SOBRE EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA BAJO UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN ESTRUCTURAS H-EQUIVALENTES PROYECTIVAS.

Marlene Acuña[1]

[1]mvacuna@sucre.udo.edu.ve

Índice general

Dedicatoria

A mis Padres: Orlando Acuña y Maritza de Acuña.

Y muy especialmente a mi novio Alejandro Cabello.

Gracias a mis hermanas por estar conmigo en todo momento brindándome toda su confianza y máximo apoyo.

Agradecimiento

A Dios Todopoderoso y a la Virgen Del Valle, por permitirme culminar con éxito mi carrera de Maestría.

Al Dr. Said Kas-Danouche por su valiosa disposición para culminar satisfactoriamente este trabajo de investigación.

Al Dr. Ennis Rosas y al Dr. Carlos Carpintero por su apoyo desinteresado y por sus palabras de aliento.

A mi querida amiga Sikiu Bernáez por apoyarme y darme valentía para luchar en los momentos más cruciales en la culminación de este trabajo.

A mis queridos amigos Horacio Rivero^{+}, Saúl Mosqueda, Inés, Jesmaro, Orlando y Abdul por ser los mejores amigos y compañeros del Postgrado y del Departamento de Matemáticas.

Al Dr. William Barreto y al Msc. Richard Malavé por toda su colaboración en las correcciones de este trabajo.

Al Postgrado de Matemáticas de la Universisdad de Oriente y a sus profesores que me dieron clases durante mis cursos de Maestria.

A todos mis amigos un sincero agradecimiento por estar siempre allí para mí.

Resumen

Sea $\mu = (M, \nabla, g)$ y $\bar{\mu} = (M, \bar{\nabla}, g)$ estructuras geométricas, (M variedad diferenciable, ∇, $\bar{\nabla}$ conexiones de Levi-Civita y g la métrica formal) tales que

$$\begin{cases} (\nabla_x g)(Y, Z) & = & A(X, Y, Z) & \in & C^\infty(M), & X, Y, Z \in \chi(M) \\ \bar{S}(X, Y) & = & 0 & & & \end{cases} \quad \text{y}$$

$$\begin{cases} \left(\bar{\nabla}_U g\right)(V, W) & = & 0 \\ \bar{S}(U, V) & = & \bar{\nabla}_U V - \bar{\nabla}_V U - [U, V], \quad U, V, W \in \chi(M), \end{cases} \quad \text{donde } \chi(M)$$

es el conjuto de los campos vectoriales sobre M, $C^\infty(M)$ el conjunto de las funciones diferenciables sobre M. $S(X, Y)$ y $\bar{S}(U, V)$ son los campos de torsión de (M, ∇) y $(M, \bar{\nabla})$, respectivamente. Sea μ y $\bar{\mu}$ estructuras $\mathcal{H}$-equivalentes proyectivas y $x(t)$ el movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético F y energía potencial U siendo $F \in \wedge^k(M)$ una 2 - forma cerrada es decir $dF = 0$. Se plantea en este trabajo: 1) Determinar las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada, cuando F no tiene potencial y $U \neq 0$. Esto es equivalente a determinar el movimiento de una partícula cargada en un sistema hamiltoniano con un lagrangeano. 2) Determinar las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada si F tiene potencial electromagnético y $U = 0$. Esto se reduce a determinar estas ecuaciones a través de estructuras $\mathcal{H}$-equivalentes proyectivas.

Introducción

La solución de muchos problemas planteados en la mecánica clásica, en la teoría de la relatividad y en la teoría cuántica, se logran, en la mayoría de los casos, con el apoyo de una estructura geométrica adecuada. Tal estructura, conformada por un espacio y una forma de medir, proporciona los elementos necesarios para agilizar las soluciones a los problemas planteados. Se observa que en la estructura, espacio-tiempo y la métrica usual, se estableció la primera de las formulaciones de la mecánica teórica, la cual fue desarrollada por Isaac Newton (1643-1727), basándola como se conoce, en tres leyes o principios. Posteriormente, Lagrange (1736-1813), desarrolló su concepción de la mecánica, obteniendo sus famosas ecuaciones diferenciales para escribir la evolución de los sistemas mecánicos [1]. William Rowan Hamilton (1805-1865), utilizó los principios del cálculo variacional para dotar a la mecánica teórica de una concepción intrínseca, que superaba a la desarrollada por Lagrange. Los trabajos de Hamilton fueron desarrollados por grandes físicos y matemáticos como Carl Gustav J. Jacobi (1804-1851), Simeón Poisson (1781-1840), Joseph Liouville (1809-1882). Actualmente, estas formulaciones se ajustan a una estructura simpléctica; es decir, una variedad con una 2-forma cerrada.

Einstein se apoyó en una estructura riemanniana para plantear sus ecuaciones de gravitación universal. En su teoría especial de la relatividad formuló sus leyes en un espacio cuatridimensional, usando la invarianza de la métrica de Lorentz. El trabajo inicial de Einstein concerniente a la teoría especial de la relatividad, "sobre la electrodinámica de cuerpos en movimientos" fue publicado en 1905 y su origen se remonta a la historia de la mecánica clásica, a la teoría electromagnética y al desenvolvimiento matemático y filosófico de la época [6].

Una de las ramas de la física que utiliza la estructura simpléctica, es el electromagnétismo, que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos. Ambos fenómenos se describen en una sola teoría,pero antes de este planteamiento los fenómenos eléctricos y magnéticos habían sido tratados por separado, habiéndose desarrollado teorías desde la antigua Grecia; sin embargo, no fue hasta los últimos años del siglo XVI cuando se realizaron los primeros descubrimientos científicos en ese campo. Morse crea el telégrafo como aplicación de la teoría electromagnética. En 1864, James Clerk Maxwell establece las llamadas Ecuaciones de Maxwell que demostraron y detallaron la relación matemática entre campos eléctricos y magnéticos. Él demostró que tenían la misma naturaleza que la luz: naturaleza de onda; a las cuales se denominó ondas electromagnéticas.

El movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético ha sido objeto de estudio por muchas décadas y ha servido de apoyo para estudiar el movimiento de partículas cargadas eléctricamente, además de determinar las ecuaciones y la trayectoria que la describe bajo un campo electromagnético, usando métodos propios de las ecuaciones diferenciales. En el plano real se han calculado las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada, y su trayectoria, bajo la acción de la fuerza eléctrica o magnética, puede ser de forma hiperbólica, circular, senosoidal, entre otras [7].

Con la introducción de las estructuras proyectivas [2], se han resuelto muchos problemas abiertos en la física, como en la mecánica y otras ramas afines tales como, el problema de Chapliguin, la generalización de los operadores de Suslov, entre otros. La noción de proyectividad elemental, nace con las estructuras proyectivas reales y complejas, luego se extiende el concepto a estructuras diferenciables como variedades y a espacios generados por ellas. Uno de ellos, los espacios de Lyra, son muy utilizados por la geometría diferencial para formular resultados en la física moderna. En [5] se introducen las estructuras $\mathcal{H}$-equivalentes proyectivas, con ellas se establece una relación $\mathcal{H}$-equivalente entre los espacios de Lyra y los sub-espacios proyectivos euclideanos, y entre los espacios de Lyra y los de Weyl.

Cuando existe una geodésica entre dos espacios $\mathcal{H}$-equivalentes, diremos que ellos son proyectivos. En otras palabras, si en dos espacios, las ecuaciones de las geodésicas de éstos tienen las mismas soluciones, entonces los espacios se llamarán proyectivos $\mathcal{H}$- equivalentes. En relación con esta temática, se logra en este trabajo establecer las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético en estructuras $\mathcal{H}$-equivalentes proyectivas.

En el Capítulo 1, se introducen los conceptos básicos para el desarrollo del trabajo tales como el de tensores, formas diferenciales, producto interior para estudiar la geometría mecánica, entre otros.

En el Capítulo 2, se desarrolla la teoría de las estructuras $\mathcal{H}$-equivalentes y los espacios proyectivos $\mathcal{H}$- equivalentes.

En el Capítulo 3, se analiza la dinámica de una partícula cargada en un espacio hamiltoniano de una geodésica y se enuncian algunas propiedades que sirven de base para establecer las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético en los espacios proyectivos $\mathcal{H}$- equivalentes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán algunas definiciones y teoremas sobre tensores, formas diferenciales y curvas integrales para introducir la geometría simpléctica en la mecánica.

1.1. Tensores y Formas Diferenciales en Variedades

En esta sección se hace un breve resumen de los tensores para definir las formas diferenciales.

Definición 1.1.1. *Un* ***tensor*** *T del tipo $\left\langle {k \atop l} \right\rangle$ y de rango $k+l$, en una variedad M de dimensión n y clase C^r, es un objeto que se define, en cada sistema de coordenadas $\left(x_p^1, \ldots x_p^n\right)$ mediante un conjunto de funciones*

$$\overset{(p)}{T}{}^{Z_1,\ldots,Z_k}_{J_1,\ldots,J_\ell}(x);$$

en cualquier otro sistema de coordenadas locales $\left(x_p^1, \ldots x_p^n\right)$ que contiene a x, este *mismo tensor tiene los componentes,*

$$\overset{(q)}{T}{}^{S_1,\ldots,S_k}_{t_1,\ldots,t_\ell}(x),$$

y además , se cumple

$$\overset{(q)}{T}{}^{S_1,\ldots,S_k}_{t_1,\ldots,t_l}(x) = \frac{\partial x_q^{S_1}}{\partial x_p^{Z_1}} \cdots \frac{\partial x_q^{S_k}}{\partial x_q^{t_1}} \frac{\partial x_p^{J_1}}{\partial x_q^{t_1}} \cdots \frac{\partial x_p^{J_\ell}}{\partial x_q^{t_\ell}} \overset{(q)}{T}{}^{S_1,\ldots,S_k}_{t_1,\ldots,t_\ell}(x). \tag{1.1}$$

Definición 1.1.2. *Se llama* ***tensor contravariante*** *al objeto geométrico el cual en cada sistema de coordenadas en M se transforma como tensor del tipo $\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle$, es decir*

$$\xi^k(x) = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j} \hat{\xi}^j(\tilde{x}), \quad k = \overline{1,n}\ , \quad x^k = x^k(\tilde{x}). \tag{1.2}$$

Se llama ***tensor covariante*** *al objeto geométrico el cual se transforma como tensor $\left\langle {0 \atop 1} \right\rangle$, es decir,*

$$\eta_i(x) = \tilde{\eta}_j(\tilde{x}) \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}.$$

Tomando como base estas definiciones, al tensor $\left\langle {p \atop q} \right\rangle$ se le llama p veces contravariante y q veces covariante.

Observación 1.1.1 *En adelante se designará por medio de $\wedge_q^p$ al conjunto de todos los tensores del tipo $\left\langle {p \atop q} \right\rangle$.*

Para los tensores dados en un mismo punto existen varias operaciones algebraicas de las cuales se obtienen nuevos tensores. Las principales de ellas son: suma, multiplicación y contracción.

Definición 1.1.3. ***Suma algebraica de tensores:*** *Sean T y S tensores del conjunto $\wedge_q^p$ entonces,*

$$\lambda T + S \in \wedge_q^p; \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.1.4. ***Producto tensorial:*** *Sean* $S \in \wedge_q^p$, $R \in \wedge_t^r$, *el producto de* S *con* R *es el tensor* $T \in \wedge_{q+t}^{p+r}$ *tal que*

$$T = SR.$$

Definición 1.1.5. *El tensor* $S \in \wedge_q^p$ *se llama simétrico con respecto a los índices* $(J_1), (J_2)$ *si,*

$$S^{i_1 \cdots i_p}_{[J_1 J_2] J_3 \cdots J_p}(x) = 0.$$

Definición 1.1.6. *Un tensor se llama* ***antisimétrico*** *con respecto a los índices* (J_1) *y* (J_2) *si*

$$S^{i_1 \cdots i_p}_{(J_1 J_2) J_3 \cdots J_p}(x) = 0.$$

En forma análoga se introducen estos conceptos para los índices contravariantes.

Consecuencia 1.1.1: En cualquier punto dado de la variedad, los tensores $\wedge_q^p$ forman un espacio lineal de dimensión n^{p+q}.

Definición 1.1.7. *Sean* M *una variedad diferenciable de dimensión* n *y* $\left(x_p^1, ... x_p^n\right)$ *un sistema de coordenadas locales en una carta* M_q, *entonces,*

$$\{\partial_1, ..., \partial_n\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

forma una base para $T(M)$ *donde,*

$$\frac{\partial}{\partial x_p^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_q^i}{\partial x_q^i} \frac{\partial}{\partial x_q^i} \equiv \frac{\partial x_q^i}{\partial x_q^k} \frac{\partial}{\partial x_q^i}.$$

Convenio de Suma de Einstein: *Un índice repetido que aparezca como superíndice y como sub-índice en una expresión, implicará una suma sobre el rango de dicho índice:*

$$\sum_{i=1}^{n} A^i B_i \equiv A^i B_i; \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_i^k B_k^i \equiv A_i^k B_k^i.$$

Ejemplo 1.1.1. 1. *La delta de Kronécker es un tensor mixto: una vez covariante y una vez contravariante.*

$$\bar{\delta}_i^j(x) = \frac{\partial x^j}{\partial y^\ell}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\delta_k^\ell(y).$$

2. *El tensor métrico* $g : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ *definido como*

$$g = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

es un tensor covariante de rango 2

$$\bar{g}_{ij}(x) = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial y^\ell}{\partial x^j} g_{k\ell}(y)$$

3. *El gradiente de* $\phi : M \to \mathbb{R}$ *definido por,*

$$grad(\phi) = \nabla_k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k},$$

es un tensor covariante de rango 1.

Definición 1.1.8. *Sea* $g_{ij}(x)$ *un tensor simétrico tal que* $g_{ij}(x) \in C^1(M)$ *y* $g = \det g_{ij} = |g| \neq 0$. *Definimos el tensor recíproco de* g_{ij} *como el tensor contravariante* $g^{ij}(x)$ *tal que*

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$$

a los tensores g^{ij} *y* g_{jk} *los llamaremos* ***tensores fundamentales***.

