde $T=1/128$, incrementando este valor en $1/128$ hasta llegar a $T=1$. El comando $x=(1./T).*exp(-T).*sin(2*pi*7*T)+0.2*chirp(T,0,1/128,150)$; genera la sucesión de las imágenes; mientras que el comando $y=fft(x)$; genera la transformada discreta de Fourier del vector x . Los comandos `subplot` y `plot` se utilizan para generar las dos gráficas de las sucesiones x y y en una misma ventana; obteniéndose:

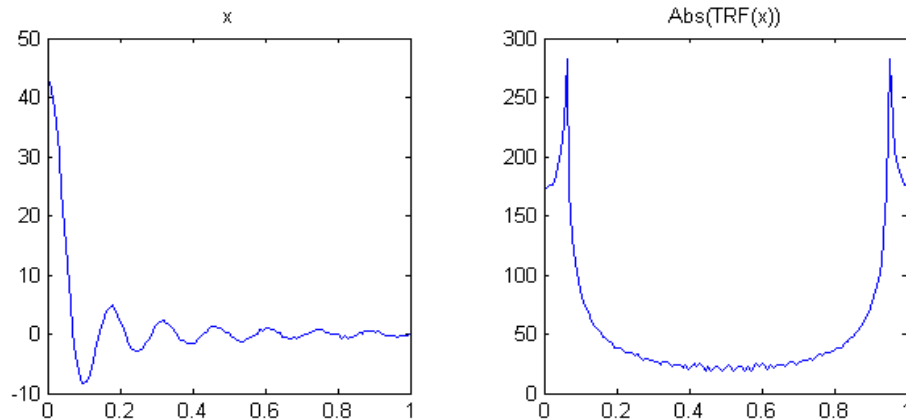


Figura 2.4. Gráfica de x y su transformada de Fourier.

Para sucesiones x cuya dimensión no sea muy grande, se puede utilizar directamente la escritura (2.11) obtenida en el Teorema 2.4.1. Por ejemplo, el código (MATLAB)

```

function y=mifft2(x)
n=length(x);
y=zeros(1,n);

```

```

w=exp(-2*pi*i/n);
for k=1:n
    for j=1:n
        y(k)=y(k)+x(j)*w^((j-1)*(k-1));
    end
end
end

```

con $t=1/8:1/8:1$ y $x = \sin(2 * \pi * 13 * t) + chirp(t,5,\frac{1}{8},40)$ genera la siguiente tabla:

Tabla 2.2. Sucesión x y su TRF.

x	TRF(x)
-0.3244	-1.0824
2.0000	2.8284 + 0.0000i
-1.6310	2.6131 + 0.0000i
-1.0000	-5.6569 - 2.8284i
1.0898	-1.0824
-2.0000	-5.6569 + 2.8284i
-0.2168	2.6131 - 0.0000i
1.0000	2.8284 - 0.0000i

cuya gráfica es:

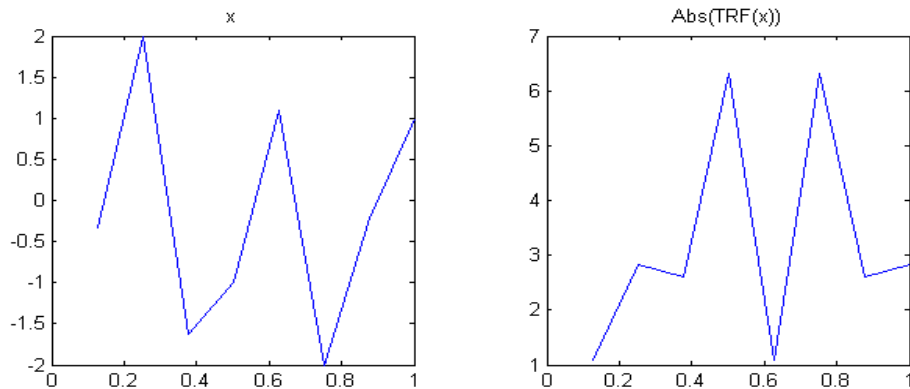


Figura 2.5. Gráfica de los datos de la tabla 2.2.

CAPÍTULO III

LA INTEGRAL DE CAUCHY

En este capítulo se definirán y estudiarán las propiedades de la integral de Cauchy. En vista de las múltiples aplicaciones que tiene este concepto, se desarrollará e implementará un algoritmo que permita evaluar de manera aproximada integrales de este tipo.

3.1. El Teorema De Cauchy-Goursat

Esta sección está destinada a establecer, a manera de preliminares, el teorema de Cauchy-Goursat, herramienta fundamental que será de gran utilidad, en el transcurso de este capítulo. Se tiene, en primer lugar, que un *dominio simplemente conexo* D no es más que una región en la cual todo contorno cerrado y simple dentro de él encierra sólo puntos de D . Un dominio que no es simplemente conexo se llamará *múltiplemente conexo*. Con esta noción, se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 3.1.1. (de Cauchy – Goursat para dominios simplemente conexos) Sea Ω un dominio simplemente conexo y sea $f \in H(\Omega)$, entonces para todo contorno cerrado γ en Ω se verifica

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se realizará en cuatro partes; primeramente, considerando contornos poligonales que son frontera de polígonos convexos; en segundo lugar, los contornos de integración serán poligonales cerradas y simples; a continuación poligonales cerradas que pueden no ser simples; por último, se consideraran contornos cerrados cualesquiera.

(i) Sea γ la frontera de un polígono convexo P de n lados determinados por la sucesión ordenada de vértices v_1, v_2, \dots, v_n , entonces el teorema se demuestra fácilmente si se considera la partición en triángulos siguiente (Como se muestra en la figura 3.1): sea T_1 el triángulo determinado por los vértices v_1, v_2, v_3, v_1 , el triángulo T_2 determinado por v_1, v_3, v_4, v_1 , y así sucesivamente, siendo el triángulo T_{n-2} determinado por v_1, v_{n-1}, v_n, v_1 . Luego, considerando la orientación de γ y de las fronteras de los triángulos inducida por el anterior orden de los vértices y, teniendo en cuenta la propiedad aditiva de las integrales, se obtiene

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n-2} \int_{\partial T_i} f(z)dz = 0,$$

puesto que se integra dos veces sobre los lados interiores al polígono y con orientaciones contrarias, por lo que basta aplicar el teorema en el caso particular de triángulos (ver el Teorema 1.4.5) para obtener que la integral sobre γ es nula.

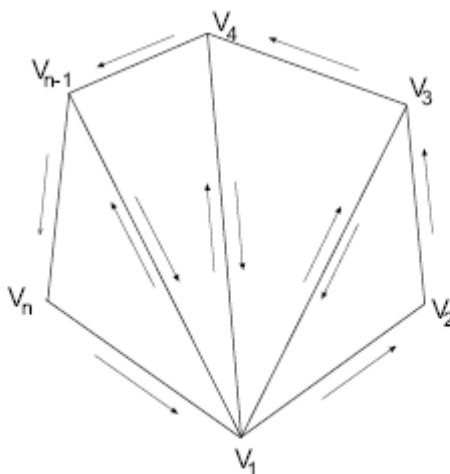


Figura 3.1: Partición de un polígono convexo en triángulos.

(ii) Ahora se considera el caso particular en que γ es una poligonal que no se corta consigo misma y recorrida una sola vez. Primero hay que comprobar que se puede realizar una partición de la componente conexa interior a γ en polígonos convexos, de esta manera se obtendrá que la integral de f sobre γ es cero aplicando la parte (i) en cada componente convexa.

Los polígonos convexos se caracterizan por la propiedad geométrica que asegura que si se prolonga cualquiera de sus lados en línea recta por cualquiera de sus vértices, esta prolongación cae fuera del polígono. Por tanto, un polígono no convexo tiene un lado cuya prolongación por alguno de sus extremos cae dentro del polígono. Para esto, se realizará el siguiente proceso, que se ilustra en la Figura 3.2; recorriendo todos los lados de γ según una orientación dada; se añadirán al polígono los segmentos de las prolongaciones que se hallen entre el vértice del que parten y primer punto (eventualmente el único) que es intersección $T_r(\gamma)$, siempre que dicho segmento se encuentre en la componente conexa interior de γ . Estos segmentos producen una partición del polígono de forma que cada componente de la partición es convexa, y se puede aplicar el apartado anterior.

