Saber, Universidad de Oriente, Venezuela.Vol. 18. Nº 1: 60 - 63. (2006)

ÁRBOL INDEPENDIENTE EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS

INDEPENDENCE TREE IN BALANCED BIPARTITE GRAPHS

Lope Marín, Daniel Brito y Gladys Lárez

Universidad de Oriente - Núcleo de Sucre, Escuela de Ciencias, Departamento de Matemáticas.
lmata@sucre.udo.edu.ve, dbrito@sucre.udo.edu.ve, glarez@sucre.udo.edu.ve

RESUMEN

Sea G un grafo bipartito balanceado de orden 2n y mínimo grado δ . En este artículo se prueba que la condición $\alpha_T^B(G) \leq \delta(G)$-1 implica que G es hamiltoniano.

Palabras clave: Árbol independiente, mínimo grado, grafo bipartito y grafo hamiltoniano.

ABSTRACT

Let G be a balanced bipartite graph of order 2n and minimum degree δ. It is proven in this paper that the condition $\alpha_T^B(G) \leq \delta(G)$-1 implies that G is Hamiltonian.

Key words: Independence trees, minimum degree, bipartite graph and Hamiltonian graph.

INTRODUCCIÓN

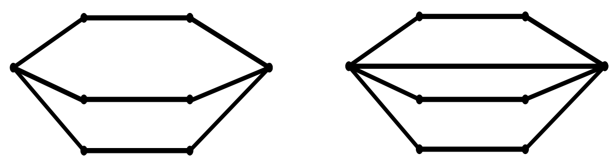
Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado. $S \subseteq V(G)$ es un conjunto independiente de G, si para cada par de vértices u y v de S, $uv \notin E(G)$; y, además, es balanceado si $|S \cap X| = |S \cap Y|$. Un árbol generador T (de G) es un árbol independiente, si el conjunto de sus hojas es un conjunto independiente en G. Si $G = (X \cup Y, E)$ contiene un árbol independiente T, $\alpha_T^B(G)$ denota la máxima cardinalidad de los conjuntos balanceados de hojas de T. Sean los caminos p_i con i>0, que tienen solamente un vértice extremo en común; por ejemplo, el vértice u. Se define el empalme de los p_i caminos, con i>0, denotado por $Emp(p_1,p_2,...,p_t)$, como: $Emp(p_1,p_2,...,p_t), = T_{P_i}^u$; donde $T_{P_i}^u$ es un árbol de raíz u con i ramas generadas por los caminos p_i, con i>0.

Favaron *et al*. (1993) establecieron que la condición $\alpha_{Bip}(G) \leq \delta(G)$ es suficiente para que un grafo bipartito balanceado sea hamiltoniano. En este artículo se establece una condición, similar a la anterior, en términos de los parámetros α_T^B y δ para que un grafo bipartito balanceado sea hamiltoniano. Las definiciones básicas se pueden encontrar en (Bondy *et al*. 1.976).

TEOREMA PREVIO

Favaron *et al* (1993) tienen el siguiente resultado:

TEOREMA (A): Si G es un grafo bipartito balanceado que satisface que $\alpha_{Bip}(G) \leq \delta(G)$ entonces G es hamiltoniano excepto si es isomorfo a los grafos θ_1 y θ_2.



θ_1 θ_2

RESULTADO

El siguiente resultado da una nueva condición, suficiente para que un grafo bipartito balanceado sea hamiltoniano, utilizando sólo aquellos que contengan un árbol independiente.

TEOREMA (1): Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden 2n y mínimo grado δ, que contiene un árbol independiente.

Si $\alpha_T^B(G) \leq \delta(G)$-1, entonces G es hamiltoniano

Prueba:

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado, de orden 2n y mínimo grado δ, que contiene un árbol independiente tal que $\alpha_T^B(G) \leq \delta(G)$-1.

Si $\delta(G) \leq 2$, $\alpha_T^B(G) = 0$; lo que implica que G es isomorfo a $K_{n,n}$; así, G no tiene un árbol independiente

Recibido: abril 2005. Aprobado: junio 2005.
Versión final: julio 2006

(Broersma *et al.* 1.998). Sea $\delta(G) > 2$ y considérese un ciclo C de longitud máxima de G. Escójase una orientación arbitraria de C y denótese por u^+ (respectivamente u^-) el sucesor (respectivamente el antecesor) en C del vértice u. Si u y v son dos vértices de C, uC^+v (respectivamente uC^-v) representa el camino que une a u con v en C en el sentido directo (respectivamente inverso). Supóngase que G no es hamiltoniano.