Definición 1.1.9. *Se llama* ***tensor asociado*** *al que se obtiene multiplicando*

$A^{i_1,\cdots,i_k}_{J_1,\cdots,J_\ell}$ *por* g_{ij} *o* g^{ij}*.*

Ejemplo 1.1.2.

$$g^{ij}A_{ik\ell} = A^{i}_{\circ k\ell}.$$

Las posiciones ocupadas por los índices movidos se indican por $\circ$*.*

Definición 1.1.10. *Se llaman* ***símbolos de Christoffel de primera especie*** *a la expresión,*

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \quad con \;\; i,j,k = \overline{1,n}$$

Los ***símbolos de Christoffel de segunda especie****, se definen por,*

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\alpha}\,[ij,\alpha]\,, \quad \alpha = \overline{1,n}.$$

Observación 1.1.2 *Los símbolos de Christoffel son simétricos, es decir,*

$$\begin{aligned}[ij,k] &= [ji,k] \\ \Gamma^k_{ij} &= \Gamma^k_{ji}.\end{aligned}$$

1.2. Formas Diferenciales

Para cada espacio tangente $T(M)$, podemos asociarle su dual $T^*(M)$, el cual es el conjunto de las aplicaciones lineales $\varphi : T(M) \to \mathbb{R}$. Una base para $T^*(M)$ es obtenida tomando $\{dx^i\}_{i=1}^n$, donde $x^i : M \to \mathbb{R}$. El conjunto anterior, es en efecto, la base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}_{j=1}^n$ de $T(M)$, puesto que,

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j = \left\{\begin{array}{ll} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{array}\right. .$$

Definición 1.2.1. *Un* ***campo de formas lineales*** *(ó una forma exterior de grado* 1*) en* M*, es una aplicación* $\omega : M \to T^*(M)$*, definida por*

$$\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i \right) = \omega_i dx^i$$

ó simplemente,

$$\omega = \omega_i dx^i \qquad i = \overline{1, n}$$

donde ω_i *es diferenciable, entonces* ω *es llamada* ***forma diferencial de grado*** 1 *ó* 1 ***-forma****.*

Se denotará al conjunto de las 1 *- formas diferenciables por* $\wedge^1(T^*(M))$*.*

Definición 1.2.2. *Un* ***campo de formas bilineal y alternante*** *(ó una* 2 *- forma diferencial) en* M *es una aplicación* ω *que asocia a cada* $p \in M$ *con* $\omega(p) \in \wedge^2(T^*(M)$ *definida por,*

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad i, j = \overline{1, n};$$

ω *es diferenciable si* a_{ij} *lo es.*

Ejemplo 1.2.1. *Si* $\dim(M) = n = 3$*, entonces* $i, j = 1, 2, 3$*. Así,*

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Definición 1.2.3. *Una* k *-* ***forma exterior en*** M *(ó una* k *- forma diferencial) es una aplicación* $\omega : M \to \wedge^k(T^*(M))$ *definida por*

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}), \quad i_j \in \{1, \ldots, n\},$$

donde $a_{i_1\ldots i_k} : M \to \mathbb{R}$ *son diferenciables. Por convención, las* 0 *- formas son funciones* $f : M \to \mathbb{R}$ *diferenciables.*

Se denotará la k - upla $(i_1, ..., i_k)$, $i_1 < .... < i_k$ $i_j \in \{1, ..., n\}$ por I. Esto es,

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i<j} a_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_I a_I dx^I. \end{aligned}$$

En $\wedge^k(T^*(M))$ se definen las operaciones

Definición 1.2.4. ***Suma:*** *Si,*

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_I a_I dx^I, \quad I = (i_1, ..., i_k), i_1 < .... < i_k \\ \varphi &= \sum_I b_I dx^I, \quad I = (I_1, ..., I_s), I_1 < .... < I_s \end{aligned}$$

entonces

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_J) dx^I.$$

Producto exterior: *Si* ω *es una* k *- forma y* φ *una* s *- forma, es decir,*

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_I a_I dx^I, \quad I = (i_1, ..., i_k), i_1 < .... < i_k \\ \varphi &= \sum_J b_J dx^J, \quad J = (J_1, ..., J_s), J_1 < .... < J_s \end{aligned}$$

entonces,

$$\omega \wedge \varphi = \sum_{IJ} a_I b_J dx^I \wedge dx^J.$$

Observación 1.2.1 *La definición de producto exterior es dada de tal manera que si $\varphi_1, ..., \varphi_k$ son 1 - formas, entonces el producto exterior: $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k$, se convierte en una k - $forma$ si se define*

$$\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_k(v_1, ..., v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$$

Lema 1.2.1 *Sean ω una k - forma, φ una s - forma y θ una r - forma. Entonces*

(i) $(\omega \wedge \varphi) \wedge \theta = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$

(ii) $(\omega \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge \omega)$

(iii) $\omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta$, *si* $r = s$.

Demostración: *(ver [3])* ■

Observación 1.2.2 *Aunque $dx^i \wedge dx^i = 0$ esta igualdad no es siempre cierta para cualquier forma ω, es decir $\omega \wedge \omega$ no siempre es nulo.*

Ejemplo 1.2.2. *Si*

$$\omega = x_1 dx^1 \wedge dx^2 + x_2 dx^3 \wedge dx^4, \quad \text{en } \mathbb{R}^4 = M,$$

entonces

$$\omega \wedge \omega = 2x_1 x_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \neq 0.$$

Definición 1.2.5. *Un **álgebra de Grassman**, es aquella, donde se ha definido la* *operación $\wedge$ con la cual los elementos básicos cumplen*

$$\begin{aligned} \xi_I \wedge \xi_J &= \xi_J \wedge \xi_I; \\ 1 \wedge \xi_I &= \xi_I \wedge 1 = \xi_J; \\ \xi_J \wedge \xi_J &= 0; \\ 1 \wedge 1 &= 1. \end{aligned}$$

$\wedge^k(T^*(M))$ *- es un* ***álgebra de Grassman asociativa.***

Definición 1.2.6. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una 0 - forma. Entonces* ***el diferencial de*** *f, df, se define por*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Es claro que df es una 1 - forma diferencial.

Definición 1.2.7. *Sea $\omega = \sum_I a_I dx^I$ una k - forma diferencial en M, el diferencial exterior $d\omega$, se define por*

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge x^I.$$

El operador $d : \wedge^k(T^*(M)) \to \wedge^{k+1}(T^*(M))$; es decir, lleva k - formas a $k+1$ - formas.

Lema 1.2.2 *Sean ω y θ, k - formas, φ s - forma. Entonces*

(i) $d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$

(ii) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$

(iii) $d(d\omega) = d^2\omega = 0.$

Demostración: (Ver [3]). ■

1.3. Elementos de Geometría Diferencial

Definición 1.3.1. *Una variedad pseudo-riemanniana(o semi- riemanniana) es una variedad diferenciable M con una métrica g definida de la siguiente manera*

$$g(X,Y) \neq 0$$

para cada $X, Y \in \chi(M)$.

Definición 1.3.2. *Se define la* ***derivada covariante*** *a la aplicación*

$$\begin{array}{rlcl} \nabla : & \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & (U,V) & \mapsto & \nabla_U V, \end{array}$$

que es $C^\infty(M)$ - lineal respecto a U, $\mathbb{R}$ - lineal respecto a V y para la cual se cumple la igualdad

$$\nabla_U(fV) = U(f)V + f\nabla_U V, \tag{1.3}$$

para toda $f \in C^\infty(M)$.

Definición 1.3.3. *Una* ***Conexión afín*** *es una forma bilineal, $\Gamma : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, tal que*

$$\begin{cases} \Gamma(U,V) &= \nabla_U V - UV \\ \Gamma(\partial_i, \partial_j) &= \Gamma^n_{ij}(p)\partial_n - \partial_i\partial_j, \quad p \in M. \end{cases}$$

Las funciones $\Gamma^n_{ij}(p) \in C^\infty(M)$ son las componentes de Γ.

De (1.3), evidentemente se deduce que entre Γ y ∇ existe una relación biunívoca, por lo tanto, de ahora en adelante se puede llamar a ∇ una conexión afín. La pareja $A_N = (M, \nabla)$ se llamará **espacio de conexión afín.**

Definición 1.3.4. *Sea γ la aplicación*

$$\begin{array}{rcll} \gamma: & [a,b] & \rightarrow & M \\ \dot{\gamma}: & (a,b) & \rightarrow & T(M), \quad a,b \in \mathbb{R} \end{array}$$

y sea $V \in \chi(M)$ tal que

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t)), \tag{1.4}$$

para todo $t \in [a,b]$. Entonces, V ***se traslada paralelamente a lo largo de*** *γ, si*

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} V = 0.$$

Definición 1.3.5. ***Las geodésicas*** *del espacio con conexión afín $A_N = (M, \nabla)$, son las ecuaciones*

$$\begin{cases} \dot{x}^k & = V(x^k) \\ \nabla_V V & = (\dot{V}^k + \Gamma^k_{nm}(x)\dot{x}^n\dot{x}^m)\partial_k \quad = \quad 0. \end{cases}.$$

Definición 1.3.6. *La aplicación $[U,V] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, $U,V \in \chi(M)$, definida por*

$$[U,V] f = U(Vf) - V(Uf), \tag{1.5}$$

define el ***Corchete de Lie****.*

De la relación (1.5) se deduce que

$$[U,V] = -[V,U]$$

$$[[U,V], W] + [[V,W], U] + [[W,U], V] = 0; \tag{1.6}$$

la relación (1.6) es conocida como **la identidad de Jacobi**.

Definición 1.3.7. *Se define el campo vectorial de **Torsión S** de la conexión* ∇ *por*

$$S(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V]\,. \tag{1.7}$$

*Se define el campo vectorial de **Curvatura R** de la conexión* ∇ *por*

$$R(U,V)W = [\nabla_U, \nabla_V]\,W - \nabla_{[U,V]}W, \tag{1.8}$$

para todo $U, V, W \in \chi(M)$.

1.4. Curvas Integrales de Campos Vectoriales

Sea M una variedad diferenciable, X un campo vectorial sobre M. Entonces X define una ecuación diferencial de primer orden, más precisamente, si $\dim(M) > 1$ entonces para cualquier curva $c : I \to M$, se tiene

$$\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}X(c).$$

Esto significa que para cada $p \in M$, debemos encontrar un intervalo abierto $I = I_p$ entorno a $0 \in \mathbb{R}$, y una solución de la ecuación diferencial para $c : I \to M$ con su respectiva condición inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \frac{dc}{dt}(t) & = & X(c(t)), & \forall t \in I \\ c(0) & = & 0. & \end{array} \right. .$$

En coordenadas locales,

$$\begin{array}{rcl} c(t) & = & (c^1(t), \ldots c^n(t)), \quad \dim(M) = n \\ X & = & X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \end{array}$$

entonces se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dc^i}{dt}(t) = X^i(c(t)), \quad c(0) = p.$$

Puesto que por la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; específicamente el teorema de existencia y unicidad, el sistema anterior, tiene solución única, en variedades se expresa mediante

Lema 1.4.1 *Para cada $p \in M$, existen, un intervalo abierto $I_p \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I_p$ y una curva diferenciable $c_p : I_p \to M$, con*

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt}(t) & = & X(c(t)), & \forall t \in I \\ c(0) & = & 0 \end{cases},$$

Puesto que la solución también depende diferencialmente de la condición inicial $p = c_p(0)$, entonces por la teoría de las ecuaciones diferenciales se tiene el siguiente

Lema 1.4.2 *Para cada $p \in M$, existe una vecindad abierta U de p y un intervalo abierto I, con $0 \in I$, con la propiedad de que para cada $q \in U$, la curva,*

c_q $(\dot{c}_q(t) = X^i(c_q(t)),\ \ c(0) = p)$, está definida en I. La aplicación

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I \times U & \to & M \\ & (t, q) & \to & c_q(t) = \varphi(t, q) \end{array}$$

es diferenciable.

Definición 1.4.1. *La aplicación $(t, q) \to c_q(t)$ es llamada* ***flujo local*** *del campo vectorial X. La curva $c_q(t)$ es llamada* ***curva integral de*** *X a través de q.*

Notation 1.4.1. *Si t es fijo, se tiene,*

$$\varphi(t, q) = \varphi_t(q) = c_q(t)$$

y $\varphi_t : U \to U$.

Teorema 1.4.2. *Si $s, t, s + t \in I_q$ son fijos, entonces*

1. $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$
2. φ_0 *es la identidad*
3. $\varphi_t(U) = U$*; es decir* $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ *son difeomorfismos.*

Demostración: Puesto que $\varphi_t : U \to U$, por el lema 1.4.2, existe un intervalo I con $0 \in I$ tal que la curva c_q está definida en I para cada $q \in U$.

Entonces,

$$\varphi_{s+t}(q) = c_q(s + t), \tag{1.9}$$

por otro lado,

$$\varphi_s(q) = c_q(s)$$

y

$$\varphi_t(c_q(s)) = c_q(s + t).$$

Esto implica que,

$$c_q(s + t) = \varphi_t(\varphi_s(q)) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(q), \tag{1.10}$$

comparando (1.9) con (1.10) se concluye,

$$\varphi_{s+t}(q) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(q) \Rightarrow \varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s};$$

Esto prueba (1).

Ahora, si $t = -s$, en (1.10) se tiene,

$$\varphi_{-s} \circ \varphi_s = \varphi_{-s+s} = \varphi_0,$$

luego,

$$(\varphi_{-s} \circ \varphi_s)(q) = \varphi_0(q) = c_q(0) = q$$

lo que implica que φ_{-s} es la inversa de φ_s y φ_0 es la identidad. Esto prueba (2).

Ahora se prueba (3). Como,

$$\varphi_s(q) = c_q(s)$$

y

$$\varphi_{-s}(q) = c_q(-s)$$

y c_q es diferenciable por definición, entonces φ_s es un difeomorfismo y

$$\varphi_s(U) = U.$$

■

Definición 1.4.2. *Una familia* $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ *(*$I \subset \mathbb{R}$ *intervalo abierto, con* $0 \in I$*) de difeomorfismos de* M *a* M *que satisfacen* (1) *del teorema anterior, es llamada* ***grupo local a*** 1 - ***parámetro*** *de difeomorfismos.*

En general, un grupo local a 1 - parámetro, no necesita ser extendible a todo $\mathbb{R}$, puesto que el intervalo de definición I_q de c_q, no necesita ser todo $\mathbb{R}$, lo cual puede ser visto en el siguiente

Ejemplo 1.4.1. *Si* $M = \mathbb{R}$,

$$X(\tau) = \tau^2 \frac{d}{dt},$$

entonces $\dot{c}(t) = c^2(t)$, $c_s(0) = s \in \mathbb{R}$, *implica,*

$$c(t) = \frac{1}{t+k}.$$

Cuando $t = 0$,

$$c(0) = \frac{1}{0+k} = s,$$

luego,

$$k = \frac{1}{s},$$

así,

$$c(t) = \frac{1}{t+1/s},$$

o,

$$\varphi_t(s) = \frac{1}{t+1/s}.$$

Vemos que φ_t *no es diferenciable en* $s = 0$.

Por esto no se necesita que $I = \mathbb{R}$, *para la familia* $\{\varphi_t\}_{t\in I}$.

1.5. La Derivada de Lie

Si X es un campo vectorial sobre M y $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, $I \subset \mathbb{R}$ es un grupo local a 1 - parámetro de difeomorfismos entonces,

$$(\varphi_t^*)\, X = (\varphi_{-t})_* X, \tag{1.11}$$

donde φ^* es el pull back y φ_* la aplicación tangente, (1.11) representará una curva $X_t = X(t)$ en $T(M)$,para todo $t \in I$, la cual se puede derivar para todo t. En particular si,

$$X_t = \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi_t(p)),$$

entonces se tendrá,

$$\left(\varphi_{-t}\right)_* \frac{\partial}{\partial x^i}(\varphi_t(p)) = \left(\frac{\partial \varphi^k_{-t}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)(\varphi_t(p)),$$

donde $\varphi_{-t} = \left(\varphi^1_{-t}, \cdots, \varphi^n_{-t}\right)$ y

$$\frac{\partial \varphi^k_{-t}}{\partial x^i} = \delta^k_i.$$

En general, si $\varphi : M \to N$ es deferenciable, entonces

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \varphi_k}.$$

En el caso $M = N$ y x, $\varphi(x)$ en el mismo sistema de coordenadas, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Si $\omega = \omega_i dx^i$, entonces,

$$\left(\varphi^*_t\right)(\omega)(p) = \omega_i(\varphi_t(p))\frac{\partial \varphi^i_t}{\partial xk}dx^k,$$

la cual es una curva en $T(M)$.

En general para $\varphi : M \to N$ diferenciable y una ω 1 - forma sobre N,

$$\varphi^*\omega = \omega_i(\varphi(p))\frac{\partial z^i}{\partial x^k}dx^k,$$

donde $z^i, i = \overline{1, m},\ \dim(N) = m$, es el sistema de coordenadas en N. Se observa que φ no necesita ser un difeomorfismo.

