Saber, Universidad de Oriente, Venezuela.Vol. 15. Nº 1 - 2: 75-77. (2003)

CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE UN GRAFO BIPARTITO CONTENGA UN [a,b]-FACTOR

NECESSARY CONDITION FOR A BIPARTITE GRAPH TO HAVE AN [a,b]-FACTOR

VALDIVIEZO MARTHA, BRITO DANIEL Y LÁREZ GLADYS

Departamento de Matemática. Escuela de Ciencia, Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre, Cumaná

RESUMEN

En este trabajo se probará fundamentalmente la existencia de un [a,b]-factor en un grafo bipartito balanceado G de orden 2n que cumple ciertas propiedades, tomando en cuenta que dicho resultado es una versión bipartita del teorema dado en Yanjun Li y Cai Mao-chen (1998). Nuestro resultado es: Sea G un grafo bipartito balanceado de orden *2n* y sean a, b$\in Z^+$ tales que $2\leq a<b$, entonces G tiene un [a,b]-factor si, $\delta(G)\geq \frac{1}{2}(a+1)$, $n\geq \frac{2(a+b)^2}{b}$ y *max*$\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{an}{a+b}$, para cualquier par de vértices u,v$\in$ V(G) no adyacentes.

PALABRAS CLAVES: Grado, Bipartito, Factor.

ABSTRACT

In this work, we shall fundamentally prove the existence of an [a,b]-factor in a balanced bipartite graph G of 2n order with certain properties, taking into account that this result is a bipartite version of the theorem given in Yanjun Li and Cai Mao-chen (1998). Our result is: let G be a bipartite graph of 2n order and let a, b$\in Z^+$ be such that 2=a<b, then G has an [a,b]-factor if $\delta(G)\geq \frac{1}{2}(a+1)$, $n\geq \frac{2(a+b)^2}{b}$ and *max*$\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{an}{a+b}$, for any two nonadjacent vertices u and v in G.

KEY WORDS: Grade, Bipartite, Factor.

INTRODUCCIÓN

Un *grafo* G=(V,E) es *bipartito* si el conjunto de sus vértices puede particionarse en dos conjuntos A y B, de tal modo que todo par de vértices del mismo subconjunto de la partición (de cada clase) son no adyacentes. Se denota G=(A$\cup$B, E) con V = A$\cup$B. G es *bipartito balanceado* si $|A| = |B|$. Un *subgrafo* H de un grafo G=(V,E) es el grafo H=(V(H),E(H)), tal que V(H)$\subseteq$V(G) y los lados de H son aquellos lados de G con vértices extremos en V(H), así E(H) $\subseteq$E(G). Se dice que H es un *subgrafo generador* de G si V(H)=V(G). Sea x un vértice en G, el subconjunto de vértices adyacentes a x se define como *vecindad de x* y se denota $N_G(x)$. El *grado* de x en G se denota como $d_G(x)=|N_G(x)|$. Sean a,b$\in Z^+$ tales que $1\leq a\leq b$. Un *[a,b]-factor* se define como un subgrafo generador F de G tal que $a \leq d_F(x) \leq b, \forall v\in V(G)$. Las definiciones básicas las podemos encontrar en Bondy, J. A. y Murty, U. (1976).

RESULTADO

TEOREMA: Sea G un grafo bipartito balanceado de orden *2n* y sean a, b$\in Z^+$ tales que $2\leq a<b$, entonces G tiene un [a,b]-factor si, $\delta(G)\geq \frac{1}{2}(a+1)$, $n\geq \frac{2(a+b)^2}{b}$ y *max*$\{d_G(u), d_G(v)\} \geq \frac{an}{a+b}$, para cualquier par de vértices u,v$\in$ V(G) no adyacentes.

Demostración

La prueba se realiza por contradicción. Suponemos que G satisface las hipótesis del teorema pero no contiene un [a,b]-factor.

Recibido: enero 2002. Aprobado: julio 2002.
Versión final: noviembre 2002

Por el teorema del (g,f)-factor de Lovász. (1970), existen subconjuntos disjuntos S y T con $|S|$=s y $|T|$=t, tales que:

∇:= bs-at + $\qquad\qquad$ ≤ 0. **(1)**

Establecemos las siguientes condiciones sobre los subconjuntos seleccionados,

$S\subset A\cup B, T\subset A\cup B, |T\cap A|=|T\cap B|, |S\cap A|=|S\cap B|$.

Sin pérdida de generalidad, escogemos T tal que $|T|$ sea mínima.

1. T$\neq\phi$. Sí T=ϕ, $|T|$= t =0, el producto at =0, luego ∇>0, esto contradice la hipótesis.

2. E(v,V(G-S))$\leq$a-1, $\forall$v$\in$ V(T).

Sí E(v,V(G-S)) $\geq$ a-1, $\sum_{v\in T} d_{G-S}(v) \geq t(a-1)$, entonces, ∇=bs-at+t(a-1)+1= bs-t+1, pero s-t >0, porque t es mínimo, en consecuencia bs-t >0 y ∇>0, contradicción.

Definimos h_1 = $\qquad\qquad$ y escogemos $x_1 \in V(T)\cap A$, tal que $d_{(G-S)\cap B}(x_1)=h_1=|N_{(G-S)\cap B}(x_1)|$ entonces, $d_G(x_1) = h_1+s' < h_1 + \frac{s}{2}$ con $s' < \frac{s}{2}$, $v\in T\cap A$. $d_G(v) \leq h_1 + \frac{s}{2}$.