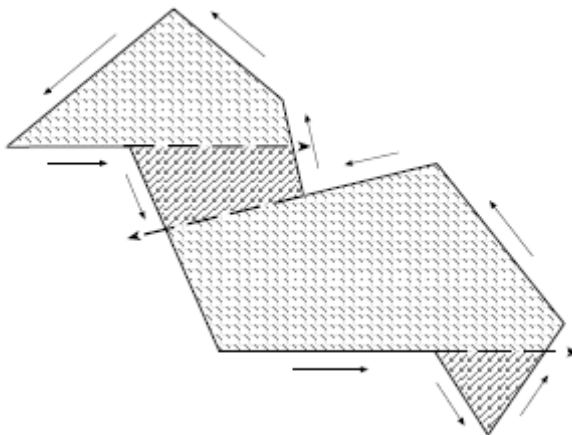


Figura 3.2: Partición de un polígono no convexo en regiones convexas.

(iii) En el caso en que la poligonal no sea simple se puede descomponer en una cantidad finita de poligonales cerradas a las que se aplica el apartado anterior. Como se observa en la Figura 3.3.

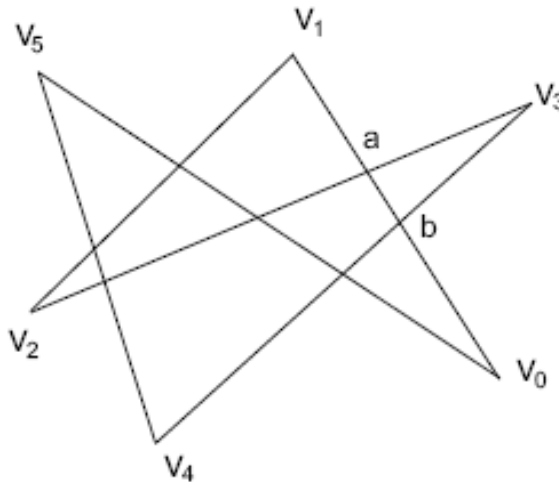


Figura 3.3: Poligonal no simple.

Se comienza recorriendo los lados de la poligonal y cuando se detecte la intersección un lado con otro ya recorrido, se marca dicha intersección y se comprueba que se ha formado una poligonal simple cerrada, un ciclo (contorno cerrado simple), que se puede “eliminar”. Se recorre la figura empezando por el vértice v_0 y continuando por los vértices de subíndice consecutivo. Así, se recorrerá el lado v_0v_1 , el lado v_1v_2 y al recorrer v_2v_3 , se comprueba que hay una intersección con un lado ya recorrido, sea ésta a . Entonces se observa que se ha recorrido el ciclo av_1v_2 , que se puede eliminar dado que la integral sobre este ciclo se anula. Así, sucesivamente se sigue el proceso recorriendo todos los vértices uno a uno y eliminando ciclos. Sólo resta considerar una última observación. Si hay alguna intersección de la poligonal consigo misma que sea todo un segmento, éste también se puede eliminar puesto que se recorre dos veces y en sentido contrario.

(iv) Si γ es un contorno cerrado cualquiera en Ω se puede construir un conjunto cerrado C de manera que

$$Tr(\gamma) \subset \bigcup_{z \in Tr(\gamma)} D(z, \rho) \subset C \subset \Omega$$

Para un $\rho > 0$ adecuado, esto es, debe cumplir la condición $\rho < \alpha < d(Tr(\gamma), \partial\Omega)$ donde

$$d(Tr(\gamma), \partial\Omega) = \inf \{ |z - w|; z \in Tr(\gamma), w \in \partial\Omega \}$$

y se considera $\rho < \alpha$ para asegurar que el cerrado C esté totalmente contenido en Ω .

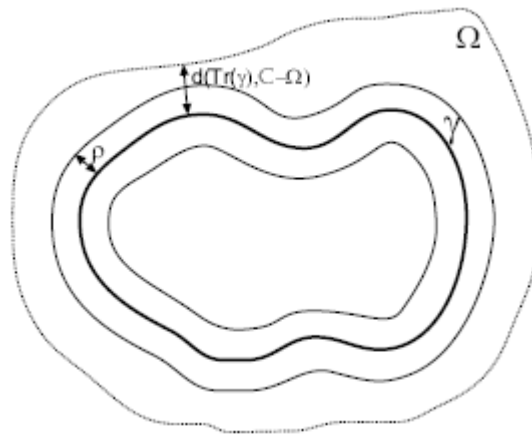


Figura 3.4: Construcción de un cerrado conteniendo a γ y contenido en Ω .

Sea ahora $\varepsilon > 0$ arbitrario, como $f \in H(\Omega)$, en particular, es continua y además uniformemente continua en C , pues C es compacto; por tanto, se puede determinar $\delta_0 > 0$ tal que si $|z - z'| < \delta_0$ entonces $|f(z) - f(z')| < \frac{\varepsilon}{2L(\gamma)}$.

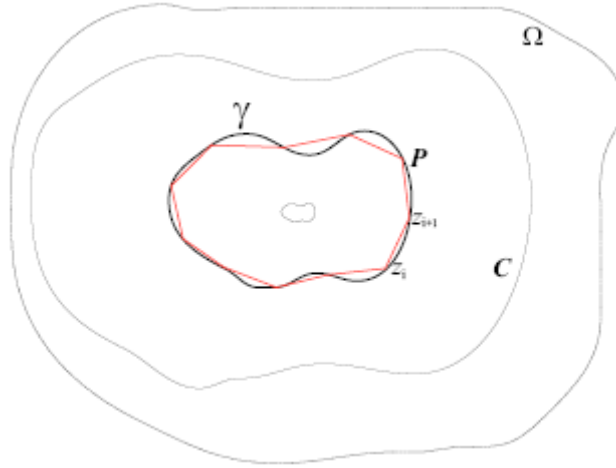


Figura 3.5: Poligonal P aproximado a γ .

Sea $\delta = \min\{\delta_0, \rho\}$ y se considera una partición de γ en arcos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, siendo $L(\gamma_i) < \delta$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, y se denota por z_i, z_{i+1} a los extremos de γ_i . Se considera también la poligonal P formada por los segmentos $P_i = [z_i, z_{i+1}]$. Entonces, como sobre cada γ_i y P_i se cumple que

$$\int_{\gamma_i} f(z) dz = \int_{P_i} f(z) dz = f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

pues la función constante admite primitivas, se verifica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_i} f(z) dz - \int_{P_i} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma_i} (f(z) - f(z_i)) dz - \int_{P_i} (f(z) - f(z_i)) dz \right| \\ &= \left| \int_{\gamma_i} (f(z) - f(z_i)) dz \right| + \left| \int_{P_i} (f(z) - f(z_i)) dz \right| \\ &\leq \max_{z \in \text{Tr}(\gamma_i)} |f(z) - f(z_i)| L(\gamma_i) + \max_{z \in P_i} |f(z) - f(z_i)| L(P_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2L(\gamma)} (L(\gamma_i) + L(P_i)) < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} L(\gamma_i) \end{aligned}$$

Pues cuando $z \in \gamma_i$ se tiene que $|z - z_i| < \delta < \delta_0$.

En consecuencia, dado que según (ii) la integral sobre P es nula, se sigue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{\gamma_i} f(z) dz - \int_{P_i} f(z) dz \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{\gamma_i} f(z) dz - \int_{P_i} f(z) dz \right| < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} L(\gamma_i) = \varepsilon, \end{aligned}$$

Lo que prueba que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ dado que se ha tomado $\varepsilon > 0$ arbitrario.

■

A continuación se muestra que este teorema es válido para curvas rectificables; es decir, para curvas cuya longitud es finita.

TEOREMA 3.1.2. (de Cauchy – Goursat para dominios múltiplemente conexos)

Sean γ y $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ contornos cerrados y simples verificando:

- (i) Todos tienen la misma orientación.
- (ii) Cada $Tr(\Gamma_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ está contenido en la componente conexa interior de γ y en las componentes conexas exteriores de Γ_j , con $j \neq i$.