Análogamente, para $g = g_{ij} dz^i dz^j$ sobre $T^*(N) \times T^*(N)$

$$\varphi^* g = g_{ij} \frac{\partial z^i}{\partial x^k} \frac{\partial z^j}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell.$$

Finalmente, para $f : N \to \mathbb{R}$, se tiene,

$$\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t$$

y $\varphi : M \to N$ un difeomorfismo, Y un campo vectorial sobre N,

$$\varphi^* Y = \left(\varphi^{-1}\right)_* Y.$$

Definición 1.5.1. *Sean X un campo vectorial con un grupo local a 1 - parámetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ y S un tensor sobre M.* ***La derivada de Lie*** *de S en la dirección de X se define por*

$$L_X S = \frac{d}{dt} \left(\varphi_t^* S\right)\big|_{t=0}$$

o equivalentemente,

$$L_X S = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^* S - S}{t}.$$

Teorema 1.5.1. *1. Si $f : M \to N$ es diferenciable. Entonces*

$$L_X(f) = df = X(f).$$

2. Si Y es un campo vectorial sobre M. Entonces

$$L_X Y = [X, Y].$$

3. *Si* $\omega = \omega_j dx^j$ *es una 1 - forma diferencial sobre* M*. Entonces para*

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

se tiene,

$$L_X \omega = \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \omega_i \right) dx^j.$$

Demostración: (Ver [2]). ■

Definición 1.5.2. *Sea* M *una variedad riemanniana con métrica riemanniana*

$$g = g_{ij}(x) dx^i dx^j.$$

Un campo vectorial X *en* M *es llamado* ***campo de Killing*** *si,*

$$\left(L_X g \right)(Y, Z) = 0 \qquad \forall Y, Z \in \chi(M).$$

Lema 1.5.1 *La derivada de Lie cumple la relación*

$$\left(L_X g \right)(Y, Z) = Xg(Y, X) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z)$$

Demostración: (Ver [10]). ■

1.6. Producto Interno en una Variedad

Definición 1.6.1. *Sea* M *una variedad,* $X \in \chi(M)$ *y* $\omega \in \wedge^{k+1}(T^*(M))$*, entonces se define* $\iota_X \omega$*, como el operador* ***producto interno de*** ω ***en la dirección de*** X*, dado por*

$$\iota_X \omega(X_1, ..., X_k) = \omega(X, X_1, ..., X_k),$$

$\iota_X : \wedge^k(T^*(M)) \to \wedge^{k+1}(T^*(M))$*, donde* $X_j \in \chi(M), j = \overline{1, k}$.

Observación 1.6.1 *Si $\omega \in \wedge^0(T^*(M))$, entonces conviene colocar $\iota_X\omega = 0$.*

Teorema 1.6.1. *Sea $\iota_X : \wedge^k(T^*(M)) \to \wedge^{k+1}(T^*(M)), k = \overline{1,n}$, para cada $\omega \in \wedge^k(T^*(M))$, $\varphi \in \wedge^\ell(T^*(M))$ y $f \in \wedge^0(M)$, se tienen*

1. $\iota_X(\omega \wedge \varphi) = (\iota_X\omega) \wedge \varphi + (-1)^k\omega \wedge (\iota_X\varphi)$

2. $\iota_{fX}\omega = f\iota_X\omega$

3. $\iota_X df = L_X f$

4. $\iota_X\omega = \iota_X(d\omega) + d(\iota_X\omega)$

5. $L_{fX}\omega = fL_X\omega + df \wedge \iota_X\omega$

6. $\iota_{[X,Y]}\omega = L_X(\iota_Y\omega) - \iota_Y L_X\omega$

7. $L_X(\iota_X\omega) = \iota_X L_X\omega.$

Demostración: (Ver [3]). ■

Teorema 1.6.2. *Sean M , N variedades y $f : M \to N$ un difeomorfismo. Entonces, si $\omega \in \wedge^k(T^*(M))$ y $Y \in \chi(M)$, se tiene ,*

$$\iota_{f^*Y}(f^*\omega) = f^*(\iota_Y\omega).$$

Definición 1.6.2. *Una k **- forma** ω, **es cerrada**, si*

$$d\omega = 0,$$

*y es **exacta** si existe $\alpha \in \wedge^{k+1}(T^*(M))$ tal que*

$$\omega = d\alpha.$$

En el caso de que $\alpha \in \wedge^0(M)$, ésta es no nula.

Teorema 1.6.3. *Cada forma exacta es cerrada.*

Teorema 1.6.4. *(**Lema de Poincaré**). Si ω es cerrada, entonces para cada $p \in M$, existe una variedad U de p para la cual $\omega|_U$ es exacta.*

Demostración: (Ver [3]). ■

1.7. Geometría Simpléctica Mecánica

Para motivar la introducción de la geometría simpléctica en la mecánica, se considerará brevemente, las ecuaciones de Hamilton.

Partiremos de la segunda ley de Newton, la cual establece que, una partícula de masa $m > 0$, moviéndose con una energía potencial $V_q, q = (q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^3$, a lo largo de una curva $q(t)$ en $\mathbb{R}^3$, satisface la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$m\ddot{q} = m\frac{d^2q}{dt} = -gradV_q \tag{1.12}$$

si se introduce, el momentum,

$$p_i = m\dot{q}^i,$$

y la energía,

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\|p\|^2 + V(q),$$

entonces (1.12) es equivalente a,

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \text{Ecuaciones de Hamilton.}$$

Se procede a estudiar este sistema de ecuaciones de primer orden, para un $H(q,p)$ general. Para esto se introduce la matriz,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad 3×3. Si $\xi = (q,p)$, entonces,

$$\begin{aligned} JgradH(\xi) &= JgradH(q,p) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right) \\ &= \left(I\frac{\partial H}{\partial p}, -I\frac{\partial H}{\partial q} \right) \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = (\dot{q}, \dot{p}) \\ &= \dot{\xi} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$JgradH(\xi) = \dot{\xi} \tag{1.13}$$

Esto permite transformar (1.12) en (1.13).

Sea,

$$X_H = JgradH,$$

entonces,

$$\xi(t) = (q(t), p(t)),$$

satisface las ecuaciones de Hamilton (1.12) si y sólo si $\xi(t)$ es una curva integral de X_H; esto es,

$$\frac{d\xi}{dt}(t) = \dot{\xi}(t) = X_H(\xi(t)), \tag{1.14}$$

entonces la relación entre X_H y H, puede ser obtenida de la siguiente manera:

- Se introduce una 2 - forma bilineal antisimétrica ω, sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definida por

$$\omega(v_1, v_2) = v_1 J v_2, \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

  donde $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2); \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^3.$

- Entonces se tiene para todo $\xi \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$,

$$\omega(X_H(\xi), v) = dH(\xi)v$$

  siendo,

$$\begin{aligned} dH(\xi) &= dH(q,p) \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_{i.} \end{aligned}$$

  A ω se le llamará **forma simpléctica** sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y X_H **el campo vectorial hamiltoniano, con energía** H.

Este procedimiento descrito, permite pasar de la mecánica clásica, a la mecánica moderna a través de la Geometría Diferencial.

1.7.1. Mecánica Hamiltoniana

Supongamos que M es una variedad con coordenadas locales $(x^1, ..., x^n)$ y que

$$\begin{array}{rlcl} K: & T^*(M) \times I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (t, x, \dot{x}) & \mapsto & K(t, x, \dot{x}) = K(t, x(t), \dot{x}(t)) \end{array},$$

es una función diferenciable, donde $I \subset \mathbb{R}$ es abierto.

Se quiere obtener la condición necesaria para que

$$S = \int_{t_0}^{t_1} K(t, x^1, ..., x^n, \dot{x}^1, ...\dot{x}^n)dt \tag{1.15}$$

sea un extremal (máximo o mínimo). Para esto, sea $c : I \to M$, la curva que hace extremal a S, es decir $c = c(t),\ \ t_0 \leq t \leq t_1$. Se considera $\bar{c}(t) + \xi\eta(t)$ una curva muy próxima a c, siendo ξ independiente de t y de manera que $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$.

El valor de S para esta curva muy próxima es

$$S = \int_{t_0}^{t_1} K(t, x^1 + \ \xi\eta, ..., x^n + \xi\eta, \dot{x}^1 + \xi\dot{\eta}, ...\dot{x}^n + \xi\dot{\eta})dt,$$

y será extremal para $\xi = 0$. La condición necesaria para que S sea un extremal es que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^j}\right) - \frac{\partial K}{\partial x^j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.16}$$

Esta ecuación es conocida en mecánica como las ecuaciones de Euler-Lagrange, cuando $K = L$ (L- Lagrangeano).

Teorema 1.7.1. ***(Principio de Hamilton)*** *Dados $U \subset M$ un abierto con coordenadas $(q^1, ..., q^n)$; $T^*(U)$ con coordenadas $(q^1, ..., q^n, p_1, ..., p_n)$ y $H : T^*(M) \to \mathbb{R}$, diferenciable. Entonces las ecuaciones de Hamilton para H se obtienen a partir de* (1,17)*, cuando $K = p_i\dot{q}^i - H$, y se expresan por*

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i.$$

Demostración: De (1.16) se obtiene, para las coordenadas $q^1, ..., q^n$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} = 0,$$

luego,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}(p_i\dot{q}^i - H\right) - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(p_i\dot{q}^i - H\right) = 0$$

después de ciertas manipulaciones se obtiene,

$$\frac{d}{dt}p_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} = 0 \Longrightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Ahora, para las coordenadas $p_1, ..., p_n$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{p}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial p^i} = 0,$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{p}_i}(p_i\dot{q}^i - H\right) - \frac{\partial}{\partial p_i}\left(p_i\dot{q}^i - H\right) = 0,$$

luego,

$$-\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \Longrightarrow \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Así,

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}\ , \tag{1.17}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (1.17) se conoce como el **Principio de Hamilton o Sistema hamiltoniano.** ■

Notation 1.7.2.

- $M = T(U)$ - *se llama* ***espacio de fase*** *del sistema.*
- U - *se llama* ***espacio de configuración.***

Definición 1.7.1. *Sean M y M' espacios de fase con coordenadas $\left(Q^1, ..., Q^n, \dot{Q}^1, ..., \dot{Q}^n\right)$ y $(q^1, ..., q^n, \dot{q}^1, ..., \dot{q}^n)$ respectivamente. Una aplicación diferenciable y uno a uno $\varphi : M' \to M$, se llama* ***transformación canónica*** *con respecto a las coordenadas dadas, si*

$$\varphi^*(dp_i \wedge dq^i) = dP_i \wedge dQ^i.$$

La importancia de estas transformaciones es que preservan las ecuaciones de Hamilton.

Teorema 1.7.3. *Dada una transformación canónica $\varphi : M' \to M$, dada una aplicación $H : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y una curva $c : I \to M'$ tal que su imagen está contenida en un abierto simplemente conexo de M'. Si $(\varphi \circ c)$ satisface las ecuaciones de Hamilton en M, por H, entonces c satisface las ecuaciones de Hamilton por $\varphi^* H$, en M'.*

Ejemplo 1.7.1. *Sean $p = \sqrt{km}\cos Q$, $\quad q = F senQ$, donde F es un funcional de P. Entonces,*

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + kmq^2) = \frac{k}{2}F^2$$

$$\begin{aligned} dp \wedge dq &= \sqrt{km}(F'\cos QdP - F senQdQ) \wedge (F'senQdP + FQdQ) \\ &= \sqrt{km}FF'dP \wedge dQ, \end{aligned}$$

como la transformación debe ser canónica, entonces,

$$\sqrt{km}FF' = 1,$$

integrando esto se tiene,

$$F = \frac{\sqrt{2}P}{\sqrt[4]{km}},$$

colocando $\omega = \sqrt{km}$, entonces

$$H = \frac{k}{2}F^2 = \omega P,$$

luego las ecuaciones de Hamilton serán:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \omega, \qquad \frac{dP}{dt} = \dot{P} = 0,$$

se obtiene inmediatamente integrando que,

$$Q = \omega t + \alpha, \qquad P = \beta = cte, \quad \alpha = cte,$$

y

$$\begin{cases} p = m\omega \left(\frac{2p}{m\omega}\right)^{1/2} \cos(\omega t + \alpha) \\ q = \left(\frac{2p}{m\omega}\right)^{1/2} sen(\omega t + \alpha) \end{cases},$$

las cuales son las ecuaciones de un oscilador armónico unidimensional.

Definición 1.7.2. *Sea M una variedad riemanniana, con métrica $g = g_{ij}dx^i dx^j$ y sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable. Se define el* ***gradiente de*** *f como*

$$gradf = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1},$$

el cual es un campo vectorial sobre M.

Lema 1.7.1 *Sea*

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j + U(q),$$

donde $U : M \to \mathbb{R}$ diferenciable. Supongamos que H cumple con las ecuaciones de Hamilton

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i,$$

entonces

$$\left(\ddot{q} + \Gamma^k_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = -gradU(q).$$

Demostración: (Ver [3]). ■

Corolario 1.7.1

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = \left(\ddot{q} + \Gamma^k_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = -gradU(q).$$

Demostración: (Ver [3]). ■

1.7.2. Geometría Simpléctica

Las variedades simplécticas constituyen la base para la mecánica hamiltoniana. Se inicia esta sección con un poco de álgebra simpléctica

Definición 1.7.3. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $\omega \in \wedge^2(V^*)$, es decir ,*

$$\omega : V \times V \to \mathbb{R},$$

bilineal.

Se dice que ω es no degenerada si,

$$\omega(v_1, v_2) = 0 \qquad \forall v_2 \in V$$

implica,

$$v_1 = 0.$$

Existen varias alternativas para establecer la no degeneridad de ω,

(a) ω es no degenerada si y sólo si V tiene dimensión par, digamos $2n$ y

$$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \omega \ldots \wedge \omega}_{n-veces},$$

es el volumen de V.

(b) ω es no degenerada si la aplicación lineal $\omega^h : V \to V^*$ definida por

$$\omega^b(v)v' = \omega(v, v'),$$

es un isomorfismo.

(c) ω es no degenerada si $\hat{v} = \{v_i\}_{i=1}^{2n}$ es una base ordenada de V y (α^i) su base dual, entonces

$$(\omega_{ij}) = \omega(v_i, v_j),$$

la matriz de ω, es no degenerada,

$$w = \omega_{ij}\alpha^i \otimes \alpha^j.$$

(d) ω es no degenerada si la matriz transpuesta ω^t de ω, definida por

$$\omega^t(v_1, v_2) = \omega(v_2, v_1),$$

es no degenerada.

Definición 1.7.4. *Una **forma simpléctica** sobre un espacio vectorial V, es una 2- forma ω no degenerada. El par (V, ω) se llama **espacio vectorial simpléctico**. Si (V, ω) y (V', ω') son espacios vectoriales simplécticos, entonces la aplicación lineal $f : V \to V'$ es **simpléctica** si y sólo si*

$$f^*\omega' = \omega.$$

Lema 1.7.2 *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Entonces el conjunto de todas las aplicaciones simplécticas $f : V \to V'$ es un grupo bajo la composición. Tal grupo se llama **grupo simpléctico**, denotado por $S_p(V, \omega)$.*

La generalización del álgebra simpléctica, es la geometría simpléctica.