Considérese los siguientes casos:

CASO I : V(G)-V(C) es un conjunto independiente.

Sean, sin pérdida de generalidad, $u \in A \cap (V(G) - V(C))$ y $v \in B \cap (V(G)\text{-}V(C))$

Sean $u_1, u_2, \ldots, u_\delta$ los vecinos de u en $B \cap V(C)$ y $v_1, v_2, \ldots v_\delta$ los vecinos de v en $A \cap V(C)$. Escójase el etiquetamiento de los vértices de C tal que $u_\delta^+ = v_1$ y los índices de los vecinos de u y v de manera ascendente con respecto a la orientación de C. Entonces los vértices u_i^+, con $1 \le i \le \delta\text{-}1$, y v_j^-, con $2 \le j \le \delta$ no forman un lado; en caso contrario, existiría el ciclo $C_1 = v_j^- u_i^+ C^+ u_\delta u u_i C^- v_j v v_1 C^+ v_j^-$ de longitud mayor que C, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $S = \{u_1^+, u_2^+, \ldots, u_{\delta-1}^+, v_2^-, v_3^-, \ldots, v_\delta^-\}$ es un conjunto independiente balanceado de cardinalidad 2δ -2.

Sean los caminos $P_i = uu_1C^-u_{i-1}^+$, con $2 \le i \le \delta$, $Q_j = vv_jC^+v_{j+1}^-$, con $1 \le j \le \delta$ - 1, y $\Omega = uu_1C^-v_\delta v$. Elíjase el siguiente subgrafo T de G:

$T = Emp\ (P_2, P_3, \ldots, P_\delta) \cup Emp\ (Q_1, Q_2, \ldots, Q_{\delta-1}); \cup\ \Omega$; de donde, T es un árbol con hojas en el conjunto S.

Si T es un árbol generador de G, entonces T es un árbol independiente con $\alpha_T^B\ (G) > \delta$ - 1 , lo cual es una contradicción.

Supóngase que T no es un árbol generador de G. Entonces se tienen los siguientes subcasos:

SUBCASO I.1: V(G)-V(T) es un conjunto independiente.

Sean, sin pérdida de generalidad, $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ y $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$.

El vértice $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $y \in A \cap (V(G) - V(T))$ no es vecino de dos vértices en S, de lo contrario existe una contradicción.

Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de u_a^+ y $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de v_b^-, con u_a^+ y v_b^- en S, entonces se agregan a T los lados yv_b^- y zu_a^+.

Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ y $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ son vecinos de u' y v' respectivamente, con u' y v' en V(T)-S, entonces se agregan a T los lados yv' y zu'.

En ambos casos, el árbol resultante es un árbol independiente de G con $\alpha_T^B\ (G) > \delta$-1, lo cual es una contradicción.

SUBCASO I.2: V(G)-V(T) es un conjunto de componentes H_s tal que $|H_s| \ge 2$, para toda s.

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que H' es una componente de V(G)-V(T) tal que $H' = 2$ con vértices extremos $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ y $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$.

Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de un vértice de S, entonces $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ no es vecino de un vértice de S, de lo contrario existe una contradicción.

Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de u_a^+ (respectivamente v_b^-) en S, entonces se agrega a T el lado zu_a^+ (respectivamente yv_b^-)y la componente H'.

Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de u' (respectivamente v') en V(T)-S, entonces se agrega a T el lado zu' (respectivamente yv') y la componente H'.

En ambos casos, el árbol resultante es un árbol independiente de G con $\alpha_T^B\ (G) > \delta$-1 , lo cual es una contradicción.

CASO II: El conjunto V(G)-V(C) contiene por lo menos una componente de orden al menos dos.

Sea H una componente de V(G)-V(C) tal que, sin pérdida de generalidad, $H = 2$ y de vértices extremos $u \in A \cap (V(G)\text{-}V(C))$ y $v \in B \cap (V(G)\text{-}V(C))$.

Sean $u_1, u_2, \ldots u_{\delta\text{-}1}$ los vecinos de u en $B \cap V(C)$ y $v_1, v_2, \ldots, v_{\delta\text{-}1}$ los vecinos de v en $A \cap V(C)$. Elíjase el etiquetamiento de los índices de los vecinos de u y v de manera ascendente con respecto a la orientación de C. Entonces los vértices u_i^+, con $1 \le i \le \delta$ - 1, y v_j^+, con $1 \leq j \leq \delta$ - 1, no forman un lado; en caso contrario, existiría el ciclo $C_1 = uu_i C^- v_j^+ u_i^+ C^+ v_j vu$ de longitud mayor que C, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $S = \{u_1^+, u_2^+, \ldots, u_{\delta-1}^+, v_1^+, v_2^+, \ldots, v_{\delta-1}^+\}$ es un conjunto independiente balanceado de cardinalidad 2δ-2.

