Saber, Universidad de Oriente, Venezuela.Vol. 15. Nº 1 - 2: 70-74. (2003)

DESCOMPOSICIÓN DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES

FUNCTION CONTINUITY DECOMPOSITION

Ennis Rosas[1], Jorge Vielma[2], Margot Salas[1], Carlos Carpintero[1]

[1] *Universidad de Oriente . Núcleo de Sucre. Departamento de Matemáticas.*
E-mail : erosas@cumana.sucre.udo.edu.ve
[2] *Universidad de los Andes. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas.*

RESUMEN

En este trabajo, estudiamos las funciones (α,β) débilmente continuas y mostramos como resultado principal una generalización de los obtenidos en el trabajo realizado por Rosas y Vielma (1999).

Palabras claves: débilmente continuas, operador intersección, operadores mutuamente duales.

ABSTRACT

In this paper, we study the weakly continuous (α,β) functions and our main result is a generalization of the results given by Rosas and Vielma (1999).

Key words: Weakly continuous, intersection operator, Mutually dual operators.

INTRODUCCIÓN

Rosas y Vielma (1999) introdujeron el concepto de función (α,β) débilmente continua y mostraron que este concepto generaliza las nociones de función débilmente continua dado por Levine (1961) y de expansión continua en el sentido de Tong (1994). También mostraron ellos, que una función f es (α,id) débilmente continua si y sólo si f es (α,β) y (α,β^*) débilmente continua, donde β y β^* operadores mutuamente duales.

En este trabajo, damos una generalización de la descomposición de funciones (α,β) débilmente continuas y mostramos bajo que condiciones una función f es (α,β) y (α,β^*) débilmente continua, con β y β^* son operadores mutuamente duales.

PRELIMINARES

Las siguientes definiciones son básicas a lo largo del desarrollo del presente trabajo.

Definición 1 . Sean (X,τ) un espacio topológico y $\alpha : P(X) \to P(X)$ una función.

Decimos que α es un operador asociado a si para cada $U \in \tau$.

Ejemplo 1. Sean (X,τ) un espacio topológico y definamos $\alpha : P(X) \to P(X)$ como:

a) $\alpha(U) = (Fr(U))^c$, para todo subconjunto U de X ;

b) $\alpha(U) = Cl(U)$, para todo subconjunto U de X ;

c) $\alpha(U) = IntCl(U)$, para todo subconjunto U de X ;

d) $\alpha(U) = Ker(U)$,para todo subconjunto U de X ; donde $Ker(U) = \bigcap\{V : V \in \tau, V \subseteq U\}$.

e) $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos, $\alpha : P(X) \to P(X)$ definido por $\alpha(U) = f^{-1}(f(U))$

Observe que en cualquiera de los casos anteriores α es un operador asociado a .

Recibido: agosto 2002. Aprobado: julio 2003.
Versión final: agosto 2003

Definición 2 . Sean y (Y,σ) espacios topológicos, α y operadores asociados a las topologías τ y , respectivamente. Decimos que una función es (α,β) débilmente continua si y sólo si para cada subconjunto σ - abierto en Y ,

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq Int f^{-1}(\beta(V)).$$

Observación 1 . Supóngase que $f: X \to Y$ es (α,β) débilmente continua. Entonces:

1. Si $\alpha = id$ y $\beta = id$, la función f es continua en el sentido usual.
2. Si $\alpha = id$ y β es el operador clausura , la función f es débilmente continua en el sentido de Levine.
3. Si $\alpha = id$ y β es cualquier operador . La función f es continua en el sentido expansivo de Tong.
4. Existen operadores α y los cuales son muy restrictivos para permitir la existencia de funciones (α,β) débilmente continuas. Por ejemplo: si tomamos $\alpha(V) = (Fr(V))^c$ para cualquier subconjunto V de X y $\beta = id$, entonces no hay funciones $f: X \to Y$ que sean (α,β) débilmente continuas. Sin embargo si exigimos al operador α que satisfaga la condición $= \phi$, entonces las funciones constantes siempre son (α,β) débilmente continuas para cualquier operador β .