Definición 1.7.5. *Sea M una variedad y $\omega \in \wedge^2(M)$ una 2 - forma no degenerada. Entonces se definen*

(i) $b : \chi(M) \to \chi^*(M)$ *por*

$$X^b = \iota_X \omega = \omega^b(X), \quad \forall X \in \chi(M).$$

(ii) $\sharp : \chi^*(M) \to \chi(M)$, *por*

$$\alpha^\sharp = \omega^\sharp(\alpha), \quad \alpha \in \chi(M).$$

se observa que,

$$\left(X^b\right)^\sharp = \left(\omega^b(X)\right)^\sharp = X$$

y

$$\left(\alpha^\sharp\right)^b = \left(\omega^\sharp(\alpha)\right)^b = \alpha.$$

Definición 1.7.6. *Una forma simpléctica (o una estructura simpléctica sobre una variedad M), es una 2- forma ω, cerrada y no degenerada sobre M. El par (M, ω) define una variedad simpléctica. Las cartas de esta variedad se llaman cartas simplécticas y los componentes funcionales x^i, y^i son llamados coordenadas canónicas. Por esto, una carta simpléctica está dada por:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^j.$$

Definición 1.7.7. *Sean (M, ω) y (N, φ) variedades simplécticas. Una función*

$f : M \to N$ diferenciable es llamada simpléctica o ***transformación canónica*** *si*

$$f^* \varphi = \omega.$$

Teorema 1.7.4. *Sean* (M, ω) *y* (N, φ) *variedades simplécticas,* $f : M \to N$ *es diferenciable;* $g : M \to M'$ *y* $h : N \to N'$ *difeomorfismos. Entonces* f *es simpléctica si y sólo si* $h \circ f \circ g^{-1}$ *es una aplicación simpléctica de* $(M', g_*\omega)$ *a* $(N', h_*\varphi)$*, donde* $g_*\omega = \omega \circ g^{-1}$ *y* $h_*\omega = \omega \circ h^{-1}$.

Demostración: (Ver [3]). ■

El hamiltoniano, o campo vectorial hamiltoniano de una función H sobre una variedad simpléctica es obtenido de manera análoga al gradiente de una función sobre una variedad riemanniana.

Definición 1.7.8. *Sea* (M, ω) *una variedad simpléctica y* $H : M \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable dada. El campo vectorial* X_H*, determinado por la condición*

$$\omega(X_H, Y) = dH \circ Y, \quad Y \in \chi(M)$$

ó

$$\iota_{X_H}\omega = dH \tag{1.18}$$

es llamado ***campo vectorial hamiltoniano con energía*** HA*, donde* A *es el potencial.*

La tripleta (M, ω, X_H) *se le llama* ***sistema hamiltoniano****.*

Observación 1.7.1 *Se observa que*

$$X_H = \omega^\sharp(dH).$$

La existencia de X_H *está garantizada por la no degeneridad de* ω*.*

Lema 1.7.3 *Sea* $(q^1,...,q^n,p_1,...,p_n)$ *las coordenadas canónicas para* ω; *es decir,*

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dq^i\wedge dp_i.$$

Entonces, en esas coordenadas,

$$X_H=\left(\frac{\partial H}{\partial p_i},-\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)=JdH,$$

donde,

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix},$$

por esto $(q(t),p(t))$ *es una curva integral de* X_H *si y sólo si se cumplen las ecuaciones de Hamilton*

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}\qquad i=\overline{1,n}.$$

Demostración: Supongamos que

$$X_H=X^i\frac{\partial}{\partial q^j}+X_j\frac{\partial}{\partial p_i}=(X^i,X^j),$$

en las coordenadas $(q^1,...,q^n,p_1,...,p_n)$. Se demostrará que si X_H cumple la condición

$$\iota_{X_H}\omega=dH,$$

entonces

$$X^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\quad \text{y}\quad X_j=-\frac{\partial H}{\partial q^i}\ .$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\iota_{X_H}dq^i &= dq^j(X_H)=X_H(q^j)\\ &= X^i\frac{\partial q^j}{\partial q^i}+X_i\frac{\partial q^j}{\partial p_i}\\ &= X^i\delta_i^j\end{aligned}$$

así,

$$\iota_{X_H} dq^j = X^j.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\iota_{X_H} dp_j &= dp_j(X_H) = X_H(p_j) \\
&= X^i \frac{\partial p_j}{\partial q^i} + X_i \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\
&= X_i \delta_i^j
\end{aligned}$$

así,

$$\iota_{X_H} dp_j = X_j.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\iota_{X_H}\omega &= \iota_{X_H}\left(\sum_{j=1}^{n} dq^j \wedge dp_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \iota_{X_H}(dq^j \wedge dp_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{(\iota_{X_H} dq^j)dp_j - dq^j(\iota_{X_H} dp_j)\right\}
\end{aligned}$$

lo que implica,

$$\iota_{X_H}\omega = \sum_{j=1}^{n} \left\{X^j dp_j - X_j dq^j\right\}$$

como X_H cumple con (1.18), entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{X^j dp_j - X_j dq^j\right\} = \sum_{j=1}^{n} \left\{\frac{\partial H}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j\right\}$$

luego,

$$\left\{\begin{array}{l} X^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ X^j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad X_H = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial p_j},$$

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q^j} \right). \tag{1.19}$$

■

Para ilustrar esta situación se tiene el siguiente

Ejemplo 1.7.2. *Sea*

$$L = \sum_i \left(\frac{1}{c^2} A_i(x) J^i + \sum_{j,i} F_{ji}^2 \right),$$

con

$$F_{ji} = \frac{1}{16\pi c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right),$$

$$J^i = \rho \frac{dx^i}{dt},$$

es la densidad de corriente. Se pide determinar las funciones $A \in C^\infty(D)$ *tales que*

$$\phi(A) = \int_D L d^4 x$$

y

$$\delta\phi = \phi' - \phi(\gamma) = 0,$$

γ *- curva en* D*. En efecto, de la ecuación de Euler-Lagrange,*

$$\frac{\partial L}{\partial A_j} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial A_j} \right) = 0,$$

se obtiene

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial A_j} = \frac{1}{c^2} J^j \\ \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial A_j} \right) = -\frac{1}{4\pi c} F^{ji} \end{cases}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\frac{\partial F^{ni}}{\partial x^i} = -\frac{4\pi}{c} J^n \quad \textit{(Ecuaciones de Maxwell)},$$

donde,

$$F^{ni} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas ecuaciones, también se pueden expresar como

$$\begin{cases} rot\ \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \\ div\ \vec{E} = 4\pi\rho, \end{cases},$$

donde $rot\ \vec{H}$ *denota la rotación de* H *y* $div\ \vec{E}$ *la divergencia de* E, *las cuales se logran como consecuencia de que*

$$d\Omega = 0, \qquad \Omega = F_{ij}dx^i \wedge dx^j \text{ - } 2 - \textit{ forma de Maxwell.}$$

Capítulo 2

Estructuras $\mathcal{H}$ - Equivalentes y Espacios Proyectivos $\mathcal{H}$ - Equivalentes

En este capítulo se estudiarán los espacios de conexión afín $A_N = (M, \nabla)$, donde la conexión ∇ no es concordante con la métrica g. En base a esta conexión se construye una nueva conexión, $\bar{\nabla}$ con la condición de que sea concordante con la métrica. Esto nos llevará a definir las estructuras que llamaremos $\mathcal{H}$-equivalentes y a los espacios proyectivos $\mathcal{H}$-equivalentes.

2.1. Estructuras $\mathcal{H}$ - Equivalentes

Sea $A_N = (M, \nabla)$ un espacio con conexión afín ∇, en vista de que este espacio no es métrico, entonces se introduce una métrica formal g con el objeto de subir y bajar índices tal que,

$$\begin{aligned} g(U,V) &= g(V,U), \quad \forall U,V \in \chi(M) \\ g\left(\partial_i, \partial_j\right) &= g_{ij}(x) \in C^{\infty}(M) \\ \det\left(g_{ij}(x)\right) &= |g| \neq 0 \end{aligned}$$

evidentemente que para la estructura geométrica resultante,

$$\mu = (M, \nabla, g)\,,$$

se tiene, en general que la conexión no es concordante con la métrica g, es decir

$$\left(\nabla_U g\right)(V,W) \neq 0 \qquad \forall U,V,W \in \chi(M).$$

Esto desde el punto de vista físico, no es deseable según Shulin (1983). Martínez y Ramírez (1989), construyen, en base a ∇, una nueva conexión, tal que en la estructura $\bar{\mu} = \left(M, \bar{\nabla}, g\right)$ se tenga la condición

$$\left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W) = 0,$$

es decir, que $\bar{\nabla}$ sea concordante con g.

Definición 2.1.1. *Sea $\mu = (M, \nabla, g)$ y $\bar{\mu} = \left(M, \bar{\nabla}, g\right)$ estructuras definidas respectivamente por:*

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\nabla_U g\right)(V,W) &= A(U,V,W) \in C^{\infty}(M) \\ S(U,V) &= \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V] \end{aligned} \right. , \tag{2.1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W) &= 0 \\ \bar{S}(U,V) &= \bar{\nabla}_U V - \bar{\nabla}_V U - [U,V]\,, \quad U,V,W \in \chi(M), \end{aligned} \right. , \tag{2.2}$$

se dice que μ *es* $\mathcal{H}$ *- equivalente a* $\bar{\mu}$*, si existe una aplicación*

$$\mathcal{H} : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M),$$

tal que

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla_U V + \mathcal{H}(U; V). \tag{2.3}$$

De inmediato se tienen las siguientes caracterizaciones para las estructuras $\mathcal{H}$ - equivalentes.

Lema 2.1.1 *Sea* μ *y* $\bar{\mu}$ $\mathcal{H}$ *- equivalentes, definidas por (2.1) y (2.2) respectivamente, entonces*

$$g(\mathcal{H}(U,V), W) + g(V, \mathcal{H}(U,W)) = A(U,V,W) \tag{2.4}$$

$$S(U,V) = \bar{S}(U,V) + \mathcal{H}(V,U) - \mathcal{H}(U,V) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} R(U,V)W &= \bar{R}(U,V)W + \left(\bar{\nabla}_V \mathcal{H}\right)(U,W) - \left(\bar{\nabla}_U \mathcal{H}\right)(V,W) + \\ &\quad + H(\bar{S}(V,U), W) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$g(\bar{R}(U,V)W_1, W_2) + g(W_1, \bar{R}(U,V)W_2) = 0 \tag{2.7}$$

Demostración:

$$g(\mathcal{H}(U,V), W) + g(V, \mathcal{H}(U,W)) = g\left(\bar{\nabla}_U V - \nabla_U V, W\right) + g(V, \bar{\nabla}_U W - \nabla_U W)$$

$$\begin{aligned} g(\mathcal{H}(U,V), W) + g(V, \mathcal{H}(U,W)) &= \left\{g(\bar{\nabla}_U V, W) + g(V, \bar{\nabla}_U W - U g(V,W)\right\} - \\ &\quad - \{g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W - U g(V,W)\} \\ &= -\left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W) - \{-\left(\nabla_U g\right)(V,W)\} \end{aligned}$$

como $\left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W)=0$ y $(\nabla_U g)(V,W)=A(U,V,W)$, entonces,

$$g(\mathcal{H}(U,V),W)+g(V,\mathcal{H}(U,W))=A(U,V,W)$$

lo que prueba (2.4).

Prueba de (2.5): De (2.1) y (2.2) se obtiene,

$$\begin{aligned} S(U,V)-\bar{S}(U,V) &= \left(\nabla_U V-\bar{\nabla}_V U\right)+\left(\bar{\nabla}_V U-\nabla_V U\right) \\ &= -\mathcal{H}(U,V)+\mathcal{H}(V,U) \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$S(U,V)=\bar{S}(U,V)+\mathcal{H}(V,U)-\mathcal{H}(U,V)$$

que es la relación (2.5).

Prueba de (2.6): Usando la relación (1.8) y la Definición 2.1.1 se tiene,

$$\begin{aligned} R(U,V)W &= \nabla_U\left(\nabla_V W\right)-\nabla_V\left(\nabla_U W\right)-\nabla_{[X,Y]}W \\ &= \nabla_U\left(\bar{\nabla}_V W-\mathcal{H}(V,W)\right)-\nabla_V\left(\bar{\nabla}_U W-\mathcal{H}(U,W)\right)- \\ &\quad -\left(\bar{\nabla}_{[X,Y]}W-\mathcal{H}\left([U,V],W\right)\right) \\ &= \left\{\bar{\nabla}_U\left(\bar{\nabla}_V W\right)-\mathcal{H}\left(U,\bar{\nabla}_V W\right)\right\}-\left\{\bar{\nabla}_V\left(\bar{\nabla}_U W\right)-\mathcal{H}\left(V,\bar{\nabla}_U W\right)\right\}- \\ &\quad -\bar{\nabla}_{[U,V]}W-U\left(\mathcal{H}(V,W)\right)+V\left(\mathcal{H}(U,W)\right)+\mathcal{H}\left([U,V,W]\right) \end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
R(U,V)W &= \bar{\nabla}_U \bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_U W - \bar{\nabla}_{[U,V]} W + \{V\left(\mathcal{H}(U,V)\right) - \\
&\quad -\mathcal{H}\left(U, \bar{\nabla}_V W\right)\} - \left\{U(\mathcal{H}(V,W) - \mathcal{H}\left(V, \bar{\nabla}_U W\right)\right\} - \\
&\quad -\mathcal{H}\left([U,V], W\right) \\
&= \bar{R}(U,V)W + \left\{V(\mathcal{H}(U,W) - \mathcal{H}\left(\bar{\nabla}_U V, W\right) - \right. \\
&\quad \left. -\mathcal{H}\left(U, \bar{\nabla}_V W\right)\right\} - \left\{U(\mathcal{H}(V,W) - \mathcal{H}\left(\bar{\nabla}_U V, W\right) - \right. \\
&\quad \left. -\mathcal{H}(V, \bar{\nabla}_U W)\right\} + \left\{\mathcal{H}\left(\bar{\nabla}_V U, W\right) - \mathcal{H}\left(\bar{\nabla}_U V, W\right) - \right. \\
&\quad -\mathcal{H}\left([V,U,W]\right)\}
\end{aligned}
$$

de aquí se concluye,

$$
\begin{aligned}
R(U,V)W &= \bar{R}(U,V)W + \left(\bar{\nabla}_U H\right)(U,W) - \left(\left(\bar{\nabla}_U H\right)(V,W)\right) + \\
&\quad +\mathcal{H}\left(\bar{S}(V,U), W\right)
\end{aligned}
$$

Prueba de (2.7): Colocando (2.2),

$$
\bar{A}(U, W_1, W_2) = \left(\bar{\nabla}_U g\right)(W_1, W_2),
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{\nabla}_U \bar{A}\right)(V, W_1, W_2) - \left(\bar{\nabla}_V \bar{A}\right)(U, W_1 W_2) &= \bar{A}\left(\bar{S}(V,U)\right), W_1, W_2) - \\
&\quad -g(R(U,V)W_1, W_2) - \\
&\quad -g(W_1, R(U,V)W_2)
\end{aligned}
$$

puesto que,

$$
\left(\bar{\nabla}_U g\right)(W_1, W_2) = 0
$$

entonces,

$$\left(\bar{\nabla}_U \bar{A}\right)(V, W_1, W_2) - \left(\bar{\nabla}_V \bar{A}\right)(U, W_1 W_2) = 0$$

y

$$\bar{A}\left(\bar{S}(V, U)\right, W_1, W_2) = 0$$

por lo tanto,

$$g(\bar{R}(U, V)W_1, W_2) + g(W_1, \bar{R}(U, V)W_2) = 0$$

que es la relación (2.7). ■

Como consecuencia de este lema se tiene

Lema 2.1.2 *Si* $A(U, V, W) = 0$, *entonces de (2.4) se tiene como componentes para* $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_{ij}^n = r\left(\delta_i^n \Omega_j - g^{l\ n} g_{ij} \Omega_l\right),$$

donde

$$\mathcal{H}_{ij}^n = \mathcal{H}\left(\partial_i, \partial_j\right) \in C^\infty(M); \quad \Omega_j = \Omega(\partial_j) \in \wedge(M), \quad \Omega^l = g^{il}\Omega_j \quad y \quad r \in C^\infty(M).$$

Demostración: Se escriben los campos bases $u = \partial_i, \quad v = \partial_j, \quad W = \partial_k$ en (2.4), y se hace $A\left(\partial_i, \partial_j, \partial_k\right) = 0$, entonces queda

$$g(\mathcal{H}(\partial_i, \partial_j), \partial_k) + g(\partial_j, \mathcal{H}(\partial_i, \partial_k) = 0$$

o

$$g(\mathcal{H}_{ij}^{\ n} \partial_n, \partial_k) + g(\partial_j, \mathcal{H}_{jk}^{\ n} \partial_n) = 0.$$