Si $f \in H(\Omega)$ siendo Ω un dominio que contiene a todos los contornos y la región

$C_{\text{int}}(\gamma) \cap \left(\bigcap_{i=1}^k C_{\text{ext}}(\Gamma_i) \right)$, entonces se verifica

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f(z) dz.$$

DEMOSTRACIÓN. Se añaden segmentos uniendo los contornos como se indica en la Figura 3.6 y se consideran γ_1 y γ_2 contornos cerrados formados por un arco de γ los segmentos añadidos y un arco de cada Γ_i , también como se indica en la Figura 3.6

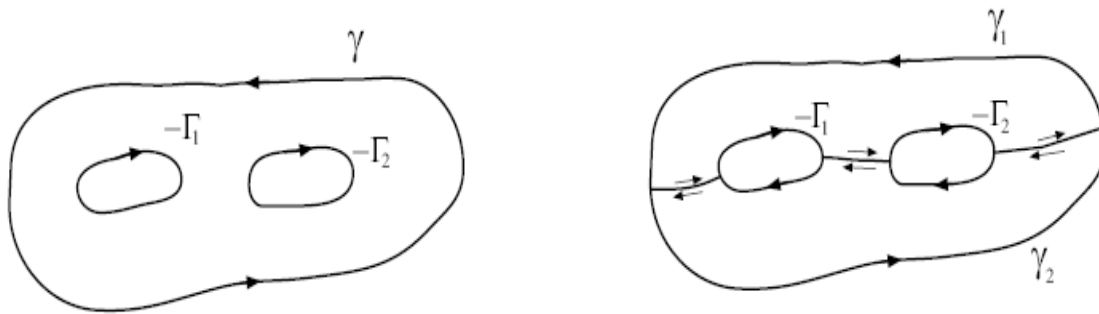


Figura 3.6: Teorema de Cauchy para dominios múltiplemente conexos

Como γ_1 y γ_2 son contornos cerrados contenidos cada uno de ellos en una región simplemente conexa donde f es holomorfa, aplicando el teorema de Cauchy – Goursat, se obtiene

$$0 = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \sum_{i=1}^k \int_{-\Gamma_i} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f(z)dz,$$

donde se ha usado que las integrales sobre los segmentos se anulan pues están recorridos dos veces y en sentidos contrarios. Así la prueba está completa. ■

3.2. Fórmula Integral De Cauchy

Seguidamente se establecerá el teorema de la fórmula integral de Cauchy, resultado fundamental que permite obtener todas las propiedades locales y globales de funciones holomorfas o analíticas. Antes, es necesario introducir la noción del índice de una curva.

DEFINICIÓN 3.2.1. Sean γ una curva cerrada en \square y $z_0 \in \square$ un punto que no está en γ . Entonces, el *índice* de γ respecto de z_0 (también llamado el número de giros de γ con respecto a z_0) se define por

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0},$$

En este caso se dice que γ gira alrededor de z_0 $I(\gamma, z_0)$ veces (ver figura 3.7).

De la fórmula anterior se desprende que, si γ es una curva cerrada simple, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} +1 & \text{si } z_0 \text{ está dentro de } \gamma, \text{ y } \gamma \text{ gira en sentido antihorario} \\ -1 & \text{si } z_0 \text{ está dentro de } \gamma, \text{ y } \gamma \text{ gira en sentido horario} \\ 0 & \text{si } z_0 \text{ está fuera de } \gamma \end{cases}$$

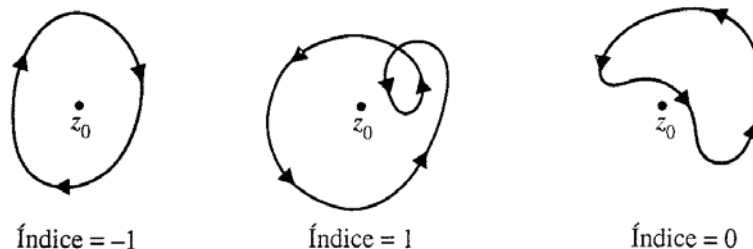


Figura 3.7. Índice de una curva cerrada simple alrededor de un punto z_0 .

TEOREMA 3.2.2. (Fórmula integral de Cauchy) Sea $f \in H(Tr(\gamma) \cup C_{\text{int}}(\gamma))$, siendo γ un contorno simple, cerrado y positivamente orientado. Entonces, para cualquier punto $z_0 \in C_{\text{int}}(\gamma)$, se verifica

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que f es continua en z_0 , y considerando $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existe un $\delta > 0$ de manera que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Sea $\rho < \delta$ y de forma que $\partial D(z_0, \rho) \subset C_{\text{int}}(\gamma)$, como muestra la Figura 3.8. Se denota por γ_0 al camino simple positivamente orientado cuya trayectoria es $\partial D(z_0, \rho)$.

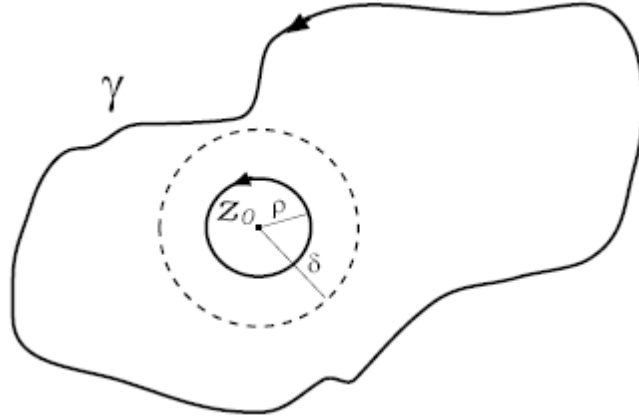


Figura 3.8: Situación de γ y γ_0 .

La función integrando $\frac{f(z)}{z - z_0}$ es holomorfa en $(Tr(\gamma) \cup C_{\text{int}}(\gamma)) \setminus \{z_0\}$, entonces aplicando el teorema de Cauchy para dominios múltiplemente conexos, se verifica que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Es posible calcular la última de estas integrales parametrizando el contorno γ_0 , $\gamma_0(t) = z_0 + \rho e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{it}} i \rho e^{it} dt = f(z_0) 2\pi i.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz - f(z_0) 2\pi i \right| &= \left| \int_{\gamma_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \max_{z \in Tr(\gamma_0)} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} L(\gamma_0) = \frac{2\pi\rho}{\rho} \max_{z \in Tr(\gamma_0)} |f(z) - f(z_0)| < 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

ya que $|z - z_0| = \rho < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ arbitrario, de la desigualdad anterior se obtiene

$$\int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz - f(z_0)2\pi i = 0,$$

o equivalentemente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Lo que demuestra el teorema. ■

A continuación se muestra un ejemplo que ilustra el uso de la fórmula integral de Cauchy para calcular integrales de funciones complejas sobre contornos circulares.

EJEMPLO 3.2.3. Calcular la siguiente integral

$$\int_C \frac{z^2}{z^2 + 2z + 2} dz,$$

donde C es la circunferencia simple y cerrada $|z| = 2$, recorrida en sentido positivo.

SOLUCIÓN. Para encontrar el valor de esta integral en el contorno indicado se observa que

$$\frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{z^2}{z - z_2} - \frac{z^2}{z - z_1} \right\},$$

donde $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$. El módulo de los puntos z_1, z_2 es $\sqrt{2}$ (menor que 2) y así están dentro del contorno C . Aplicando el teorema de Cauchy – Goursat con $f(z) = z^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \frac{z^2}{z^2 + 2z + 2} dz &= \frac{i}{2} \left\{ \int_C \frac{z^2}{z - z_2} dz - \int_C \frac{z^2}{z - z_1} dz \right\} \\ &= \frac{i}{2} \{ 2\pi i f(z_2) - 2\pi i f(z_1) \} \\ &= \pi \{ z_1^2 - z_2^2 \} = -4\pi i. \end{aligned}$$

3.3. La Integral De Cauchy

Ya se disponen de todas la herramientas para definir y estudiar una clase de funciones analíticas que se obtienen a través de una integral de línea como la que aparece en el teorema de la fórmula integral de Cauchy.