Definición 3 . Sea (X,τ) un espacio topológico . Un par de operadores α y sobre τ son mutuamente duales si para cada $V \in \tau$.

Ejemplo 2. . Sea (X,τ) un espacio topológico, α y operadores sobre τ definidos como siguen :

$$\text{y} \quad \beta(V) = Cl(V),$$

es fácil mostrar que α y son operadores mutuamente duales.

Ejemplo 3 . Si α es cualquier operador sobre , entonces definido como $\beta(V) = V \cup \alpha(V)^c$ es mutuamente dual con α .

DESCOMPOSICIÓN DE CONTINUIDAD

Observemos que si es un espacio topológico y α, β son operadores asociados a τ , podemos obtener un nuevo operador sobre X definido como sigue: $\alpha \wedge \beta(V) = \alpha(V) \cap \beta(V)$. Este nuevo operador es llamado el operador intersección de α y .

También podemos ver que si α y son operadores mutuamente duales, entonces $\alpha \wedge \beta = id$, id restringido a τ , donde es el operador identidad.

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 1. Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos, α un operador sobre y operadores sobre σ . Entonces una función es $\left(\alpha, \beta \wedge \beta^*\right)$ débilmente continua si y sólo si f es (α,β) y $\left(\alpha, \beta^*\right)$ débilmente continua.

Demostración . Supóngase que f es $\left(\alpha, \beta \wedge \beta^*\right)$ débilmente continua, entonces para cada conjunto abierto $V \in \sigma$, tendremos

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq Int\left(f^{-1}\left(\beta \wedge \beta^*\right)(V)\right) = Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right) \cap Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right).$$

Concluyéndose de esto último que f es (α,β) y $\left(\alpha, \beta^*\right)$ débilmente continua.

Recíprocamente, supóngase que f es (α,β) y $\left(\alpha, \beta^*\right)$ débilmente continua, entonces para cada conjunto abierto $V \in \sigma$, tendremos:

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right) \text{ y } \alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right).$$

De esto se concluye que

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right) \cap Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right)$$

Por lo tanto f es $\left(\alpha, \beta \wedge \beta^*\right)$ débilmente continua.

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos el siguiente corolario, que es el resultado principal dado en Rosas y Vielma (1999). Más aún, el teorema anterior también generaliza todas las nociones de funciones débilmente continua y funciones expansivas conocidas en la literatura.

Corolario 1. Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos, α un operador sobre y operadores mutuamente duales sobre σ. Entonces una función es (α,id) débilmente continua si y sólo si f es (α,β) y (α,β^*) débilmente continua.

En general, no es cierto que si $f:X\to Y$ es una función continua entonces f sea necesariamente (α,β) y (α,β^*) débilmente continua, donde α sea un operador sobre y operadores duales sobre σ, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4. Sea una función constante, definida como $f(x)=x_0$ para todo $x\in R$, donde R denota la recta real con su topología usual. Definamos operadores α,β y β^* como siguen:

$$\alpha(V)=(Fr(V))^c,\ \beta(V)=Cl(V) \ \text{ y } \ \beta^*(V)=(Fr(V))^c.$$

Sea V cualquier conjunto abierto en R entonces:

$$f^{-1}(V)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ x_0\notin V\\ R & , \ si \ \ x_0\in V\end{cases}; \quad \alpha\left(f^{-1}(V)\right)=\begin{cases}R & , \ si \ \ x_0\notin V\\ R & , \ si \ \ x_0\in V\end{cases};$$

$$\beta(V)=Cl(V); \quad f^{-1}(\beta(V))=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ x_0\notin \beta(V)\\ R & , \ si \ \ x_0\in \beta(V)\end{cases};$$

$$Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ x_0\notin \beta(V)\\ R & , \ si \ \ x_0\in \beta(V)\end{cases};$$

$$f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ x_0\notin \beta^*(V)\\ R & , \ si \ \ x_0\in \beta^*(V)\end{cases};$$

$$Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ x_0\notin \beta^*(V)\\ R & , \ si \ \ x_0\in \beta^*(V)\end{cases}.$$

Sigue de esto, que f es una función continua que no es (α,β) ni (α,β^*) débilmente continua.