Por hipótesis

$$\mathcal{H}_{ij}^{\ n} g(\partial_n, \partial_k) + \mathcal{H}_{jk}^{\ n} g(\partial_j, \partial_n) = 0$$

$$\mathcal{H}_{ij}^{n} g_{nk} + \mathcal{H}_{jk}^{n} g_{jn} = 0$$

$$r\left(\delta_i^n \Omega_j - g^{l\,n} g_{ij} \Omega_l\right) + r\left(\delta_i^n \Omega_k - g^{l\,n} g_{ik} \Omega_l\right) g_{jn} = 0$$

$$r g_{ik} \Omega_j - r g_{ij} \Omega_k + r g_{ji} \Omega_k - r g_{ik}\ \Omega_j = 0,$$

lo cual indica que $\mathcal{H}_{ij}^{n}$ satisface la relación,

$$g(\mathcal{H}(U,V),W) + g(V, \mathcal{H}(U,W) = 0.$$

$\blacksquare$

Teorema 2.1.1. *Sea μ una estructura que cumple con la relación (2.1), entonces existe una estructura $\bar{\mu}$, $\mathcal{H}$- equivalente con μ.*

Demostración: Se define el campo vectorial $\mathcal{H}(U,V)$ de manera que,

$$g(\mathcal{H}(U,V),W) + g(V, \mathcal{H}(U,W) = A(U,V,W)$$

$$S(U,V) + \mathcal{H}(U,V) - \mathcal{H}(V,U) = \bar{S}(U,V),$$

entonces,

$$\bar{S}(U,V) = \{\nabla_U V + \mathcal{H}(U,V)\} - \{\nabla_V U + \mathcal{H}(V,U)\} - [U,V]$$

luego por la fórmula (2.3) se deduce que,

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla_U V + \mathcal{H}(U,V)$$

y así,

$$\bar{S}(U,V) = \bar{\nabla}_U V - \bar{\nabla}_V U - [U,V]\,.$$

Ahora se probará que $\left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W) = 0.$

En efecto,

$$g(\mathcal{H}(U,V),W)+g(V,\mathcal{H}(U,W))=A(U,V,W)=(\nabla_U g)(U,V)$$

$$g\left(\bar{\nabla}_U V-\nabla_U V,W\right)+g\left(V,\bar{\nabla}_U W-\nabla_U W\right)=(\nabla_U g)(U,V)$$

$$\begin{aligned} g\left(\bar{\nabla}_U V,W\right)+g\left(V,\bar{\nabla}_U W\right) &= (\nabla_U g)(V,W)+g(\nabla_U V,W)+ \\ &\quad +g(V,\nabla_U W) \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$g\left(\bar{\nabla}_U V,W\right)+g\left(V,\bar{\nabla}_U W\right)=Ug(V,W),$$

lo cual implica que $\left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W)=0$.

Se concluye entonces que la estructura

$$\bar{\mu}:\begin{cases} \left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W) = 0 \\ \bar{S}(U,V) = \bar{\nabla}_U V-\bar{\nabla}_V U-[U,V] \end{cases}$$

es $\mathcal{H}$- equivalente con μ. ■

Observación 2.1.1 *En base al Teorema 2.1.1., se puede afirmar que el hecho de que una conexión no sea concordante con la métrica, no representa mayores dificultades; pues siempre se puede definir una **buena conexión**, para la cual se cumple (2.3).*

Definición 2.1.2. *Las estructuras μ, $\bar{\mu}$ y $\tilde{\mu}$ definidas por*

$$\begin{cases} (\nabla_U g)(V,W) = 2\Omega(U)g(V,W), \quad \Omega\in\chi(M) \\ S(U,V) = 0 \end{cases}, \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \left(\bar{\nabla}_U g\right)(V,W) = 0 \\ \bar{S}(U,V) = \mathcal{H}(U,V)-\mathcal{H}(V,U); \end{cases}, \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \left(\tilde{\nabla}_U g\right)(V,W) & = & 0 \\ \tilde{S}(U,V) & = & 0 \end{cases},$$

son conocidas como ***las estructuras de Weyl, de Lyra y de Riemann****, respectivamente.*

2.2. Espacios Proyectivos $\mathcal{H}$ - Equivalentes

En esta sección se definen los espacios proyectivos $\mathcal{H}$ - equivalentes, se enuncian algunas propiedades que servirán de base para lograr una vía para transformar un sistema no holonómico en un sistema holonómico, usando un tensor simétrico.

Es conocido que un sistema mecánico se define por la tripleta

$$\mu = \left(M;\ \phi(\gamma) = \int_\gamma L(\dot{x}, x, t)dt; \quad \theta = F_k dx^k\right), \tag{2.10}$$

donde M, como variedad diferenciable, representa el espacio de fase con N grados de libertad, ϕ es un funcional y $\theta \in \wedge(M)$. Si este sistema mecánico se describe por la ecuación lagrangeana

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{2.11}$$

entonces se dice que μ es un **sistema holonómico,** y cuando el lado derecho de (2.11) es no nulo, entonces el sistema se denomina **no holonómico.** Así se puede enunciar el siguiente

Lema 2.2.1 *Sea μ un sistema mecánico definido por (2.11) donde*

$$L = \frac{1}{2}g(V,V),$$

$$\dot{x} = V = v^j \partial_j,$$

$$F_k = 0, \qquad k = \overline{1, N}$$

Entonces,

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} \right) U^k = g \left(\nabla_V V, V \right), \quad U \in \chi(M). \tag{2.12}$$

Demostración: El tensor L se puede expresar localmente por

$$L = \frac{1}{2} g_{jn} v^j v^n,$$

luego,

$$\frac{\partial L}{\partial v^k} = g_{nk} v^n,$$

y de aquí se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \right) = g_{nk} \dot{v}^n + \partial_j (g_{nk}) g_{nk} v^n v^k. \tag{2.13}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \partial \left(g_{jn} \right) v^j v^n, \tag{2.14}$$

se concluye de (2.13) y (2.14) que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = g_{nk} \dot{v}^n + g_{ks} \Gamma^s_{jn} v^j v^n, \tag{2.15}$$

donde

$$\Gamma^s_{jn}(x) = \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \partial_j \left(g_{nk} \right) + \partial_n \left(g_{jk} \right) + \partial_k \left(g_{jn} \right) \right\}$$

es la conexión afín de la variedad M. Comparando la relación de la Definición 1.3.5 con la relación (2.15), se deduce la relación (2.12). $\blacksquare$

Observación 2.2.1 *La relación (2.12) es muy importante, ya que si se expresa como*

$$g\left(\bar{\nabla}_V V, V\right) = \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} - \bar{S}^m_{kn}\frac{\partial L}{\partial x^m}v^n \right\} U^k, \tag{2.16}$$

y teniendo en cuenta la relación (2.2), se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial v^k} = \bar{S}^m_{kn}\frac{\partial L}{\partial x^m}v^n + g_{kl}H^l_{mn}v^n v^m + \lambda v_k \equiv F_k, \tag{2.17}$$

donde λ es un parámetro arbitrario. La relación (2.17) describe cualquier sistema mecánico.

Observación 2.2.2 *El comportamiento del sistema mecánico definido en el Lema 2.1.1, se puede interpretar como el comportamiento de una partícula que se mueve por las geodésicas del espacio $A_N = (M, \nabla)$; lo que es lo mismo decir que el sistema $\mu = (M, \nabla, g)$ es dinámico equivalente con $\bar{\mu} = \left(M, \bar{\nabla}, g\right)$, descrito por la relación (2.18).*

Lema 2.2.2 *Sean $\mu = (M, \nabla, g)$ y $\bar{\mu} = \left(M, \bar{\nabla}, g\right)$ las estructuras de Weyl y de Lyra respectivamente. Entonces:*

(i) μ se puede representar como un sistema mecánico no holonómico si $\lambda \neq -\Omega_m v^m$.

(ii) $\bar{\mu}$ se puede representar como un sistema mecánico holonómico si $\lambda = 0$.

Demostración: De la relación (2.2) y la Observación 2.2.2, se deduce que

$$\bar{S}^m_{kn} = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^l_{mn} = \Omega_m \delta^l_n,$$

sustituyendo esto en la relación (2.18) resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = g_{kl}\Omega_m \delta_n^l v^n v^m + \lambda v_k \neq 0,$$

pues $\lambda \neq -\Omega_m v^m$. Esto prueba entonces, que la relación (2.3) es equivalente a un sistema mecánico no holonómico. Por otro lado, de la relación (2.8) y la Consecuencia 2.1.2, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{S}_{kn}^m &= r(\Omega_k \delta_n^m - \Omega_n \delta_k^m) \\ H_{mn}^l &= r(\Omega_n \delta_m^l - g^{sl} g_{mn} \Omega_s, \end{aligned}$$

sustituyendo estas relaciones en (2.8), con $\lambda = 0$, se deduce (luego de ciertas manipulaciones) que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0.$$

Esto prueba que la relación (2.18) es equivalente a un sistema mecánico holonómico.

■

Definición 2.2.1. *Las estructuras $\mathcal{H}$-equivalentes, $\mu = (M, \nabla, g)$ y $\bar{\mu} = \left(M, \bar{\nabla}, g\right)$ se llaman **proyectivas**, si las ecuaciones de las geodésicas de los espacios*

$$A_N = (M, \nabla) \quad y \quad \bar{A}_N = (M, \bar{\nabla}),$$

tienen las mismas soluciones; es decir,

$$\nabla_V V = \lambda_1(t) V \quad y \quad \bar{\nabla}_V V = \lambda_2(t) V,$$

donde el campo V cumple con la relación dada en la Definición 1.5.1.

Lema 2.2.3 *Las estructuras de Weyl y de Lyra, son proyectivas, si y sólo si:*

$$\mathcal{H}(U,V)+\mathcal{H}(V,U)=r(\Omega(U)V+\Omega(V)U) \tag{2.18}$$

o tensorialmente,

$$\mathcal{H}_{ji}^{l}+\mathcal{H}_{ij}^{l}=r(\Omega_i\delta_j^i+\Omega_j\delta_i^j)$$

donde r es un parámetro arbitrario.

Demostración: Si las estructuras definidas en (2.8) y (2.9) son proyectivas, entonces,

$$\nabla_V V=\lambda_1(t)V \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_V V=\lambda_2(t)V.$$

Sigue del Lema 2.1.1 y la Observación 2.1.1 que,

$$\begin{aligned} g\left(\lambda_1(t)V,U\right) &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}-\bar{S}_{kn}^{m}\frac{\partial L}{\partial x^m}v^n\right)U^k \\ g\left(\lambda_2(t)V,U\right) &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)U^k, \end{aligned}$$

ahora, por el Lema 2.1.2, se deduce: $\lambda_1(t)=r\Omega(V)$ y $\lambda_2(t)=0, \quad r\in\mathbb{R}$

Así que,

$$\nabla_V V=-r\Omega(V) \quad y \quad \bar{\nabla}_V V=0.$$

Como,

$$\mathcal{H}(V,V)=\bar{\nabla}_V V-\nabla_V V$$

entonces se concluye que,

$$\mathcal{H}(V,V)=r\Omega(V)$$

y de aquí,

$$\mathcal{H}(U,V)+\mathcal{H}(V,U)=r(\Omega(U)V+\Omega(V)U).$$

Recíprocamente, si $\mathcal{H}$ cumple con (2.19) y si $\nabla_V V = \lambda_1(t)V$, entonces,

$$\lambda_2(t) = \lambda_1(t) + a\Omega(V)$$

o,

$$\bar{\nabla}_V V = \lambda_2(t)V,$$

entonces μ y $\bar{\mu}$ son proyectivas. ■

Si se considera mecánico no holonómico $\mu = (M, \nabla, g)$, el cual se describe por las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = \left(g_{jn}B^l_{nk}\right) v^j v^n, \tag{2.19}$$

donde,

$$\begin{aligned} B^l_{kn} - B^l_{nk} &= 0 \\ L &= \frac{1}{2}g(V, V), \end{aligned}$$

entonces se tiene el siguiente resultado;

Teorema 2.2.1. *Las ecuaciones definidas por (2.19) se pueden expresar de la forma*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial w^k}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial x^k} = 0, \tag{2.20}$$

donde

$$L = \frac{1}{2}\theta^2 g(W, W);$$

$$W = \theta V,\ dt = \theta ds,$$

si y sólo si,

$$B_{jk}^{l}=\frac{1}{(N+1)}\left\{B_{jn}^{n}\delta_{k}^{l}+B_{kn}^{n}\delta_{j}^{l}\right\} \tag{2.21}$$

y

$$\theta=\theta_{0}\exp\left(\frac{2}{N+1}\int B_{nl}^{l}dx^{l}\right). \tag{2.22}$$

En base al Lema 2.1.2, se deduce que el Teorema 2.2.1 , se puede enunciar de la siguiente manera:

Teorema 2.2.2. *Sean* $\mu=(M,\nabla,g)$ *y* $\bar{\mu}=\left(M,\bar{\nabla},g\right)$ *estructuras para las cuales se cumplen,*

$$\left\{\begin{array}{c}(\nabla_{U}g)(V;W)=-2U(\ln\theta)g(V,W)\\ S(V,W)=0\end{array}\right.,$$

$$\left\{\begin{array}{c}(\bar{\nabla}_{U}g)(V;W)=0\\ S(V,W)=B(V,U)-H(V,U)\end{array}\right.,$$

entonces se debe determinar la función $\theta:M\rightarrow\mathbb{R}$, *de tal manera que estas estructuras sean proyectivas.*

Demostración: Puesto que las estructuras μ y $\bar{\mu}$ son proyectivas, entonces por el Lema 2.1.2 se tiene,

$$B_{il}^{l}=\frac{1}{2}\left(\Omega_{j}\delta_{k}^{l}+\Omega_{k}\delta_{j}^{l}\right), \tag{2.23}$$

haciendo la contracción $k=l$, sumando, resulta,

$$B_{il}^{l}=\frac{N+1}{2}\Omega_{i}=\frac{N+1}{2}\partial_{i}(\ln\theta). \tag{2.24}$$

Luego, sustituyendo (2.24) en (2.23), se concluye la relación (2.22). Por otro lado, resolviendo (2.25) se tiene la relación (2.23).

Recíprocamente, si se cumplen las relaciones (2.22) y (2.23), entonces de (2.23) se deduce (2.25) y que al sustituirla en (2.22) se obtiene,

$$B_{il}^{l} = \frac{1}{2}\left(\Omega_j \delta_k^l + \Omega_k \delta_j^l\right) = \mathcal{H}_{kj}^{l},$$

como B_{ik}^{l} es simétrico, entonces,

$$\mathcal{H}(W,V) + \mathcal{H}(V,W) = (\Omega(W)V + \Omega(V)W,$$

y así μ y $\bar{\mu}$ son proyectivas. ■

Para ilustrar esta temática se tiene el siguiente,

Ejemplo 2.2.1. *Un móvil con dos ruedas se mueve en una superficie plana. Como es conocido, las ecuaciones de movimiento para este sistema, se describe por las ecuaciones,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{m_0 l}{2b}\dot{x}\dot{y} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial y^k} = \frac{m_0 l}{(2b)^2}\dot{y}\dot{x}, \end{array} \right. ,$$

donde

$$L = \frac{1}{2}\left(g_{11}\dot{x}^2 + g_{22}\dot{y}^2\right) - U,$$

$$g_{11} = m + \frac{c}{2b^2},\ g_{22} = \frac{m}{2b} + \frac{c}{8b^3},$$

$$m = m_0 + 2m_{1,}$$

m_0, m, m_1, l, b *y* c *son ciertos parámetros relacionados con el sistema.*

De acuerdo con la relación (2.20), para $N = 2$, se obtienen

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = g_{11} B^1_{12} \dot{x}\dot{y} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial y^k} = g_{22} B^2_{21} \dot{y}\dot{x}, \end{cases}$$

donde

$$x = x^1, \; y = x^2.$$

De aquí se deduce

$$B^1_{12} = \frac{m_0 l}{2 g_{11} b} \quad \text{y} \quad B^2_{21} = \frac{m_0 l}{g_{22}(2b)^2},$$

sustituyendo las desigualdades para g_{11} y g_{22} resulta

$$B^1_{12} = B^2_{21},$$

así las condiciones del Teorema 2.2.1. se cumplen y

$$\theta = \theta_0 \exp\left(\frac{m_0 l}{3 g_{11} b}\, y\right)$$

que representa la ecuación de movimiento para el sistema.