Sean los caminos $P_i = uu_i C^- u_{i-1}^+$, con $2 \leq i \leq \delta$-1, $Q_j = vv_j C^- v_{j-1}^+$, con $2 \leq j \leq \delta$-1, $P' = uu_1 C^- v_{\delta-1}^+$ y $Q' = vv_1 C^- u_{\delta-1}^+$. Tómese el siguiente subgrafo T de G: $T = Emp(P', P_2, \ldots, P_{\delta-1}) \cup Emp(Q', Q_2 \ldots, Q_{\delta-1}) \cup H$; de donde, T es un árbol con hojas en el conjunto S.

Si T es un árbol generador de T, entonces T es un árbol independiente con $\alpha_T^B(G) > \delta - 1$, lo cual es una contradicción.

Supóngase que T no es un árbol generador de G. Entonces se tienen los siguientes subcasos:

SUBCASO II.1: V(G)-V(T) es un conjunto de componentes H_s tal que $|H_s| \geq 2$, para toda s.

Supóngase, sin pérdida de generalidad, que H' es una componente de V(G)-V(T) tal que $H' = 2$, con vértices extremos $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ y $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$.

Si $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$) tiene un vecino en S, entonces $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ no tiene vecinos en S, en caso contrario existe una contradicción.

Si $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de v_b^+ (respectivamente u_a^+) en S, entonces se agrega a T el lado yv_b^+ (respectivamente zu_a^+) y la componente H'

Si $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de v' (respectivamente u') en V(T)-S, entonces se agrega a T el lado yv' (respectivamente zu') y la componente H'.

En ambos casos, el árbol resultante es un árbol independiente de G con $\alpha_T^B(G) > \delta - 1$, lo cual es una contradicción.

SUBCASO II.2: V(G)-V(T) es un conjunto independiente.

Sean, sin perdida de generalidad, $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ y $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$.

El vértice $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ (respectivamente $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ no es vecino de dos vértices en S, en caso contrario existe una contradicción.

Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de u_a^+ y $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ es vecino de v_b^-, con u_a^+ y v_b^- en S, entonces se agregan a T los lados yv_b^+ y zu_a^+.

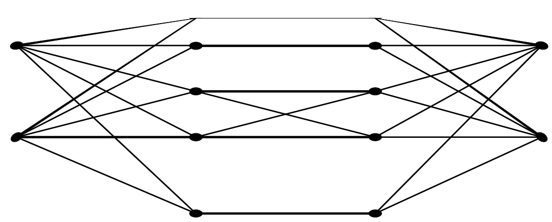
Si $z \in B \cap (V(G)\text{-}V(T))$ y $y \in A \cap (V(G)\text{-}V(T))$ son vecinos de u' y v' respectivamente, con u' y v' en V(T)-S, entonces se agregan a T los lados yv' y zu'.

En ambos casos, el árbol resultante es un árbol independiente de G con $\alpha_T^B(G) > \delta$-1, lo cual es una contradicción.

Así, de los casos I y II, se concluye que G es hamiltoniano.

EJEMPLO

Sea G un grafo bipartito balanceado, de orden 14 y mínimo grado tres, que contiene un árbol independiente. Como $\alpha_T^B(G)$=2= $\delta(G)$-1, G es halmiltoniano.



G

CONCLUSIÓN

Si $\alpha_T^B(G) < \alpha_{Bip}(G)$-1, el teorema (1) es una consecuencia del teorema (A) Si $\alpha_T^B(G) \leq \alpha_{Bip}(G)$-2, el teorema (1) es más general que el teorema (A); en consecuencia, se obtiene el siguiente resultado:

Sea G un grafo bipartito balanceado, de orden 2n y mínimo grado δ, que contiene un árbol independiente tal que $\alpha_T^B(G) \leq \alpha_{Bip}(G)$-2. Si $\alpha_{Bip}(G) \leq \delta$(G)+1, entonces G es hamiltoniano.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONDY, J. & MURTY, U. 1.976. Graphs Theory with Applications. North Holland. New York .

BROERSMA, H. & TUINSTRA, H. 1.998. Independence Trees and Hamilton Cycles. Graph Theory. 29: 227-237.

FAVARON, O. MAGO, P. & ORDAZ, O. 1.993. On the Bipartite Independence Number of a Balanced Bipartite Graph. Discrete Mathematics. 121: 55-63.