Ejemplo 5. Sea $f:R\to R$ una función constante, definida como $f(x)=x_0$ para todo $x\in R$, donde R denota la recta real con su topología usual. Sean α es cualquier operador sobre que satisfaga la condición $\alpha(\phi)=\phi$, y β, β^* operadores duales. Es fácil mostrar que f es una función (α,β) y (α,β^*) débilmente continua.

El siguiente ejemplo muestra que existen funciones $f:X\to Y$ que son (α,β) y (α,β^*) débilmente continuas, β y β^* operadores mutuamente duales, pero que no son continuas.

Ejemplo 6. Sean $X=\{a,b,c\}, Y=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}, \sigma=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\},Y\}$.

Definamos $\alpha:P(X)\to P(X)$ como sigue:

$$\alpha(A)=\begin{cases}A & , \ si \ \ b\in A\\ Int(A) & , \ si \ \ b\notin A\end{cases}$$

$\beta,\beta^*:P(Y)\to P(Y)$ se definen como $\beta(A)=Cl(A)$ y $\beta^*(A)=id(A)$.

Sea $f:X\to Y$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}a & , \ si \ \ x\in\{a,b\}\\ c & , \ si \ \ x=c\end{cases}.$$

Observe que f no es una función continua, pero f es (α,β) y (α,β^*) débilmente continua. La prueba es la siguiente:

$$\beta(V)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ V=\phi\\ \{a,b\} & , \ si \ \ V=\{a\}\\ \{b,c\} & , \ si \ \ V=\{c\}\\ Y & , \ si \ \ V=\{a,c\}\\ Y & , \ si \ \ V=Y\end{cases}; \quad f^{-1}(\beta(V))=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ V=\phi\\ \{a,b\} & , \ si \ \ V=\{a\}\\ \{c\} & , \ si \ \ V=\{a,c\}\\ X & , \ si \ \ V=\{a,c\}\\ X & , \ si \ \ V=Y\end{cases};$$

$$f^{-1}(V)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ V=\phi\\ \{a,b\} & , \ si \ \ V=\{a\}\\ \{c\} & , \ si \ \ V=\{c\}\\ X & , \ si \ \ V=\{a,c\}\\ X & , \ si \ \ V=Y\end{cases};$$

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right)=\begin{cases}\phi & , \ si \ \ V=\phi\\ \{a,b\} & , \ si \ \ V=\{a\}\\ \phi & , \ si \ \ V=\{c\}\\ X & , \ si \ \ V=\{a,c\}\\ X & , \ si \ \ V=Y\end{cases};$$

$$Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right)=\begin{cases}\phi & , si \quad V=\phi\\ \{a,b\} & , si \quad V=\{a\}\\ \phi & , si \quad V=\{c\}\\ X & , si \quad V=\{a,c\}\\ X & , si \quad V=Y\end{cases}.$$

De esto, concluimos que para todo conjunto abierto $V\in\sigma$, $\alpha\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right)$,

Luego f es (α,β) débilmente continua. Por otra parte,

$$\beta^*(V)=\begin{cases}\phi & , si \quad V=\phi\\ \{a\} & , si \quad V=\{a\}\\ \{c\} & , si \quad V=\{c\}\\ \{a,c\} & , si \quad V=\{a,c\}\\ Y & , si \quad V=Y\end{cases} \quad ; \quad f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)=\begin{cases}\phi & , si \quad V=\phi\\ \{a,b\} & , si \quad V=\{a\}\\ \{c\} & , si \quad V=\{c\}\\ X & , si \quad V=\{a,c\}\\ X & , si \quad V=Y\end{cases}$$

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right)=\begin{cases}\phi & , si \quad V=\phi\\ \{a,b\} & , si \quad V=\{a\}\\ \phi & , si \quad V=\{c\}\\ X & , si \quad V=\{a,c\}\\ X & , si \quad V=Y\end{cases};$$

$$Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right)=\begin{cases}\phi & , si \quad V=\phi\\ \{a,b\} & , si \quad V=\{a\}\\ \phi & , si \quad V=\{c\}\\ X & , si \quad V=\{a,c\}\\ X & , si \quad V=Y\end{cases}.$$

Concluimos de esto que para todo conjunto abierto $V\in\sigma$, $\alpha\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right)$. Por lo tanto f es (α,β^*) débilmente continua.