Capítulo 3

Sobre el Movimiento de una Partícula Cargada Bajo un Campo Electromagnético en Estructuras $\mathcal{H}$- Equivalentes Proyectivas

En este capítulo se analizará la dinámica de una partícula cargada en una geodésica de un campo hamiltoniano y se enunciarán algunas propiedades que servirán de base para establecer las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético en los espacios proyectivos $\mathcal{H}$ - equivalentes.

3.1. Dinámica Hamiltoniana de una Geodésica

En esta sección se revisará la dinámica hamiltoniana de una geodésica, la cual es definida por

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0,$$

en una variedad semi-riemanniana $(M, \langle\ ,\rangle)$, la dinámica hamiltoniana de una partí cula cargada que se discutirá en la próxima sección.

Sea H una función sobre $T(M)$ definida por

$$H(u) = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle \qquad (u \in T(M)),$$

la cual corresponde a la **energía cinética**.

Observación 3.1.1

Notation 3.1.1. *1. Se denota por X_H el campo vectorial hamiltoniano del hamiltoniano H con respecto a la estructura simpléctica ω sobre $T(M)$,es decir,*

$$dH = \imath(X_H)\omega.$$

*2. $\{\ ,\}$ denotará el **corchete de Poisson** sobre $C^\infty(T(M))$ con respecto a ω, la cual es definido por*

$$\{f, g\} = X_f(g) = \omega(X_g, X_f) \qquad \textit{para} \;\; f, g \in C^\infty(T(M)).$$

Cada órbita del flujo geodésico sobre $T(M)$ coincide con la curva integral de X_H.

Se define la aplicación,

$$\begin{array}{rccl} P: & \chi(M) & \rightarrow & (C^\infty(T(M)),\ \{\ ,\}) \\ & Y & \mapsto & P_Y \end{array}$$

por,

$$P_Y(u) = \langle u, Y\rangle\,,$$

donde P es inyectiva.

Si Y es un campo vectorial de Killing, entonces P_Y es una constante conservativa para geodésicas. En otras palabras,

$$\{H, P_Y\} = 0 \tag{3.1}$$

para cualquier campo vectorial de Killing Y.

Proposición 3.1.1.

$$\{P_Y,\ P_Z\} = P_{[Y,Z]} \quad (Y, Z \in \chi(M)).$$

Demostración: Sea $(x^1, ..., x^n)$ un sistema de coordenadas locales sobre M. Las componentes g_{ij} de la métrica $\langle\ ,\rangle$ con respecto a $(x^1, ..., x^n)$ están dadas por (g^{ij}) la matriz inversa de (g_{ij}). Se introduce un sistema de coordenadas locales $(x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^n)$ del $T(M)$, donde los campos son dados por

$$u = u^i(u)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{con} \ \ u \in T(M).$$

La forma local de la estructura simpléctica canónica ω viene dada por

$$\omega = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} u^j dx^i \wedge dx^k + g_{ij} dx^i \wedge du^k.$$

Sean

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y } Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Además,

$$P_Z = g_{ij} Z^i u^j \ \ \text{y } P_{[X,Y]} = g_{jk}\left(Y^i \frac{\partial Z^i}{\partial x^i} - Z^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right) u^k.$$

Dado que,

$$dP_Y = \iota(X_{P_Y})\omega$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}
dP_Y &= d\left(g_{ij}Y^i u^j\right)\\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^i u^j dx^k + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j dx^i + g_{ij}\frac{\partial u^j}{\partial u^k}Y^i du^k\\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^i u^j dx^i + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j dx^i + g_{ij}\delta^j_k Y^i du^k\\
&= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^i u^j dx^k + g_{ij}\frac{\partial Y^i}{\partial x^i}u^j dx^i + g_{ik}Y^i du^k. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\iota(X_{P_Y})\omega &= \iota_{X_{P_Y}}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i \wedge dx^k + g_{ij}dx^i \wedge du^k\right\}\\
&= \iota_{X_{P_Y}}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i \wedge dx^k\right\} + \iota_{X_{P_Y}}\left\{g_{ij}dx^i \wedge dx^k\right\} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Calculando cada uno de los términos de la ecuación (3.3),

$$\iota_{X_{P_Y}}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i \wedge dx^k\right\} = \left\{\iota_{X_{P_Y}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\right\}dx^i \wedge dx^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\left\{\iota_{X_{P_Y}}\left(dx^i \wedge dx^k\right)\right\}$$

como $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j$ es una 0 - forma, resulta,

$$\iota_{X_{P_Y}}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i \wedge dx^k\right\} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\left\{\iota_{X_{P_Y}}\left(dx^i \wedge dx^k\right)\right\}$$

usando el Teorema 1.6.1,

$$\begin{aligned}
\iota_{X_{P_Y}}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i \wedge dx^k\right\} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\iota_{X_{P_Y}}(dx^i)dx^k -\\
&\quad -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\iota_{X_{P_Y}}(dx^k)dx^i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota_{X_{P_Y}}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i\wedge dx^k\right\} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^i)\wedge dx^k - \\ &\quad -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^k)\wedge dx^i. \end{aligned}\tag{3.4}$$

Por otro lado,

$$\iota_{X_{P_Y}}\left\{g_{ij}dx^i\wedge du^k\right\} = \iota_{X_{P_Y}}\left(g_{ij}\right)dx^i\wedge du^k + g_{ij}\iota_{X_{P_Y}}(dx^i\wedge du^k)$$

como g_{ij} es una 0 - forma, se obtiene,

$$\begin{aligned}\iota_{X_{P_Y}}\left\{g_{ij}dx^i\wedge dx^k\right\} &= g_{ij}\iota_{X_{P_Y}}(dx^i\wedge du^k)\\ &= g_{ij}\iota_{X_{P_Y}}(dx^i)\wedge du^k - g_{ij}\iota_{X_{P_Y}}(du^k)\wedge dx^i\\ &= g_{ij}L_{X_{P_Y}}(x^i)\wedge du^k - g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k)\wedge dx^i \end{aligned}\tag{3.5}$$

luego,

$$\begin{aligned}\iota(X_{P_Y})\omega &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^i)\wedge dx^k - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^k)\wedge dx^i + \\ &\quad + g_{ij}L_{X_{P_Y}}(x^i)\wedge du^k - g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k)\wedge dx^i. \end{aligned}\tag{3.6}$$

Como,

$$dP_Y = \iota(X_{P_Y})\omega$$

se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^i u^j dx^k + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j dx^i + g_{ik}Y^i du^k &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^i)\wedge dx^k - \\ &\quad -\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^k)\wedge dx^i + \\ &\quad + g_{ij}L_{X_{P_Y}}(x^i)\wedge du^k - \\ &\quad - g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k)\wedge dx^i \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^i u^j dx^k + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j dx^i + g_{ik}Y^i du^k &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^i)dx^k + \\ &+ g_{ij}L_{X_{P_Y}}(x^i)du^k - \\ &- \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j L_{X_{P_Y}}(x^k) + \right. \\ &\left. + g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k)\right\} dx^i \end{aligned} \tag{3.7}$$

luego, igualando términos,

$$\frac{\partial H}{\partial u^i} = L_{X_{P_Y}}(x^i) = Y^i \ . \tag{3.8}$$

Sustituyendo (3.8) en (3.7), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}Y^i u^j dx^k + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j dx^i + g_{ik}Y^i du^k &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j Y^i dx^k + \\ &+ g_{ij}Y^i du^k + \\ &\left\{-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j Y^k + \right. \\ &\left. + g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k)\right\} dx^i \end{aligned} \tag{3.9}$$

luego,

$$g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j = \left\{-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j Y^k + g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k)\right\};$$

así,

$$g_{ij}L_{X_{P_Y}}(u^k) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j Y^k + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j. \tag{3.10}$$

Operando por g^{ij} en ambos lados de (3.10),

$$\frac{\partial H}{\partial x^j} = L_{X_{P_Y}}(u^k) = g^{ij}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j Y^k + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}u^j\right\} \tag{3.11}$$

por Lema 1.7.3,

$$X_{P_Y} = \frac{\partial H}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u^l} \tag{3.12}$$

Sustituyendo (3.6) y (3.9), se obtiene

$$X_{P_Y} = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} g^{il}u^j\frac{\partial}{\partial u^l}$$

utilizando los resultados anteriores se procede a demostrar la igualdad

$$\{P_Y,\ P_Z\} = P_{[Y,Z]}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\{P_Y,\ P_Z\} &= X_{P_Y}(P_Z) = X_{P_Y}\left(g_{ij}Z^iu^j\right)\\
&= Y^i\frac{\partial g_{ij}Z^iu^j}{\partial x^i} - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} g^{il}u^j\frac{\partial g_{pj}Z^pu^j}{\partial u^l}
\end{aligned}$$

al derivar, resulta

$$\begin{aligned}
\{P_Y,\ P_Z\} &= Y^i\frac{\partial g_{jk}Z^iu^k}{\partial x^i} - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{jk}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} g^{il}u^j\frac{\partial g_{pj}Z^pu^j}{\partial u^l}\\
&= Y^i\frac{\partial g_{jk}Z^i}{\partial x^i}u^k - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{jk}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} g^{il}u^jg_{pj}Z^p\frac{\partial u^j}{\partial u^l}\\
&= Y^i\frac{\partial g_{jk}Z^i}{\partial x^i}u^k - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{jk}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} g^{il}u^j\delta^j_l g_{pj}Z^p\\
&= Y^i\frac{\partial g_{jk}Z^i}{\partial x^i}u^k - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} g^{il}u^jg_{pl}Z^p
\end{aligned}$$

haciendo la contracción $p = i$,

$$\begin{aligned}
\{P_Y,\ P_Z\} &= Y^i\frac{\partial g_{jk}Z^i}{\partial x^i}u^k - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ij}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} \delta^i_pu^jZ^p\\
&= Y^i\frac{\partial g_{jk}Z^i}{\partial x^i}u^k - \left\{Y^k\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{jk}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\right\} Z^iu^j,
\end{aligned}$$

nuevamente una contracción $k = j$,

$$\begin{aligned}
\{P_Y,\ P_Z\} &= Y^i \frac{\partial g_{jk} Z^i}{\partial x^i} u^k - \left\{ Y^j \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} \right\} Z^i u^k \\
&= Y^i \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} Z^i u^k + Y^i g_{jk} \frac{\partial Z^i}{\partial x^i} u^k - Y^j \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} Z^i u^k - g_{jk} \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} Z^i u^k \\
&= g_{jk} \left(Y^i \frac{\partial Z^i}{\partial x^i} - \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} Z^i \right) u^k = P_{[Y,Z]}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\{P_Y,\ P_Z\} = P_{[Y,Z]}.$$

que es el resultado esperado. ■

Un difeomorfismo φ de M induce una transformación de φ_* de $T(M)$.

Un campo vectorial Y de M induce campos vectoriales del $T(M)$ en las dos formas siguientes:

a El campo vectorial hamiltoniano X_{P_Y} de P_Y

b

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi_{t*}\right)(u) \,|_{t\,=\,0},$$

donde $u \in T(M)$ y φ_t es el grupo de transformaciones a 1-parámetro de M generado por Y.

Sea Y un campo vectorial de Killing, por (3.1) el grupo de transformación 1- parámetro de $T(M)$ generado por X_{P_Y} es una transformación simpléctica la cual preserva a H.

Lema 3.1.1 *Sea φ_t el grupo de transformaciones a 1-parámetro de M generado por un campo vectorial*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Entonces el campo vectorial

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_{t*}\right)(u)\ |_{t\ =\ 0}$$

puede ser expresado como:

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_{t*}\right)(u)\ |_{t\ =\ 0} = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum \frac{\partial Y^l}{\partial x^j} u^j \frac{\partial}{\partial u^l}\ .$$

Demostración: Para

$$u \in T(M),$$

el conjunto

$$x = \pi(u) \in M.$$

Se toma una curva $x(s) = (x^1(s), ..., x^n(s))$ en M tal que

$$\dot{x}(0) = u = \sum u^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_{t*}\right)(u)\Big|_{t\ =\ 0} = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{t*}\right)(u)\Big|_{t\ =\ 0}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{ds}\left(\varphi_t\right)(x(s))\Big|_{s\ =\ 0}\right\}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial u^l}$$

aplicando las propiedades de los grupos a 1- parámetro se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\varphi_{t*}\right)(u)\Big|_{t\ =\ 0} &= \frac{d}{dt}\left(C_x(t)\right)\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{d}{ds}\left\{\frac{d}{dt}\left(\varphi_t\right)(x(s))\Big|_{s\ =\ 0}\right\}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{d}{ds}\left\{Y^1(x(s)), ..., Y^n(x(s))\right\}\Big|_{s\ =\ 0}\frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial Y^l}{\partial x^j}u^j\frac{\partial}{\partial u^l}
\end{aligned}$$

realizando la contracción $l = i$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_{t*}\right)(u)\bigg|_{t\,=\,0} = Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{\partial Y^l}{\partial x^j} u^j \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

obteniéndose así, el resultado deseado. ■

Proposición 3.1.2. *Sea φ_{t*} el grupo de transformación a 1-parámetro del $T(M)$ inducido desde el grupo de transformación a 1-parámetro φ_t de M generado por un campo vectorial de Killing Y. Entonces φ_{t*} coincide con el grupo de transformación a 1-parámetro generado por el campo vectorial hamiltoniano de P_Y.*

Demostración: Como Y es un campo vectorial de Killing,

$$\{P_Y, g\} = 0$$

entonces

$$X_{p_Y} = 0$$

por la Proposición 3.1.1

$$X_{p_Y} g = Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \left\{ Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial Y^k}{\partial x^k} g_{jk} \right\} g^{il} u^j \frac{\partial g_{ps}}{\partial u^l}$$

como g_{ps} no depende de u^l, el término$\frac{\partial g_{ps}}{\partial u^l} = 0$; así,

$$X_{p_Y} = Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Como Y es un campo vectorial de Killing, entonces

$$L_Y g(X, Z) = 0,$$

por el Lema 1.5.1,

$$L_Y g(X,Z) = Yg(X,Z) - g(L_Y X, Z) - g(X, L_Y Z) = 0; \tag{3.13}$$

luego, sustituyendo la métrica, (3.13) se puede reescribir como

$$Y\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle - \left\langle L_Y \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, L_Y \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = 0$$

Por oto lado,

$$\begin{aligned}
Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= Y\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= \left\langle L_Y \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, L_Y \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle \\
&= -\left\langle \frac{\partial Y}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial Y}{\partial x^j}, \right\rangle \\
&= -\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} g_{ki}\right),
\end{aligned}$$

operando con el tensor métrico g^{il} en ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned}
Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} g^{il} &= -\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} g^{il} + \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} g_{ki} g^{il}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} g^{il} + \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} \delta_k^l\right) \\
&= -\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} g^{il} + \frac{\partial Y^l}{\partial x^j}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, despejando $\frac{\partial Y^l}{\partial x^j}$de la ecuación anterior, resulta

$$\frac{\partial Y^l}{\partial x^j} = -\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} + Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) g^{il}, \tag{3.14}$$

aplicando $u^j \frac{\partial}{\partial u^l}$ en ambos lados de (3.14),

$$\frac{\partial Y^l}{\partial x^j} u^j \frac{\partial}{\partial u^l} = -\left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} + Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) g^{il} u^j \frac{\partial}{\partial u^l},$$

sumando en ambos lados,

$$Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial Y^l}{\partial x^j} u^j \frac{\partial}{\partial u^l} = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{kj} + Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) g^{il} u^j \frac{\partial}{\partial u^l}$$

usando la Proposición 3.1.1 y el lema anterior, se obtiene

$$X_{P_Y} = Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{\partial Y^l}{\partial x^j} u^j \frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{d}{dt} \left(\varphi_{t*}\right)(u)\bigg|_{t=0}.$$

Por lo tanto,

$$X_{P_Y} = \frac{d}{dt} \left(\varphi_{t*}\right)(u)\bigg|_{t=0}.$$

■

3.2. Dinámica Hamiltoniana de una Partícula Cargada

En esta sección, se estudiará la dinámica hamiltoniana del movimiento de una partícula cargada en una conexión semi-riemanniana de una variedad $(M, \langle\ ,\ \rangle)$.