DEFINICIÓN 3.3.1. Sea γ una curva en \square y sea g una función continua, definida a lo largo de la curva (en la imagen $\gamma([a,b])$). La *integral de Cauchy* es la función que asigna a cada $z \in \square \setminus \gamma([a,b])$ el valor $G(z)$ dado por

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.1)$$

COMENTARIO 3.3.2. Note que si γ una curva simple y cerrada (recorrida en sentido positivo) y la función g es analítica en $Tr(\gamma) \cup C_{\text{int}}(\gamma)$, entonces por la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$G(z) = \begin{cases} g(z), & z \in C_{\text{int}}(\gamma), \\ 0, & z \in C_{\text{ext}}(\gamma). \end{cases}$$

Sin embargo, en general, calcular explícitamente la integral de Cauchy puede ser un trabajo duro de realizar tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.3.3. Sea la función $g(z) = \bar{z}$ y γ la circunferencia con centro en el origen y radio 1, recorrida en sentido positivo; es decir, $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces, para cada $z \notin \gamma$ y $z \neq 0$ la integral de Cauchy es

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{s}}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^{i\theta} - z} \\
&= \frac{1}{2\pi iz} \int_0^{2\pi} \frac{ize^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi iz} \int_{\Gamma_z} \frac{dw}{w},
\end{aligned}$$

donde Γ_z es la circunferencia con centro en 1 y radio $|z|$, recorrida en sentido negativo (ver la Figura 3.9).

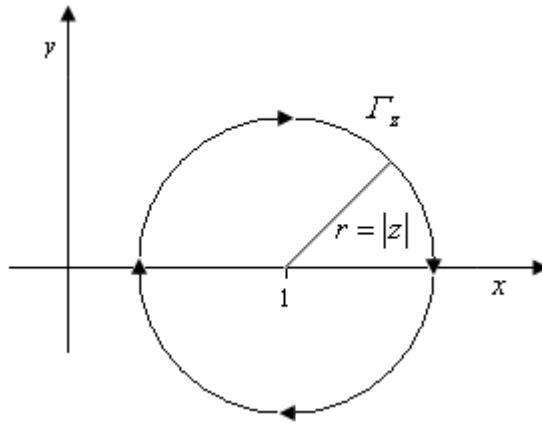


Figura 3.9: Gráfica de Γ_z .

Luego, por el teorema de la fórmula integral de Cauchy y el teorema de Cauchy-Goursat se obtiene

$$G(z) = \begin{cases} 0, & 0 < |z| < 1, \\ -\frac{1}{z}, & |z| > 1. \end{cases}$$

El signo (-) que aparece cuando $|z| > 1$ se debe a que el contorno Γ_z está recorrido en sentido negativo. Para $z = 0$ se obtiene,

$$G(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{s}}{s} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\theta} d\theta = -\frac{i}{\pi}.$$

Ahora, se establece una propiedad importante de la integral de Cauchy.

TEOREMA 3.3.4. (Diferenciabilidad de integrales del tipo de Cauchy) La integral de Cauchy definida en (3.1) G es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$; además G es infinitamente diferenciable y su k -ésima derivada está dada por

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.2)$$

DEMOSTRACIÓN. La curva γ es un conjunto compacto, pues es la imagen continua de un intervalo cerrado y acotado. Si z_0 no está en γ entonces, por el lema de la distancia éste está a una distancia positiva δ de la curva. Si se escoge $\eta = \delta/2$ y U como el disco con radio η y centro z_0 , entonces $z \in U$ y ζ en γ implica que $|z - \zeta| \geq \eta$ pues $|z - \zeta| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| \geq 2\eta - \eta$ (ver figura 3.10)

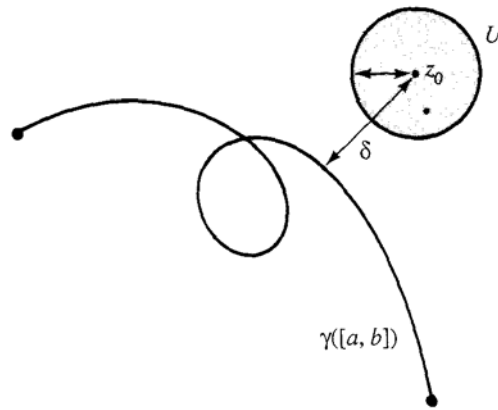


Figura 3.10. Un punto z_0 que no está sobre una curva γ , está a una distancia positiva de γ .

Empezando ahora con el caso $k = 1$. Se mostrará que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right] = 0.$$

La expresión encerrada entre corchetes puede escribirse como

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2 (\zeta - z)} d\zeta.$$

Sea U el disco con centro z_0 y radio η construida anteriormente, y sea M el máximo de g en γ . Entonces $\left| (\zeta - z_0)^2 (\zeta - z) \right| \geq \eta^2 \cdot \eta = \eta^3$, con lo que se tiene la estimación $\left| g(\zeta) / (\zeta - z_0)^2 (\zeta - z) \right| \leq M\eta^{-3}$ (M una constante fija independiente de ζ en γ , y $z, z_0 \in U$). Así

$$\left| \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2 (\zeta - z)} d\zeta \right| \leq |z - z_0| \frac{M\eta^{-3}}{2\pi} l(\gamma)$$

Esta expresión se aproxima a 0 conforme $z \rightarrow z_0$ y en consecuencia el límite es cero, como se quería.

Para demostrar el caso general se procede por inducción sobre k . Se supone que el teorema es válido para k entre 1 y $n-1$. Se va a probar que se cumple para $k = n$. Formulando la hipótesis de inducción de esta manera ya que no sólo se aplicará a g sino también a $g(\zeta) / (\zeta - z_0)$, la cual también es acotada e integrable a lo largo de γ . Se sabe que G puede diferenciarse $n-1$ veces en $\square \setminus \gamma$ y que

$$G^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Sea $z_0 \in \square \setminus \gamma([a, b])$, entonces al usar la identidad

$$\frac{1}{(\zeta - z)^n} = \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \left[\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n} d\zeta \right] \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{2\pi i} (z-z_0) \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} d\zeta
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

Se concluye de esta ecuación que $G^{(n-1)}(z)$ es continua en z_0 , ya que, al aplicar la hipótesis de inducción a $g(\zeta)/(\zeta-z_0)$, se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} d\zeta$$

es analítica como función de z en el conjunto $\square \setminus \gamma([a,b])$ y por tanto, continua en z .

En consecuencia

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^{n-1}(\zeta-z_0)} d\zeta \rightarrow \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z_0)^n} d\zeta$$

conforme $z \rightarrow z_0$.

Si la distancia de z_0 a γ es 2η , si $|g(z)| < M$ en γ , y si $|z-z_0| < \eta$, se tiene

$$\left| \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)} d\zeta \right| < \frac{M}{\eta^{n+1}} l(\gamma)$$

donde $l(\gamma)$ es la longitud de γ . Así

$$|z-z_0| \left| \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-z)^n(\zeta-z_0)} d\zeta \right| \rightarrow 0$$

conforme $z \rightarrow z_0$ y por lo tanto, $G^{(n-1)}$ es continua en $\square \setminus \gamma([a,b])$. De la ecuación

(3.2) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \left[\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta \right] \\ &+ \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1} (\zeta - z_0)} d\zeta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Al aplicar la hipótesis de inducción a $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$, se observa que el primer término del lado derecho de la ecuación (3.3) converge a

$$\frac{(n-1)(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

conforme $z \rightarrow z_0$.

Por otra parte, ya se ha establecido que $G^{(n-1)}$ es continua en $\square \setminus \gamma([a, b])$, luego, aplicando este hecho a $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$ en lugar de a $g(\zeta)$, se obtiene que

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} d\zeta \rightarrow \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

conforme $z \rightarrow z_0$. Así se ha mostrado que, conforme $z \rightarrow z_0$,

$$\frac{G^{(n-1)}(z) - G^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0}$$

converge a

$$\begin{aligned} (n-1) \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Esto concluye la inducción y demuestra el teorema. ■

Como aplicación de la diferenciabilidad de la integral de Cauchy, se puede dar una prueba alternativa del próximo resultado, el cual se conoce como la fórmula integral de Cauchy para las derivadas.

TEOREMA 3.3.5. (Fórmula integral de Cauchy para las derivadas). Sea f una función analítica en una región A . Entonces, todas las derivadas de f existen en A . Más aún, para z_0 en A y γ cualquier curva cerrada en A , para la que z_0 no está en γ , entonces se tiene:

$$f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que A es abierto y z_0 no está en γ , es posible encontrar un círculo pequeño γ_0 con centro en z_0 y tal que γ no corte a γ_0 (ver figura 3.11).