El siguiente teorema nos da una relación entre las nociones de (α,β) débilmente continua y continuidad para una función $f:X\to Y$ en la cual el operador α asociado a la topología considerada sobre satisface la condición adicional $A\subseteq\alpha(A)$, para todo $A\subseteq X$.

Teorema 2. Sean (X,τ) y (Y,σ) espacios topológicos α un operador sobre y operadores mutuamente duales sobre σ. Si es (α,β) y (α,β^*) débilmente continua y $A\subseteq\alpha(A)$ para todo $A\subseteq X$, entonces $f:X\to Y$ es continua.

Demostración. Sea V un conjunto abierto en Y, entonces por hipótesis:

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq Int\left(f^{-1}(\beta(V))\right) \text{ y } \alpha\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(V)\right)\right),$$

concluyéndose de aquí que ;

$$\alpha\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq Int\left(f^{-1}\left((\beta\wedge\beta^*)(V)\right)\right),$$

pero, , así obtenemos usando el hecho que, $A\subseteq\alpha(A)$ para todo $A\subseteq X$,

$$f^{-1}(V)\subseteq\alpha\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq Int\left(f^{-1}(V)\right)\subseteq f^{-1}(V),$$

por lo cual $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto y en consecuencia f es una función continua.

El siguiente ejemplo muestra la existencia de una función $f:X\to Y$ y de operadores α,β y β^* tales que: α es un operador sobre el cual satisface la condición para todo $A\subseteq X$, y β,β^* son operadores mutuamente duales sobre σ, pero es una función que no es (α,β) ni (α,β^*) débilmente continua.

Ejemplo7. Sean $X=\{a,b,c\},Y=\{a,b,c\}$, $\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\},\sigma=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\},Y\}$.

Definamos $\alpha:P(X)\to P(X)$ como sigue $\alpha(A)=Cl(A)$ y $\beta,\beta^*:P(X)\to P(X)$ por $\beta(A)=Cl(A)$ y $\beta^*(A)=(Fr(A))^c$. Sea $f:X\to Y$ la función dada por

$$f(x)=\begin{cases}a & si \quad x\in\{a,b\}\\ b & si \quad x=c\end{cases}$$

Observe que f es una función continua, $A\subseteq\alpha(A)$ para todo $A\subseteq X$, pero $f:X\to Y$ no es (α,β) ni (α,β^*) débilmente continua, como se exhibe a continuación.

Considérese el abierto $V=\{a\}$ en σ, entonces , $\alpha\left(f^{-1}(\{a\})\right)=\alpha(\{a,b\})=X$, $\beta(\{a\})=\{a,b\}$, $f^{-1}(\beta(\{a\}))=\{a,b\}$ e $Int\left(f^{-1}(\beta(\{a\}))\right)=\{a,b\}$. Observe que $\alpha\left(f^{-1}(\{a\})\right)$ no está contenido $Int\left(f^{-1}(\beta(\{a\}))\right)$, por lo tanto, f no es (α,β) ni débilmente continua. Note además que $Int\left(f^{-1}\left(\beta^*(\{a\})\right)\right)=\{a,b\}$, por lo cual f tampoco es (α,β^*) débilmente continua.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Levine, N. 1961. A Decomposition of Continuity on Topological Spaces. The American Mathematical Monthly, 68: 44-46.

Rosas E. & Vielma J. 1999. Operator Decomposition of Continuos Mappins. Divulgaciones Matemáticas 7(1): 29-33.

Tong, J. 1994. Expansion of Open Sets and Decomposition of Continuous Mappings. Rediconti del Circolo Matematico di Palermo, serie II, 43 :303-308.