Sea F una 2 - forma cerrada y U una función sobre una variedad $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ con una conexión pseudo-riemanniana. Se denota al operador del producto interior, inducido por el campo X, por

$$\iota(X) : \wedge^m \to \wedge^{m-1}$$

y la transformación de Legendre

$$\mathcal{L} : T(M) \to T^*(M)$$

que se define por

$$\begin{array}{rlll} \mathcal{L}: & T(M) & \rightarrow & T^*(M) \\ & u & \mapsto & \mathcal{L}(u) = \langle u, v \rangle \qquad (v \in T(M)) \end{array}$$

Definición 3.2.1. *Una curva $x(t)$ es llamada el movimiento de una partícula cargada sobre un campo electromagnético F y una energía potencial U, si satisface la siguiente ecuación diferencial*

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = -gradU - \mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x})F), \tag{3.15}$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita sobre M.

Observación 3.2.1

1. *La ecuación (3.15) es originada de la teoría de la relatividad general. Cuando $F = 0$ y $U = 0$, entonces $x(t)$ es llamada una geodésica.*

2. *Si $x(t)$ es el movimiento de una partícula cargada sobre un campo F y U, entonces la energía total,*
$$\frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + U(x(t))$$
es constante.

3. *A tiene un potencial electromagnético, es decir,*
$$F = dA,$$
entonces el funcional E está definido por
$$E(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + \frac{1}{2}\left(A(\dot{x}) - U(x(t))\right) \right) dt.$$
La ecuación de Euler-Lagrange de E es el movimiento de una partícula sobre F y U.

Se denota por

$$\pi : T(M) \to M,$$

la función tangente sobre M y se define la función H sobre el $T(M)$ por

$$H(u) = \frac{1}{2}(u, u) + U(\pi(u)) \qquad u \in T(M),$$

correspondiente a la energía total.

Se define una 2 - forma cerrada ω_F sobre el $T(M)$ por

$$\omega_F = \omega - \pi^* F.$$

Para cada vector tangente $u \in T(M)$, se denota por x_u al movimiento de una partícula cargada (3.15) con vector inicial u.

El flujo electromagnético $\phi_t : T(M) \to T(M)$ se define por

$$\phi_t(u) = \dot{x}_u(t).$$

Teorema 3.2.1. (1) *La 2−forma cerrada ω_F es una estructura simpléctica.*

(2) *Se denota el campo vectorial hamiltoniano X_H^F del hamiltoniano H con respecto a ω_F.Cada órbita del flujo electromagnético sobre $T(M)$ coincide con la curva integral de X_H^F.*

Demostración: (1) los componentes F_{ij} de F con respecto a $(x^1, ..., x^n)$ están dadas por

$$F_{ij} = F\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

La forma local de la 2−forma cerrada ω_F es dada por la expresión

$$\omega_F = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} u^j dx^i \wedge dx^k + g_{ij} dx^i \wedge du^j - \frac{1}{2} F_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

donde ω_F es no degenerada en cada punto; es decir, ω_F es una estructura simpléctica sobre $T(M)$.

(2) Sea $x(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ una curva en M. Entonces,

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = \left(\ddot{x}^k + \dot{x}^i\dot{x}^j\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Además,

$$gradU = g^{ij}\frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x})F) = \dot{x}^k F_{ki} g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j},$$

la ecuación de movimiento (3.15) de una partícula cargada es equivalente a

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i\dot{x}^j\Gamma^k_{ij} = -g^{ij}\frac{\partial U}{\partial x^i} - \dot{x}^k F_{ki} g^{ij}.$$

El hamiltoniano H, expresado en forma local, es dado por

$$H(x^1, ..., x^n, u^1, ..., u^n) = \frac{1}{2}u^i u^j g_{ij} + U(x^1, ..., x^n),$$

calculando dH,se tiene

$$\begin{aligned}
dH &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}dx^k u^i u^j + \frac{1}{2}g_{ij}\left(\frac{\partial u^i}{\partial u^k}du^k u^j + \frac{\partial u^j}{\partial u^k}du^k u^i\right) + \frac{\partial U}{\partial x^k}dx^k \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^i u^j dx^k + \frac{1}{2}g_{ij}\left(\delta^i_k u^j du^k + \delta^j_k u^i du^k\right) + \frac{\partial U}{\partial x^k}dx^k \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^i u^j dx^k + \frac{1}{2}\left(g_{ji}u^i du^j + g_{ij}u^i du^j\right) + \frac{\partial U}{\partial x^k}dx^k \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^i u^j dx^k + g_{ij}u^i du^j + \frac{\partial U}{\partial x^k}dx^k.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se calcula $\iota\left(X^F_H\right)\omega_F$ usando el teorema 1.6.1,

$$\begin{aligned}
\iota\left(X^F_H\right)\omega_F &= \iota_{X^F_H}(\omega_F) \\
&= \iota_{X^F_H}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i \wedge dx^k + g_{ij}dx^i \wedge du^j - \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j\right\}
\end{aligned}$$

$$\iota\left(X_H^F\right)\omega_F = \iota_{X_H^F}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i\wedge dx^k\right\} + \iota_{X_H^F}\left\{g_{ij}dx^i\wedge du^j\right\} - -\iota_{X_H^F}\left\{\frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j\right\}, \quad (3.16)$$

calculando cada uno de los términos de (3.16)

$$\iota_{X_H^F}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i\wedge dx^k\right\} = \iota_{X_H^F}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\right)dx^i\wedge dx^k + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\left(\iota_{X_H^F}\left\{dx^i\wedge dx^k\right\}\right)$$

como $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j$ es una 0-forma, por el Teorema 1.5.1 se tiene

$$\iota_{X_H^F}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i\wedge dx^k\right\} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\left\{\iota_{X_H^F}\left(dx^i\right)\wedge dx^k - \iota_{X_H^F}\left(dx^k\right)\wedge dx^i\right\}$$

luego,

$$\iota_{X_H^F}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j dx^i\wedge dx^k\right\} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\left\{L_{X_H^F}\left(x^i\right)\wedge dx^k - L_{X_H^F}\left(x^k\right)\wedge dx^i\right\}. \quad (3.17)$$

Por otro lado,

$$\iota_{X_H^F}\left\{g_{ij}dx^i\wedge du^j\right\} = \iota_{X_H^F}(g_{ij})dx^i\wedge du^j + g_{ij}\left\{\iota_{X_H^F}\left(dx^i\wedge du^j\right)\right\}$$

como g_{ij} una 0 - forma se tiene

$$\begin{aligned}\iota_{X_H^F}\left\{g_{ij}dx^i\wedge du^j\right\} &= g_{ij}\left\{\iota_{X_H^F}\left(dx^i\wedge du^j\right)\right\}\\ &= g_{ij}\left\{L_{X_H^F}(x^i)\wedge du^j - L_{X_H^F}(u^j)\wedge dx^i\right\}\end{aligned} \quad (3.18)$$

y

$$\iota_{X_H^F}\left\{\frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j\right\} = \frac{1}{2}\iota_{X_H^F}(F_{ij})dx^i\wedge dx^j + \frac{1}{2}F_{ij}\iota_{X_H^F}\left(dx^i\wedge dx^j\right).$$

Como F_{ij} es una 0 - forma, entonces

$$\iota_{X_H^F}\left\{\frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j\right\} = \frac{1}{2}F_{ij}\left\{L_{X_H^F}(x^i)\wedge dx^j\right\} - \frac{1}{2}F_{ij}\left\{L_{X_H^F}(x^j)\wedge dx^i\right\}$$

$$\iota_{X_H^F}\left\{\frac{1}{2}F_{ij}dx^i\wedge dx^j\right\}=F_{ij}\left\{L_{X_H^F}(x^i)\wedge dx^j\right\} \tag{3.19}$$

luego, por (3.17), (3.18) y (3.19)

$$\begin{aligned}\iota\left(X_H^F\right)\omega_F &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^j\left\{L_{X_H^F}\left(x^i\right)\wedge dx^k-L_{X_H^F}\left(x^k\right)\wedge dx^i\right\}+\\ &\quad +g_{ij}\left\{L_{X_H^F}(x^i)\wedge du^j-L_{X_H^F}(u^j)\wedge dx^k\right\}+\\ &\quad +F_{ik}\left\{L_{X_H^F}(x^i)\wedge dx^k\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota\left(X_H^F\right)\omega_F &= \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^jL_{X_H^F}\left(x^i\right)-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^jL_{X_H^F}\left(x^k\right)-g_{ij}L_{X_H^F}(u^j)+\right.\\ &\quad \left.+F_{ik}L_{X_H^F}(x^i)\right\}dx^k+g_{ij}L_{X_H^F}(x^i)\wedge du^j\end{aligned} \tag{3.20}$$

Como

$$dH=\iota\left(X_H^F\right)\omega_F, \tag{3.21}$$

sustituyendo, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^jdx^k+g_{ij}u^idu^j+\frac{\partial U}{\partial x^k}dx^k. &= \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^jL_{X_H^F}\left(x^i\right)-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^jL_{X_H^F}\left(x^k\right)\right.\\ &\quad \left.-g_{ij}L_{X_H^F}(u^j)+F_{ik}L_{X_H^F}(x^i)\right\}dx^k+\\ &\quad +g_{ij}L_{X_H^F}(x^i)\wedge du^j\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^j+\frac{\partial U}{\partial x^k}\right\}dx^k+g_{ij}u^idu^j &= \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^jL_{X_H^F}\left(x^i\right)-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^jL_{X_H^F}\left(x^k\right)\right.\\ &\quad \left.-g_{ij}L_{X_H^F}(u^j)+F_{ik}L_{X_H^F}(x^i)\right\}dx^k+\\ &\quad +g_{ij}L_{X_H^F}(x^i)\wedge du^j\end{aligned} \tag{3.22}$$

igualando se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}=L_{X_H^F}\left(x^i\right)=u^i, \tag{3.23}$$

sustituyendo (3.23) en (3.22), resulta

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^j + \frac{\partial U}{\partial x^k}\right\}dx^k + g_{ij}u^idu^j &= \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^ju^i - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^ju^i\right. \\ &\left. -g_{ij}L_{X_H^F}(u^j) + F_{ik}u^i\right\}dx^k + \\ &+g_{ij}u^idu^j\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^j + \frac{\partial U}{\partial x^k}\right\}dx^k &= \left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^ju^i - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}u^ju^k\right. \\ &\left. -g_{ij}L_{X_H^F}(u^j) + F_{ik}u^i\right\}dx^k\end{aligned}$$

y despejando, se obtiene

$$\begin{aligned}g_{ij}L_{X_H^F}(u^j) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^j + \frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}u^ju^k + F_{ik}u^i \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^j + \frac{\partial U}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}u^ju^k + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}u^ju^i + F_{ik}u^i\end{aligned}$$

así,

$$g_{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j} = g_{sk}\Gamma^s_{ij}u^iu^j + F_{ik}u^i + \frac{\partial U}{\partial x^k}. \tag{3.24}$$

Ahora, operando por g^{lk}en ambos lados de la ecuación (3.24), se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial x^j} = \Gamma^s_{ij}u^iu^j + g^{kl}F_{ik}u^i + g^{kl}\frac{\partial U}{\partial x^k} \tag{3.25}$$

Por el Lema 1.7.3,

$$X_H^F = \frac{\partial H}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u^l}, \tag{3.26}$$

sustituyendo (3.23) y (3.25) en (3.26), se tiene

$$X_H^F = u^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \left\{\Gamma^s_{ij}u^iu^j + g^{kl}F_{ik}u^i + g^{kl}\frac{\partial U}{\partial x^k}\right\}\frac{\partial}{\partial u^l}.$$

Lo cual es el resultado esperado. ■

De aquí en adelante, se tomará al conjunto $U = 0$.

Se define un campo tensorial ϕ de tipo (1.1) por

$$\phi X = -\mathcal{L}^{-1}(\iota_X F), \qquad\qquad F(X,Y) = \langle X, \phi Y\rangle$$

el cual es skew- simétrica con respecto a $\langle\ ,\ \rangle$, es decir,

$$\phi\langle X,Y\rangle = -\langle X, \phi Y\rangle .$$

Considérese el movimiento de una partícula cargada por

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = \phi X$$

bajo el campo electromagnético F. Se define un subálgebra de Lie $\mathcal{I}_\Phi(M)$ en $\chi(M)$ por

$$\mathcal{I}_\phi(M) = \{X \in \chi(M)\ /\ L_X\langle\ ,\ \rangle = 0; \quad L_X\phi = 0\}$$

para $X \in \mathcal{I}_\phi(M)$, se tiene $d\,(\iota_X F) = 0$.

En efecto,

$$d\,(\iota_X F) = L_X F - \iota_X(dF),$$

como F es una 2 - forma cerrada, entonces

$$L_X F = 0 \quad \text{y} \quad d\,(\iota_X F) = 0.$$

Proposición 3.2.1. *Si* $X, Y \in \mathcal{I}_\phi(M)$, *entonces* $\iota_{[X,Y]}F = -d(F(X;Y)$.