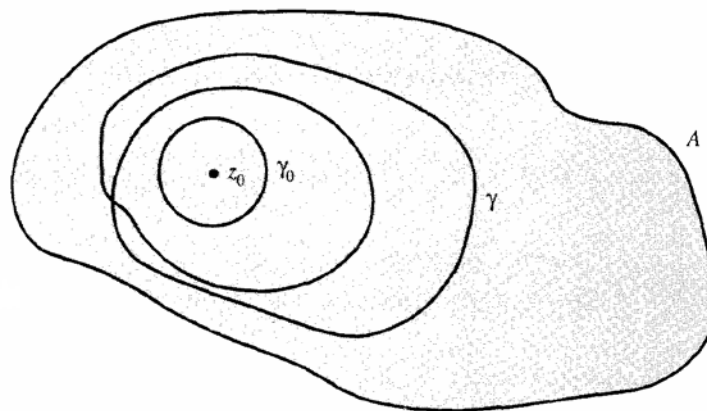


Figura 3.11. γ_0 un círculo con centro en z_0 suficientemente pequeño para que no se cruce con γ .

Para z en A y no en γ se define

$$G(z) = f(z)I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz.$$

Ésta es una integral del tipo de Cauchy y, por lo tanto, es infinitamente diferenciable en $A \setminus \gamma$, y

$$G^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad (3.5)$$

Pero

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{y} \quad I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

también son integrales del tipo de Cauchy y, por tanto, son infinitamente diferenciables cerca de z_0 . En particular, el índice es una función continua de z , de hecho, constante excepto cuando cruza la curva. En particular, es constante en el interior de γ_0 . Así $G^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0)I(\gamma, z_0)$. Al combinar esto con la ecuación (3.5), da el resultado deseado. ■

Una consecuencia inmediata del teorema de la fórmula integral de Cauchy es la útil desigualdad de Cauchy que enunciamos a continuación.

TEOREMA 3.3.6. (Desigualdades de Cauchy) Sea f analítica en una región A y sea γ una circunferencia con radio R y centro z_0 que está en A . Supóngase que el disco $\{z: |z - z_0| < R\}$ también está contenido en A y que $|f(z)| \leq M$ para toda z en γ . Entonces, para cada $k = 0, 1, 2, \dots$, se cumple

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} M.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $I(\gamma, z_0) = 1$, de la fórmula (3.4) se obtiene

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta;$$

y en consecuencia

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right|.$$

Ahora bien

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \right| \leq \frac{M}{R^{k+1}},$$

puesto que $|\zeta - z_0| = R$ para ζ en γ , así que

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{k+1}} L(\gamma),$$

Pero $L(\gamma) = 2\pi R$ ($L(\gamma)$ es la longitud de γ) y así se obtiene el resultado deseado. ■

3.4. Evaluación Numérica De La Integral De Cauchy

En esta sección se desarrollará un algoritmo para hallar aproximaciones de la integral de Cauchy sobre la circunferencia unitaria Γ , apoyándose en la transformada rápida de Fourier estudiada en el capítulo anterior. En primer lugar, se definen las clases de funciones sobre las cuales se van a calcular las aproximaciones de la integral.

DEFINICIÓN 3.4.1. Sea f una función de valores complejos definida en un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{C}$, si $t_0 \in E$, se dice que f satisface la *condición de Hölder* en t_0 si existen constantes positivas μ y γ tales que

$$\left| f(t) - f(t_0) \right| \leq \mu |t - t_0|^\gamma \quad (3.6)$$

para todo $t \in E$ suficientemente cerca de t_0 .

COMENTARIOS 3.4.2.

(i) La constante γ es conocida como el exponente de la condición de Hölder.

- (ii) Si f satisface (3.6) en cada $t_0 \in E$ con las mismas constantes μ y γ , entonces se dice que f satisface la *condición uniforme de Hölder* en E .
- (iii) Si $0 < \gamma \leq 1$, la clase de todas las funciones f definidas en E que satisfacen la condición uniforme de Hölder con exponente γ es llamada la *clase de Lipschitz* de orden γ para el conjunto E y es denotada por $Lip \gamma$. Claramente, cualquier función $f \in Lip \gamma$ es uniformemente continua en E , pero el recíproco no es cierto.

EJEMPLO 3.4.3. La función $g(z) = \bar{z}$ satisface la condición uniforme de Hölder en todo \mathbf{C} . En este caso, $\mu = \gamma = 1$.

Considérese ahora una función compleja h , continua y que satisface la condición de Hölder en el círculo unitario Γ , y sea

$$h(e^{2\pi i\tau}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k \tau} \quad (3.7)$$

su serie de Fourier. Para evaluar la integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt = \int_0^1 h(e^{2\pi i\tau}) \frac{1}{1 - e^{-2\pi i\tau} z} d\tau,$$

se distinguen los casos $|z| < 1$, $|z| > 1$ y $|z| = 1$.

Si $|z| < 1$, sustituyendo (3.7) y usando la identidad

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i\tau} z} = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-2\pi i l \tau} z^l$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k \tau} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} e^{-2\pi i l \tau} z^l \right) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < 1,
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que

$$\int_0^1 e^{2\pi i(k-l)\tau} d\tau = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Similarmente, si $|z| > 1$, entonces, expandiendo el núcleo

$$\frac{1}{1 - e^{-2\pi i \tau} z} = -\frac{e^{2\pi i \tau}}{z(1 - e^{2\pi i \tau} z^{-1})} = -\sum_{l=1}^{\infty} e^{2\pi i l \tau} z^{-l},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
f(z) &= \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k \tau} \right) \left(-\sum_{l=1}^{\infty} e^{2\pi i l \tau} z^{-l} \right) d\tau \\
&= -\sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} z^{-l}, \quad |z| > 1.
\end{aligned}$$

Si, finalmente $|z| = 1$, usando el hecho que $f(z) = \frac{i}{2} \mathcal{K}f(z) + \frac{1}{2} \hat{h}$ (ver Henrici, 1985, pág. 107) combinado con $\hat{h} = f(z) + \overline{f(\bar{z})} = a_0$ y el hecho que

$$\mathcal{K}f(z) = -i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(k) a_k z^k,$$

donde $\mathcal{K}f(z)$ es el conjugado de la función $f(z)$ para obtener

$$f(z) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k z^k - a_{-k} z^{-k}), \quad |z| = 1.$$

Para implementar estas relaciones numéricamente, se selecciona un entero (grande) n y sea $h_k := h(e^{2\pi i k/n})$, $k \in \square$. La sucesión $h = \{h_k\}$ pertenece entonces a

Π_n . Los coeficientes de Fourier discretos basados en estos valores de muestreo son los elementos de la sucesión $c = \{c_k\}$, donde

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{f}_n h_k,$$

los cuales, mediante una TRF, pueden ser calculados en $O(n \log n)$ operaciones. Se sabe que los c_k son aproximaciones razonables de los a_k sólo para $|k| \leq m := \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Así, la siguiente función, llamada la **integral discreta de Cauchy**, puede ser considerada como una aproximación razonable de la actual integral de Cauchy f :

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} \sum_{k=0}^m c_k z^k, & |z| < 1 \\ \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (c_k z^k - c_{-k} z^{-k}), & |z| = 1 \\ \sum_{k=1}^m c_{-k} z^{-k}, & |z| > 1. \end{cases}$$

Aquí la prima en la sumatoria indica que si n es par $n = 2m$, los términos donde $k = m$ deben ser tomados con un factor (adicional) de $\frac{1}{2}$. En cualquier circunferencia $|z| = \rho$, estas expresiones pueden ser evaluadas simultáneamente en los n puntos $z_k = \rho e^{2\pi i k / n}$ mediante una TRF en otras $O(n \log n)$ operaciones.