Si los conjuntos, $N_T(x_1)\neq\phi$ y $(T-N_T(x_1))\cap B\neq\phi$ podemos definir $h_2 = \min_{v\in T-N_T(x_1)} \{d_{G-S}(v)\}$ y seleccionamos $x_2 \in (V(T) - N_T(x_1)) \cap B$, tal que $d_{(G-S)\cap A}(x_2) = h_2 = |N_{(G-S)\cap A}(x_2)|$, análogamente, $d_G(x_2) \leq h_2+s' \leq h_2 + \frac{s}{2}$, $\in T\cap B$, $d_G(v) \leq h_2 + \frac{s}{2}$.

Se puede ver que $h_1 \leq h_2 \leq$ a-1, porque tanto h_1 como h_2 son el menor número de lados entre vértices de T y e(v,V(G-S)) $\leq$ a-1; para cualquier vértice v en T, se cumple que ambos son menores que a-1, al mismo tiempo por la selección de x_1 y x_2 es cierto que $h_1 \leq h_2$. Por lo tanto, $d_G(x_1) \leq d_G(x_2)$ y, $\frac{an}{a+b} \leq \frac{s}{2}+h_1 \leq \frac{s}{2}+h_2$.

Sí el subconjunto T-$N_T(x_1)$ es no vacío, consideramos w el número de componentes de G-($S\cup T$), entonces $0\leq w \leq$2n-s-t.

Definimos p:=$|N_T(x_1)|$, es claro que p$\leq h_1 < h_1$+1, además $\frac{t}{2}$- p $\geq$ 1, donde $\frac{t}{2} \geq$ p+1 y $h_2 \leq$a-1.

Como 2n-s-t $\geq w \geq$ 0 y a - $\frac{h_2}{2} \geq 1$, el producto (2n-s-t)(a-$\frac{h_2}{2}$) $\geq 0 \geq \nabla$ y por hipótesis tenemos que:

(2n-s-t)(a-$\frac{h_2}{2}$) $\geq$ bs-at + $\sum_{v\in T} d_{G-S}(v) + 1$.

$\sum_{v\in T} d_{G-S}(v) = h_1 p + h_2(\frac{t}{2}-p)$.

Así, (2n-s-t)(a-$\frac{h_2}{2}$) $\geq$ bs - at + h_1p + $h_2(\frac{t}{2}$ -p) + 1.

$$2na - 2n\frac{h_2}{2} - sa + s\frac{h_2}{2} - ta + t\frac{h_2}{2} \geq bs - at + h_1 p + h_2\frac{t}{2} - h_2 p + 1.$$

(2n-s)(a-$\frac{h_2}{2}$) - bs $\geq$ (h_1 - h_2)p + 1.

El término (h_1-h_2) < 0 y p < h_1+1, de donde (h_1-h_2)p $\geq$ (h_1-h_2) ((h_1+1).

Queda que, (2n-s)(a-$\frac{h_2}{2}$) - bs $\geq$ (h_1-h_2)(h_1+1) + 1 **(2)**

Sabemos que $\frac{s}{2} + h_2 \geq d_G(x_2) \geq \frac{an}{a+b}$, entonces, $s - \frac{2an}{a+b} \geq -2h_2$.

Por hipótesis $2 \leq a < a+b$, de donde $2-h_2 \leq a-h_2 < a+b-h_2$ y $a+b-h_2 > a-h_2$.

$$\left(s - \frac{2an}{a+b}\right)\left(a+b-\frac{h_2}{2}\right) \geq -2h_2\left(a+b-\frac{h_2}{2}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Por hipótesis $n \geq \frac{2(a+b)^2}{b}$, entonces $nb \geq 2(a+b)^2$, de donde $\frac{nb}{a+b} \geq 2(a+b)$, Luego, $2h_2(a+b) \leq h_2\left(\frac{nb}{a+b}\right)$ **(4)**

Sumando (2), (3) y (4) nos queda que:

$$(2n-s)\left(a-\frac{h_2}{2}\right)-bs+\left(s-\frac{2an}{a+b}\right)\left(a+b-\frac{h_2}{2}\right)+h_2\left(\frac{nb}{a+b}\right) \geq$$

$$(h_1-h_2)(h_1+1) + 1 - h_2(a+b-h_2) + h_2(a+b).$$

Desarrollamos y factorizamos todo este término y queda: $0 \geq h_1^2 - (h_2-1)h_1 + (h_2-1)^2 + h_2$. Si se deriva este término en función de h_1 para buscar un mínimo, nos queda que ese valor se obtiene cuando $h_1 = \frac{h_2-1}{2}$.

$$0 \geq \frac{(h_2-1)^2}{4} - \frac{(h_2-1)(h_2-1)}{2} + (h_2-1)^2 + h_2 > \frac{3}{4}(h_2-1)^2 > 0.$$

Así $\nabla > 0$ y esto contradice lo supuesto al principio de la prueba.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONDY, J. A AND U. S. R. MURTY. Graphs Theory with Applications. North Holland. New York. (1976).

LOVÁSZ. L. SUBGRAPHS with Prescribed Valencies. J. Combinatorial Theory (**8**). (1970). 391-416.

YANJUN LI AND CAI MAO-CHENG. A Degree Condition for a Graph to have [a,b]-Factor. J. Graph Theory, **(27).** (1998). 1 - 6.