Demostración: Sea Z cualquier campo vectorial de M. Dado que $\langle\ ,\ \rangle$ es paralelo,

$$\begin{aligned} Z(F(X,Y)) &= Z(\langle X, \nabla_Z \phi(Y)\rangle) \\ &= \langle \nabla_Z X, \phi(Y)\rangle + \langle X, \nabla_Z(\phi(Y)) + \phi(Y)\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, \phi(Y)\rangle - \langle \phi(X), \nabla_Z Y\rangle + \langle X, (\nabla_Z \phi)(Y)\rangle . \end{aligned} \tag{3.27}$$

Dado que X y Y son campos vectoriales de Killing,

$$\begin{aligned} L_X \langle Z, \phi Y\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_Z X, \phi Y\rangle + \langle \nabla_{\phi Y} X, Z\rangle = 0 \\ L_Y \langle Z, \phi X\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_Y Z, \phi X\rangle + \langle \nabla_{\phi X} Y, Z\rangle = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

restando (3.27) y (3.28),

$$\langle \nabla_Z X, \phi Y\rangle + \langle \nabla_{\phi Y} X, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \phi X\rangle - \langle \nabla_{\phi X} Y, Z\rangle = 0,$$

como $\langle\ ,\ \rangle$ es simétrica,

$$\langle \nabla_Z X, \phi Y\rangle + \langle Z, \nabla_{\phi Y} X\rangle - \langle \nabla_Y Z, \phi X\rangle - \langle Z, \nabla_{\phi X} Y\rangle = 0,$$

ordenando términos,

$$\langle \nabla_Z X, \phi Y\rangle - \langle \nabla_Y Z, \phi X\rangle = \langle Z, \nabla_{\phi X} Y\rangle - \langle Z, \nabla_{\phi Y} X\rangle ;$$

por ser $\langle\ ,\ \rangle$ bilineal,

$$\langle \nabla_Z X, \phi Y\rangle - \langle \nabla_Y Z, \phi X\rangle = \langle Z, \nabla_{\phi X} Y - \nabla_{\phi Y} X\rangle ; \tag{3.29}$$

dado que X e Y son automorfismos infinitesimales de ϕ,

$$(L_X \phi)(Y) = 0 \Longrightarrow L_X \phi Y + \phi(L_X Y) = 0;$$

como ϕ es skew - simétrica,

$$[X, \phi Y] + \phi\,[X, Y] = 0;$$

luego,

$$\phi\,[X, Y] = -\,[X, \phi Y]\,. \tag{3.30}$$

Siendo el corche de Lie antisimétrico, se tiene,

$$\phi\,[X, Y] = [\phi Y, X]$$

entonces

$$\begin{aligned} L_X \phi Y + \phi(L_X Y) &= 0 \\ -\,[\phi X, Y] - \phi\,[X, Y] &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi\,[X, Y] = [\phi X, Y]\,. \tag{3.31}$$

Por otro lado, aplicando (1.3),

$$(\nabla_X \phi)\,(Y) = \nabla_X(\phi Y) + \phi(\nabla_X Y) \tag{3.32}$$

$$(\nabla_Y \phi)\,(X) = \nabla_Y(\phi X) + \phi(\nabla_Y X) \tag{3.33}$$

$$[\phi X, Y] = \nabla_{\phi X} Y - \nabla_Y(\phi X) \tag{3.34}$$

$$[\phi Y, X] = \nabla_{\phi Y} Y - \nabla_X(\phi Y) \tag{3.35}$$

restando (3.31) y (3.32), se tiene

$$\nabla_{\phi X} Y - \nabla_{\phi Y} Y = [\phi X, Y] + \nabla_Y(\phi X) - [\phi Y, X] + \nabla_X(\phi Y).$$

Usando (3.33) y (3.34),

$$\nabla_{\phi X}Y - \nabla_{\phi Y}Y = [\phi X, Y] - [\phi Y, X] + \phi(\nabla_X Y) - \phi(\nabla_Y X) + \nabla_Y(\phi X) - \nabla_X(\phi Y)$$

por (3.35) y (3.36) se sigue que

$$\nabla_{\phi X}Y - \nabla_{\phi Y}Y = \phi\,[X, Y] + \nabla_Y(\phi X) - \nabla_X(\phi Y). \tag{3.36}$$

Combinando (3.31), (3.33) y (3.36), se obtiene

$$Z(F(X,Y)) = \langle Z, \phi\,[X,Y]\rangle + \langle Z, (\nabla_Y \phi)\,(X)\rangle - \langle Z, (\nabla_X \phi)\,(Y)\rangle + \langle X, (\nabla_Z \phi)\,(Y)\rangle\,.$$

Como ϕ es skew - simétrica y utilizando suma cíclica resulta

$$\begin{aligned} Z(F(X,Y)) &= \langle Z, \phi\,[X,Y]\rangle + \sigma_{X,Y,Z}\,\langle X, (\nabla_Z \phi)\,(Y)\rangle \\ &= -F\left([X,Y]\,, Z\right) = -\iota_{[X,Y]}F(Z). \end{aligned}$$

Por otro lado, por ser F una 2-forma cerrada,

$$dF = 0 \tag{3.37}$$

y

$$\begin{aligned} dF &= L_X F = L_X \langle X, \phi Y\rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, \phi Y\rangle + \langle \nabla_{\phi Y} X, Z\rangle\,, \end{aligned}$$

como $\langle\ ,\ \rangle$ es paralelo

$$dF = Z(F(X,Y) = -\iota_{[X,Y]}F(Z);$$

por lo tanto, se cumple que

$$\iota_{[X,Y]}F = -dF(X,Y).$$

■

3.3. Dinámica de una Partícula Cargada en Estructuras $\mathcal{H}$- Equivalentes Proyectivas

En esta sección se darán las soluciones del movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético en las estructuras $\mathcal{H}$- equivalentes Proyectivas.

Se conoce que para el lagrangeano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g(v,v);$$

donde v es el campo de velocidades, se tiene la siguiente igualdad

$$g\left(\nabla_v v, W\right) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k}\right)W^k \tag{3.38}$$

con v^k son los componentes de v; $\left(v = v^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ y $W \in \chi(M)$.

De (3.38) se deduce que si $\nabla_v v = 0$, entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0; \tag{3.39}$$

es decir, se tiene un sistema lagrangeano holonómico. El sistema (3.39) tiene solución en la teoría.

Ahora, si las estructuras $\mu = (M, \nabla, g)$ y $\bar{\mu} = \left(M, \bar{\nabla}, g\right)$ son $\mathcal{H}$- equivalentes proyectivas, entonces se tendrán las relaciones:

a) $\mathcal{H}(U,V) + \mathcal{H}(V,U) = r\left(\Omega(U)V + \Omega(V)U\right)$ ó

$$\mathcal{H}^l_{ji} + \mathcal{H}^l_{ij} = r\left(\Omega_i\delta^l_j + \Omega_j\delta^l_i\right) \text{ (Tensorialmente)}$$

b) $\bar{\nabla}_U V = \nabla_U V + \mathcal{H}(U,V)$.

Si hacemos $U = V = v$ en b), entonces, para todo $W \in \chi(M)$,

$$\begin{aligned} g\left(\bar{\nabla}_v v, W\right) &= g\left(\nabla_v v + \mathcal{H}(v,v), W\right) \\ &= g\left(\nabla_v v, W\right) + g\left(\mathcal{H}(v,v), W\right), \end{aligned}$$

usando (3.38) se obtiene

$$g\left(\bar{\nabla}_v v, W\right) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k}\right) W^k + g\left(\mathcal{H}^l_{ij} v^i v^j \frac{\partial}{\partial x^l}, W^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$g\left(\bar{\nabla}_v v, W\right) = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} + g_{lk} \mathcal{H}^l_{ij} v^i v^j\right\} W^k. \tag{3.40}$$

Ahora bien, si $\bar{\nabla}_v v = \phi v$, donde ϕ es un tensor de tipo (1.1): (sus componentes son de la forma ϕ^i_j), el cual es antisimétrico, respecto a $g : (g(v, \phi v) + g(\phi v, v) = 0)$. La expresión $\bar{\nabla}_v v = \phi v$ describe el movimiento de una partícula cargada, bajo la acción del campo electromagnético F

$$F(v,v) = g(v, \phi v),$$

tensorialmente,

$$F_{ij} = \phi^l_j g_{il}.$$

Si en (3.40) sustituimos $\bar{\nabla}_v v = \phi v$, entonces resulta

$$g\left(\phi v, W\right) = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} + g_{lk} H^l_{ij} v^i v^j\right\} W^k,$$

o equivalentemente

$$g\left(\phi^l_j v^j \frac{\partial}{\partial x^l}, W^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} + g_{lk} \mathcal{H}^l_{ij} v^i v^j\right\} W^k;$$

luego,

$$\phi^l_j g_{lk} v^j W^k = \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} + g_{lk}\mathcal{H}^l_{ij} v^i v^j \right\} W^k,$$

lo que implica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = g_{lk} v^j \left(\phi^l_j - \mathcal{H}^l_{ij} v^i\right) = F_{jk} v^j - g_{lk}\mathcal{H}^l v^i v^j.$$

Si introducimos el tensor $\phi^l_j = \mathcal{H}^l_{ji} v^i$, entonces,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = g_{lk}\left(\mathcal{H}^l_{ji} - \mathcal{H}^l_{ij}\right) v^i v^j; \tag{3.41}$$

es decir, se tiene un sistema lagrangeano no holonómico, el cual describe el movimiento de la partícula cargada bajo la acción del campo electromagnético F. Resolver (3.41), implicará encontrar la ecuación de la partícula.

La solución de (3.41), la obtendremos de la siguiente manera:

Sea $S^l_{ji} = \mathcal{H}^l_{ji} - \mathcal{H}^l_{ij}$, considerando que μ y $\bar{\mu}$ son proyectivas, de a) se obtiene

$$\mathcal{H}^l_{ji} + \mathcal{H}^l_{ij} = r\left(\Omega_i \delta^l_j + \Omega_j \delta^l_i\right). \tag{3.42}$$

Ahora, por el Lema 2.1.1, las componentes del campo $\mathcal{H}$ son tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^l_{ji} + \mathcal{H}^l_{ij} &= g^{ls}\left(A_{isj} + A_{jis} - A_{sij}\right) + 2\left\{\mathring{\mathcal{H}}^m_{si} g_{mj} + \mathring{\mathcal{H}}^m_{sj} g_{mi}\right\} g^{ls} + \\ &\quad + r\left(\Omega_i \delta^l_j + \Omega_j \delta^l_i - 2g_{ij}\Omega^l\right), \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{H}^l_{ji} - \mathcal{H}^l_{ij} = 2\mathring{\mathcal{H}}^l_{ij} + r\left(\Omega_j \delta^l_i - \Omega_i \delta^l_j\right). \tag{3.43}$$

En este caso,

$$A(U, V, W) = -2U(\ln\theta) g(V, W)$$

o tensorialmente

$$A_{ijk} = -2\frac{\partial}{\partial x^i}(\ln\theta)g_{jk} = -2\Omega_i g_{jk}, \tag{3.44}$$

donde

$$\Omega_i = \frac{\partial}{\partial x^i}(\ln\theta),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^l_{ji} + \mathcal{H}^l_{ij} &= 2\left\{\Omega_s g_{ij} - \Omega_i g_{sj} - \Omega_j g_{si}\right\} g^{ls} + 2\left\{\mathring{\mathcal{H}}^m_{si} g_{mj} + \mathring{\mathcal{H}}^m_{sj} g_{mi}\right\} g^{ls} + \\ &\quad + r\left(\Omega_i \delta^l_j + \Omega_j \delta^l_i - 2g_{ij}\Omega^l\right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

y

$$\mathcal{H}^l_{ij} - \mathcal{H}^l_{ji} = S^l_{ij}; \tag{3.46}$$

usando (3.42) se deduce

$$2\left\{\mathring{\mathcal{H}}^m_{si} g_{mj} + \mathring{\mathcal{H}}^m_{sj} g_{mi} = (2-2r)\left\{\Omega_i \delta^l_j + \Omega_j \delta^l_i + g_{ij}\Omega^l\right\} g^{ls}\right\};$$

es decir,

$$\mathring{\mathcal{H}}^m_{ji} = (1-r)\left(\delta^m_j \Omega_i - \delta^m_i \Omega_j\right), \tag{3.47}$$

sustituyendo (3.47) en (3.42), resulta

$$\mathcal{H}^l_{ij} - \mathcal{H}^l_{ji} = \delta^m_i \Omega_j - \delta^m_j \Omega_i;$$

por lo tanto,

$$\Omega_i = \frac{\partial}{\partial x^i}(\ln\theta) = \frac{1}{(n-1)} S^l_{li},$$

de aquí se deducen

$$\bar{S}^l_{ij} = \frac{1}{(n-1)}\left\{S^p_{ip}\delta^l_j - S^p_{jp}\delta^l_i\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} S^p_{jp} - \frac{\partial}{\partial x^j} S^p_{jp} = 0,$$

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{1}{(n-1)} \int S_{li}^{\ l} dx^i}, \tag{3.48}$$

donde (3.48) describe las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en estructuras $\mathcal{H}-$ Proyectivas.

Bibliografía

[1] Arnold V. I, *Mathematical metods of classical mechanics.* Springer-Verlag. New York. 1978.

[2] Jost Jurgen. *Riemannian geometry and geometric analysis.* Springer. Berlin. 1995.

[3] Abraham, R. and Marsden, J. *Foundations of mechanics.* Perseus books. Cambridge, Massachusetts. 1997.

[4] Ikawa, O (2003). *Hamiltonian dynamics of a changed particle.* Hakkaido Math. J. Vol. 32.

[5] Martínez, R and Ramírez, R (1998). *Lyra spaces.Their application to mechanics.Hadronic.* J. Vol 12. pp. 123-236.

[6] Wrede, Robert C. (1972). *Introduction to vector and tensor analysis.* Dover Publications Inc. New York.

[7] Kraus J & Fleisch D. *Electromagnetismo con aplicaciones.* Editorial McGraw-Hill. Quinta edición. México D.F.1999.

[8] Mc Lane Sauders. *There lecture Notes were prepared with assistamce by a grant from the office of Naval Research.* 1968.

[9] Hayt, Williams H. *Teoría electromagnética.* Editorial McGraw-Hill. Primera edición. 2006.

[10] Acuña, M. *Caracterización de una variedad hessiana vía campos de Killing.* Tesis de grado para optar al titulo de pregrado. U. D. O. 2004.

Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

Título	**SOBRE EL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA BAJO UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN ESTRUCTURAS *H*-EQUIVALENTES PROYECTIVAS**
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Lcda. Marlene del V. Acuña G.	CVLAC	14.596.927
	e-mail	mvacuna@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Dinámica de partículas cargadas,
Electromagnetismo
Estructuras H-equivalentes
Espacios Proyectivos.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	**Matemáticas**

Resumen (abstract):

Sea $\mu=(M,\nabla,g)$ y $\mu=(M,\nabla,g)$ estructuras geométricas, (M variedad diferenciable, ∇, ∇ conexiones de Levi-Civita y g la métrica formal) tales que

$$\begin{cases} (\nabla_{x}g)(Y,Z) = A(X,Y,Z) \in C^{\infty}(M), & X,Y,Z\in\chi(M) \\ S(X,Y) = 0 & \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} (\nabla_{U}g)(V,W) = 0 & \\ S(U,V) = \nabla_{U}V-\nabla_{V}U-[U,V], & U,V,W\in\chi(M), \end{cases}$$

donde $\chi(M)$ es el conjunto de los campos vectoriales sobre M, $C^{\infty}(M)$ el conjunto de las funciones diferenciables sobre M. $S(X,Y)$ y $S(U,V)$ son los campos de torsión de (M,∇) y (M,∇), respectivamente. Sea μ y μ estructuras H-equivalentes proyectivas y $x(t)$ el movimiento de una partícula cargada bajo un campo electromagnético F y energía potencial U siendo $F\in\wedge^{k}(M)$ una 2 - forma cerrada es decir $dF=0$. Se plantea en este trabajo: 1) Determinar las soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada, cuando F no tiene potencial y $U\neq 0$. Esto es equivalente a determinar el movimiento de una partícula cargada en un sistema hamiltoniano con un lagrangeano. 2) Determinar las

soluciones de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada si F tiene potencial electromagnético y U=0. Esto se reduce a determinar estas ecuaciones a través de estructuras H-equivalentes proyectivas.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Dr. Said Kas-Danouche	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [x] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
Dr. Willians Barrreto	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
Mcs. Richard Malavé	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2009	07	21

Lenguaje: **spa**

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
PG_MAG.PDF	Aplicattion / pdf

Alcance:

Espacial: ______________________ (Opcional)

Temporal: ______________________ (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo: MAGISTER SCIENTIARUM

Nivel Asociado con el Trabajo: **MAGISTER SCIENTIARUM**

Área de Estudio: Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado: Universidad de Oriente

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/5

Autor

Jurado Examinador:

Dr.	**SAID KAS-DANOUCHE**	**(TUTOR)**	
Dr.	**WILLIANS BARRETO**	**(JURADO)**	
M.Sc.	**RICHARD MALAVÉ**	**(JURADO)**	

Coordinador del Programa de Postgrado:

Dr. **ENNIS ROSAS**
Nombre y Apellido

Firma y Sello