Una estimación del error $\tilde{f}(z) - f(z)$ de la integral discreta de Cauchy está dada por $|\tilde{f}(z) - f(z)| \leq 2 \sum_{|k| \geq m} |c_k|$. (Ver Henrici, 1985, pág. 46). Otra forma de estudiar cómo \tilde{f} se aproxima a f se obtiene también expresando \tilde{f} directamente en términos de los valores de muestreo h_k . Es claro que para cada z fijo, $\tilde{f}(z)$ es una función lineal de h_k . Así, sea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k(z) h_k.$$

Primero, se determina $l_0(z)$. La imagen de Fourier de la sucesión $\|:1,0,\dots,0:\|$ es la sucesión $n^{-1/2} \|:1,1,\dots,1:\|$. Si n es par, $n = 2m$, se sigue que

$$\begin{aligned} l_0(z) &= -\frac{1}{n} \left(1 + z + \dots + z^{m-1}, \frac{1}{2} z^m \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1-z} \left(1 - \frac{1+z}{2} z^m \right), \quad |z| < 1, \\ l_0(z) &= -\frac{1}{n} \left(z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-m+1} + \frac{1}{2} z^{-m} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1-z} \left(1 - \frac{1+z}{2} z^{-m} \right), \quad |z| > 1, \\ l_0(z) &= \frac{1}{n} \frac{1}{1-z} \left(1 - \frac{1+z}{2} \frac{z^m + z^{-m}}{2} \right), \quad |z| = 1. \end{aligned}$$

Si n es impar, $n = 2m + 1$, tenemos

$$\begin{aligned} l_0(z) &= \frac{1}{n} \left(1 + z + \dots + z^m \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}, \quad |z| < 1, \\ l_0(z) &= -\frac{1}{n} \left(z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-m} \right) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1 - z^{-m}}{1 - z}, \quad |z| > 1, \\ l_0(z) &= \frac{1}{n} \frac{1}{1-z} \left[1 - \frac{1}{2} (z^{m+1} + z^{-m}) \right], \quad |z| = 1. \end{aligned}$$

En vista de que $l_k(z) = l_0(z_k^{-1} z)$, las fórmulas para $\tilde{f}(z)$ son fácilmente escritas a continuación:

TEOREMA 3.4.4. Sea $z_k = e^{2\pi i k/n}$, $h_k = h(z_k)$. Entonces la integral de Cauchy aproximada se representa como sigue:

a. Si n es par, $n = 2m$

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k}{z_k - z} h_k - g_1(z) \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{z_k + z}{z_k - z} h_k,$$

donde

$$g_1(z) = \begin{cases} z^m, & |z| < 1 \\ \frac{1}{2}(z^m + z^{-m}), & |z| = 1 \\ z^{-m}, & |z| > 1 \end{cases}$$

b. Si n es impar, $n = 2m + 1$

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_k}{z_k - z} h_k - g_2(z) \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{z_k^{1/2}}{z_k - z} h_k,$$

donde

$$g_2(z) = \begin{cases} z^{m+1}, & |z| < 1 \\ \frac{1}{2}(z^{m+1} + z^{-m}), & |z| = 1 \\ z^{-m}, & |z| > 1 \end{cases}$$

COMENTARIO 3.4.5. En las representaciones anteriores, el primer término es una forma discretizada de la expresión

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t)}{t - z} dt;$$

mientras que el segundo término es una corrección, notable sólo en la inmediata vecindad de $|z| = 1$, el cual evita que \tilde{f} tienda a infinito a medida que z se aproxime a uno de los puntos z_k .

3.5. Algoritmo Y Ejemplos Numéricos

En esta sección se propone e implementa un algoritmo para hallar la integral de Cauchy discreta según la fórmula establecida en el Teorema 3.4.4. Aquí se necesita entonces una función continua h , el punto z donde se desea evaluar la integral de Cauchy y el valor n utilizado en esta fórmula. La salida será la integral discreta de Cauchy $\tilde{f}(z)$ evaluada en el punto z . También se requieren los siguientes algoritmos para evaluar las funciones g_1 y g_2 que aparecen en el Teorema 3.4.4.

Algoritmo 2. Función g_1

ENTRADA: z, m

PASO 1: si $\text{Abs}(z) < 1$ haga $g_1 = z^m$.

PASO 2: si $\text{Abs}(z) = 1$ haga $g_1 = \frac{1}{2}(z^m + z^{-m})$.

PASO 3: si $\text{Abs}(z) > 1$ haga $g_1 = z^{-m}$

PASO 4: SALIDA g_1 .

FIN.

Algoritmo 3. Función g_2

ENTRADA: z, m

PASO 1: si $\text{Abs}(z) < 1$ haga $g_2 = z^{m+1}$.

PASO 2: si $\text{Abs}(z) = 1$ haga $g_2 = \frac{1}{2}(z^{m+1} + z^{-m})$.

PASO 3: si $\text{Abs}(z) > 1$ haga $g_2 = z^{-m}$

PASO 4: SALIDA g_2 .

FIN.

Ahora se puede escribir este algoritmo paso a paso para hallar la integral discreta de Cauchy. En el anexo, se podrá ver el programa en MATLAB para ejecutar este algoritmo.

Algoritmo 4. Integral discreta de Cauchy.

ENTRADA: n entero (grande), la función h y el valor z .

SALIDA: $\tilde{f}(z)$

PASO 1: Para $k = 1, 2, \dots, n$ tome $z_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$;

Tome $h_k = h(z_k)$

Tome suma=0

Tome corr=0

PASO 2: si n es par, entonces haga los pasos 3 - 5

PASO 3: Haga $m = n/2$

PASO 4: Para $k = 1, \dots, n$

Tome suma=suma+ $\left(\frac{z_k}{z_k - z}\right)k_k$

Tome corr=corr+ $(-1)^{k-1}\left(\frac{z_k + z}{z_k - z}\right)h_k$

PASO 5: Haga f =suma/ n - g_1 *corr/(2n)

PASO 6: si n es impar, entonces haga los pasos 7 - 9

PASO 7: Haga $m = (n-1)/2$

PASO 8: Para $k = 1, \dots, n$

Tome suma=suma+ $\left(\frac{z_k}{z_k - z}\right)k_k$

Tome corr=corr+ $(-1)^{k-1}\left(\frac{\sqrt{z_k}}{z_k - z}\right)h_k$

PASO 9: Haga f =suma/ n - g_2 *corr/(2n)

PASO 10: SALIDA f

FIN.

A continuación, se muestran, a manera de ejemplos, los resultados que se obtuvieron del código en MATLAB ver. 6.5 diseñado para hallar la integral discreta de Cauchy según el Algoritmo 4 (ver Apéndice). Aquí se ha usado $n=512$.

EJEMPLO 3.5.1. En primer lugar, se observa que si la función h es analítica sobre y en el interior de la circunferencia unitaria $|z|=1$, entonces, en virtud del Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy y del Teorema de Cauchy-Goursat (ver los Teoremas 3.2.2 y 3.1.1) se tiene que la integral de Cauchy viene dado por

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} h(z), & |z| < 1. \\ 0, & |z| > 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

En este caso, considerando la función $h(z) = z$, la cual es analítica en todo el plano complejo, nuestro algoritmo obtiene los siguientes resultados:

Tabla 3.1: Formula integral de Cauchy aplicada a ciertos valores de z , para $h(z) = z$.

z	$\tilde{f}(z)$
1+i	3.0291e-017 + 4.9873e-017i
1-i	-3.4852e-017 + 2.9924e-017i
-1-i	2.1034e-017 + 2.0762e-017i
-1+i	-3.6971e-017 + 9.1344e-017i
0.5+0.5i	0.5+0.5i
-0.5+0.5i	-0.5+0.5i
-.05-0.5i	-.05-0.5i
0.5-0.5i	0.5-0.5i

gráficamente,

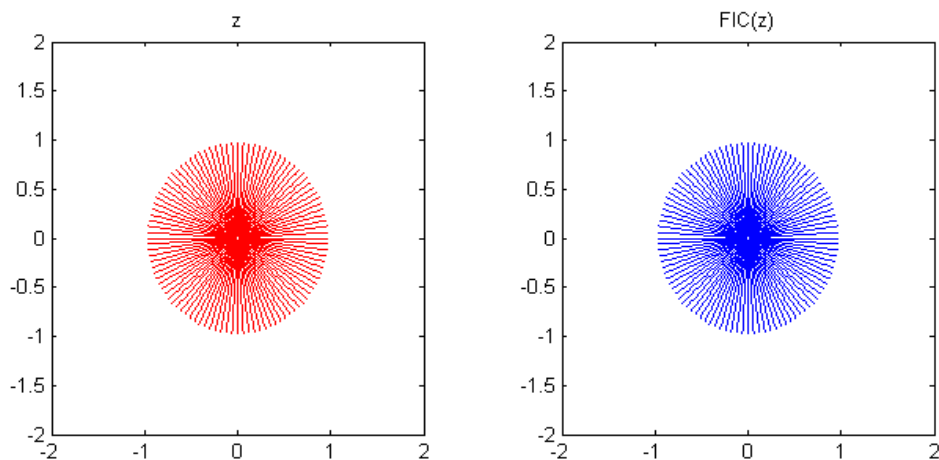


Figura 3.12. El disco unitario y su imagen mediante la fórmula integral de Cauchy para $h(z) = z$

Similarmente, considerando la función $h(z) = e^z$ se obtiene que la imagen del disco unitario D mediante la integral discreta de Cauchy es:

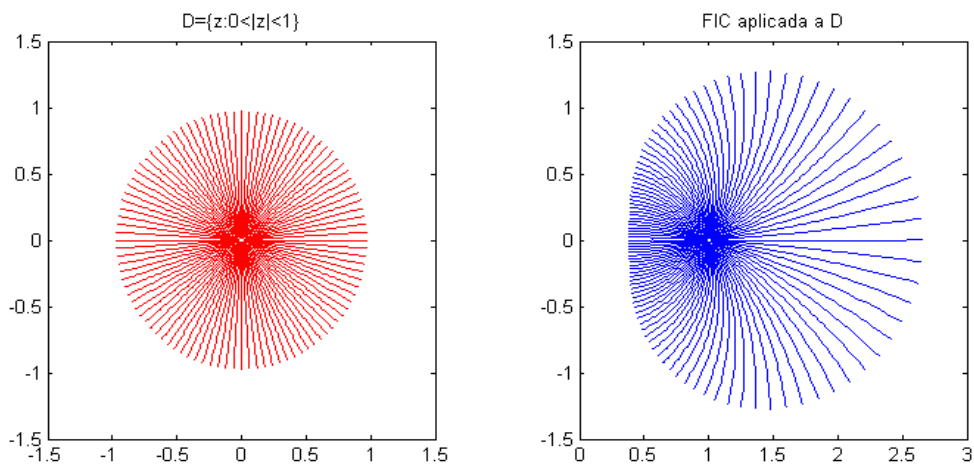


Figura 3.13. El disco unitario y su imagen mediante la fórmula integral de Cauchy para $h(z) = e^z$.

Observe que si $z = re^{i\theta} \in D$, entonces por la fórmula (3.8) se obtiene

$$f(z) = h(z) = e^z = e^{r \cos(\theta)} e^{i r \sin(\theta)};$$

luego, como $\theta \in [0, 2\pi]$ y $r \in (0, 1)$, entonces $f(z)$ es un número complejo cuyo módulo varía entre e^{-1} y e ; mientras que su argumento oscila entre -1 y 1 tal como se muestra en la Figura 3.13.

Si se aplica esta misma transformación a un triángulo contenido en el disco unitario se obtiene:

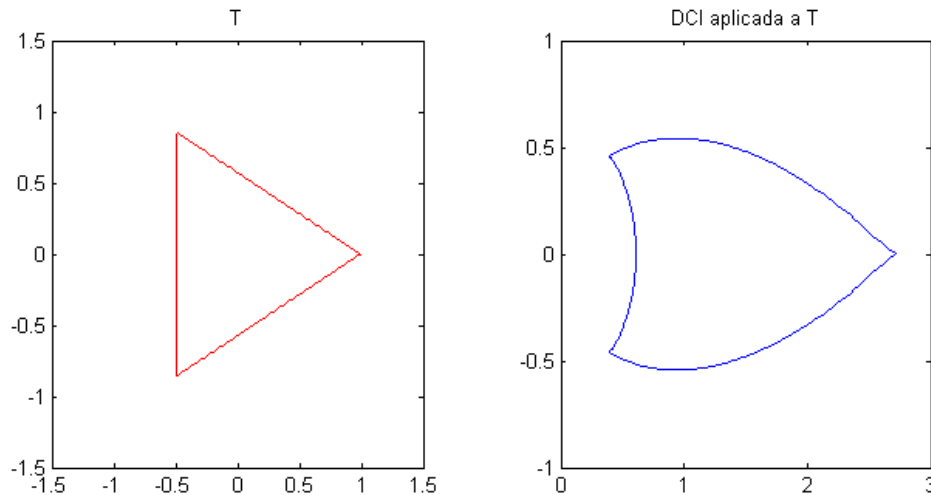


Figura 3.14. El triángulo T y su imagen mediante la fórmula integral de Cauchy para $h(z) = e^z$.

EJEMPLO 3.5.2. Considere ahora la función $h(z) = \bar{z}$, la cual es continua en todo el plano complejo; pero que no es diferenciable en ningún punto. En este caso, según Ejemplo 3.5.1, la integral de Cauchy de viene dada por

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{z}, & |z| > 1, \\ 0, & |z| < 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Note que esta transformación aplica el exterior del disco unitario abierto en el disco unitario. Los resultados que se obtienen con el algoritmo desarrollado son:

Tabla 3.2: FIC con $h(z) = \bar{z}$ para algunos valores de z .

z	$\tilde{f}(z)$
$1+i$	$-0.5 + 0.5i$
$1-i$	$-0.5 - 0.5i$
$-1-i$	$0.5 - 0.5i$
$-1+i$	$0.5 + 0.5i$
$0.5+0.5i$	$-1.1319e-016 - 4.211e-016i$
$-0.5+0.5i$	$3.6429e-017 - 2.6162e-016i$
$-.05-0.5i$	$-5.8981e-017 + 8.7387e-017i$
$0.5-0.5i$	$-1.1493e-016 + 3.0618e-016i$

gráficamente, se obtiene

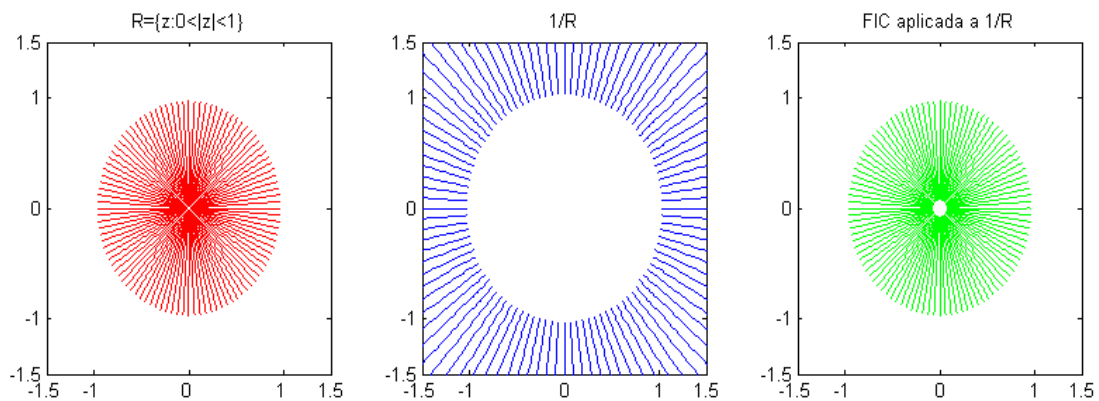


Figura 3.15. El disco unitario, su inverso y la FIC aplicada al inverso del disco para $h(z) = \bar{z}$.

donde la primera grafica representa la partición del disco unitario que se ha tomado. En la segunda gráfica se muestra los inversos de los elementos en la partición; y en la tercera gráfica, se calcula la integral discreta de Cauchy, con el algoritmo

implementado, (ver Apéndice) de todos los puntos en la segunda gráfica. Se observa que los resultados coinciden con lo establecido en la fórmula (3.9).

En la siguiente gráfica se observa la acción de las transformaciones anteriores para un triángulo.

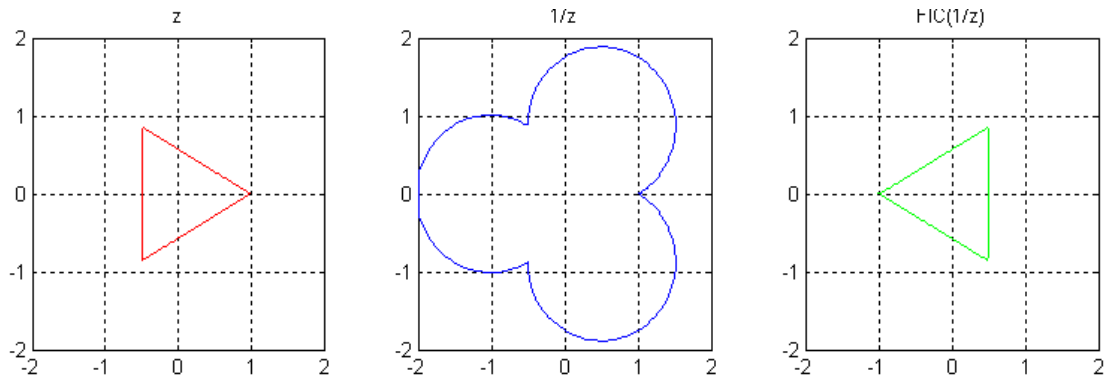


Figura 3.16. El triángulo T , su inverso y la FIC aplicada al inverso de T para $h(z) = \bar{z}$.

EJEMPLO 3.5.3. Ahora se muestra que el algoritmo que se ha implementado puede ser usado para hallar aproximaciones de integrales reales. Con este fin, note que la integral discreta de Cauchy para la función $h(z) = \exp(\bar{z})$ evaluada en el exterior del disco unitario es:

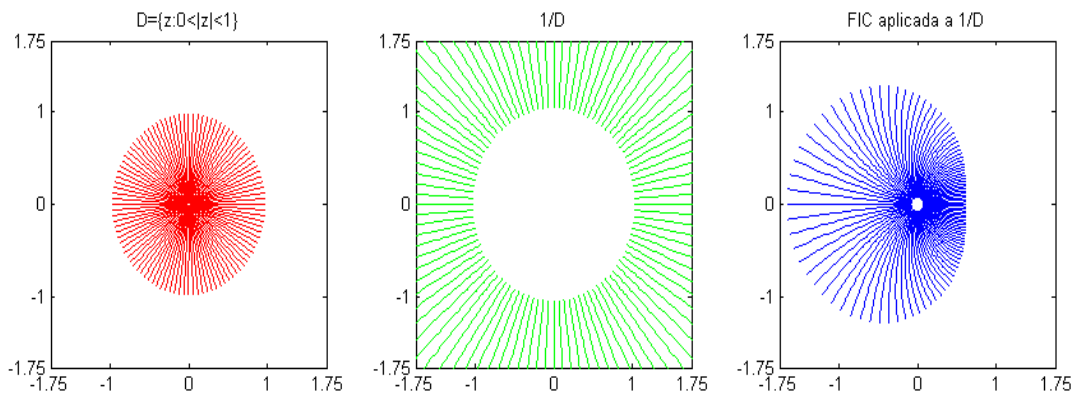


Figura 3.17: El disco unitario D , su inverso y la FIC aplicada al exterior de D con

$$h(z) = \exp(\bar{z}).$$

En particular el valor que se obtiene para $z=2$ es $\mathcal{F}(2) = -0.6487$. Luego, parametrizando la integral de Cauchy

$$\mathcal{F}(2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=1} \frac{\exp(\bar{s})}{s-2} ds,$$

y tomando la parte real se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\cos \theta)}{5-4\cos \theta} \{ \cos(\text{sen}\theta)(1-2\cos \theta) - 2\text{sen}(\text{sen}\theta)\text{sen}\theta \} d\theta \approx \mathcal{F}(2);$$

es decir,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(\cos \theta)}{5-4\cos \theta} \{ \cos(\text{sen}\theta)(1-2\cos \theta) - 2\text{sen}(\text{sen}\theta)\text{sen}\theta \} d\theta \approx -4.0760,$$

la cual se corresponde con el valor que se obtiene usando algún método de cuadratura. Por ejemplo el valor que se obtiene usando el programa MAPLE 10 es $I = -4.076035962$.

CONCLUSIONES

En el transcurso de este trabajo, se ha establecido que la transformada discreta de Fourier permite aproximar la transformada continua de Fourier. La transformada rápida de Fourier es un algoritmo eficiente para evaluar la transformada discreta de Fourier; ésta está disponible en la librería del software MATLAB ver. 6.5, tal como se menciona en las secciones 2.5, 2.6 y 2.7 del capítulo 2.

Utilizando como herramienta principal el potente software MATLAB ver. 6.5, se implementó un algoritmo para evaluar la integral discreta de Cauchy. Se usaron como casos de prueba funciones enteras y funciones que no son diferenciables en ningún punto. Comparando la solución exacta y la aproximada, se pudo observar que se obtiene una aproximación bastante cercana a la solución exacta en pocas iteraciones en todas las pruebas, como se mostró en los resultados presentados en la última sección del capítulo 3. También se usó este algoritmo para calcular aproximaciones de integrales reales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahlfors, L. 1979. Complex analysis. Tercera edición. McGraw-Hill Book Company. New York.

Gelfand, I., Shilov, G. 1964. Generalized Functions. Vol. 1. Academic Press. New York.

Henrici, P. 1985. Applied and computacional complex analysis. Volumen III, John Wiley & Sons. New York.

Royden, H. 1968. Real Analysis. Tercera edición. Prentice Hall. New Jersey.

Rudin, W. 1966. Principios de análisis matemático. Segunda edición. McGraw-Hill. New York.

Vera, A. y Ezquerro, P. 1997. Un curso de análisis funcional. AVL. Bilbao.

ANEXOS

Programa codificado en MATLAB versión 6.5. Los programas g1 y g2 son subrutinas utilizadas por el programa dci.

function y=dci(z)

```
n=512;
for k=1:n
    zv(k)=exp(2*pi*i*k/n);
end
h=conj(zv);
suma=0;
corr=0;
if (rem(n,2)==0)
    m=n/2;
    for k=1:n
        suma = suma + (zv(k)*h(k))/(zv(k)-z);
        corr = corr + (-1)^(k-1)*(zv(k)+z)*h(k)/(zv(k)-z);
    end
    y=suma/n - g1(z,m)*corr/(2*n);
end
if (rem(n,2)~=0)
    m=(n-1)/2;
    for k=1:n
        suma = suma + zv(k)*h(k)/(zv(k)-z);
        corr = corr + (-1)^(k-1)*sqrt(zv(k))*h(k)/(zv(k)-z);
    end
    y=suma/n - g2(z,m)*corr/(2*n);
end
```

donde:

function y=g1(z,m)

```
if (abs(z) < 1)
    y=z^m;
elseif (abs(z) == 1)
    y=0.5*(z^m + z^(-m));
else
    y=z^(-m);
end
```

```
function g2=g2(z,m)

if (abs(z) < 1)
    g2=z^(m+1);
elseif (abs(z) == 1)
    g2=0.5*(z^(m+1) + z^(-m));
else
    g2=z^(-m);
end
```


Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

Título	EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
BRITO R., EMILIO D.	CVLAC	13539359
	e-mail	emilio_brito@hotmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Transformada de Fourier
Transformada rápida de Fourier
Integración compleja
Teorema de Cauchy-Goursat
Fórmula integral de Cauchy

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias Básicas	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo, se realizó un estudio extenso de las distintas transformadas de Fourier (continua y discreta) y del método numérico que con preferencia se utiliza para hallar sus aproximaciones (transformada rápida de Fourier). También se desarrolló e implementó un algoritmo en MATLAB para la evaluación numérica de la integral de Cauchy.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
RAMOS F., JULIO C.	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input checked="" type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	10949733
	e-mail	jramos@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
LÁREZ, GLADYS	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	3422930
	e-mail	glarez@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
LAFORGUE, JACQUES	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	13498503
	e-mail	laforgue@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2008	06	06

Lenguaje: spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
TESIS-DAVIDRODRIGUEZ	Application

Alcance:

Espacial : Universal (Opcional)

Temporal: Intemporal (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo:
Licenciado en Matemáticas

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciatura

Área de Estudio:

Matemáticas

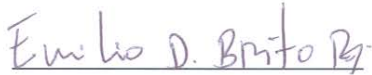
Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

Universidad de Oriente

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso –
5/5

Derechos:

Yo, Emilio David Brito Rodríguez, autor de la tesis de grado titulada:
Evaluación Numérica de la Integral de Cauchy, autorizo la publicación del
título y resumen de este trabajo.



Br. Emilio Brito
AUTOR 1

AUTOR 2

AUTOR 3



Prof. Julio Ramos
TUTOR

AUTOR 4


Prof. Gladys Lárez
JURADO 1



Prof. Jacques Laforgue
JURADO 2

POR LA SUBCOMISIÓN DE TESIS:


Prof. Juan González



