



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
NÚCLEO DE SUCRE  
ESCUELA DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

RESOLUCIÓN DE LA INDETERMINACIÓN  
EN LA RESONANCIA DE ACKERBERG Y O'MALLEY

JACQUES LAFORGUE

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA ASCENDER A LA CATEGORÍA DE PROFESOR TITULAR

CUMANÁ, 2022

A Heida, Xavier, Jeanilde y Jairo

## AGRADECIMIENTO

Al Profesor Bob O'Malley, in memórium.

## ÍNDICE

Resumen	V
Lista de figuras	VI
Introducción	1
1 El problema con valores en la frontera de dos puntos, para una ecuación lineal homogénea singularmente perturbada de segundo orden	7
1.1 Ecuación con coeficientes constantes . . . . .	8
1.2 Ecuación con coeficientes variables, sin punto de retorno . . . . .	11
1.3 Ecuación con coeficientes constantes, excepto un punto de retorno único y simple . . . . .	16
1.4 Ecuación con coeficientes variables y punto de retorno único y simple	19
1.5 Ecuación con la condición de Ackerberg y O'Malley . . . . .	23
2 Métodos conocidos para resolver la indeterminación	26
2.1 Simetría (Lagerstrom) . . . . .	32
2.2 Cálculo variacional (Grasman y Matkowsky) . . . . .	35
2.3 Incorporación de términos trascendentalmente pequeños (MacGillivray)	38
3 Un método nuevo y simple para resolver la indeterminación	41
3.1 Ecuación asociada a un tiempo de salida . . . . .	42
3.1.1 Ecuación perturbada exhibiendo supersensibilidad . . . . .	49
3.2 Ecuación propuesta por Kreiss y Parter . . . . .	52
3.3 Ecuación de Hermite . . . . .	60
3.3.1 Ecuación perturbada exhibiendo supersensibilidad . . . . .	67
3.4 Ecuación de Hermite generalizada . . . . .	69
3.5 Ecuación con un punto de retorno de orden impar y dos simples en la frontera . . . . .	77
3.5.1 Comentario sobre el orden impar . . . . .	85
4 Problemas diferentes	87
4.1 Ecuación de tercer orden . . . . .	88
4.2 Ecuación de primer orden . . . . .	95
4.3 Sistema de dos ecuaciones . . . . .	102
4.4 Ecuación no lineal . . . . .	107
4.5 Ecuación con un término no local . . . . .	114
4.6 Ecuación en derivadas parciales . . . . .	123
Conclusión	127
Bibliografía	128
Hoja de metadatos	142

## RESUMEN

Se presenta, en su contexto, un método nuevo y simple (basado en técnicas clásicas de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) para resolver la indeterminación sobre la amplitud de la resonancia de capa de frontera que ocurre al aplicarse el método de expansiones asintóticas empatadas al problema singularmente perturbado correspondiente.

---

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Solución y aproximación para el Ejemplo 1.1 . . . . .	9
1.2	Solución y aproximación para el Ejemplo 1.2 . . . . .	20
3.1	Solución y aproximación para el Ejemplo 3.1 . . . . .	50
4.1	Solución y aproximación para el Ejemplo 4.1 . . . . .	103

---

## INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son posiblemente las herramientas matemáticas más usadas en el modelado de los fenómenos estudiados por las ciencias aplicadas. En general, no se dispone de fórmulas interpretables para sus soluciones exactas y resultados numéricos no se prestan directamente a la dilucidación de los mecanismos obrando que interesan al investigador. La meta es entonces la construcción de aproximaciones analíticas explícitas que permitan revelar el modo dominante de influencia de cualquier parámetro significativo del modelo. Un campo teórico-práctico muy productivo y bastante universal para lograr esta meta es el de las perturbaciones regulares o singulares, cuando algún parámetro, desembarazado de sus dimensiones físicas, resulta objetivamente pequeño [12, 18, 50, 51, 60, 93, 122, 143, 148, 153, 163].

Mientras las perturbaciones sean regulares, las dinámicas buscadas no difieren sensiblemente de la situación con parámetro nulo, la cual da entonces una indicación útil de la información requerida. Sin embargo, es común que los fenómenos físicos, localmente, no converjan uniformemente a tal situación, en cuyo caso se impone recurrir a la teoría y a las técnicas de las más sofisticadas perturbaciones singulares [3, 4, 15, 20, 27, 30–33, 45, 48, 56, 58, 61, 69, 74, 82, 87, 99, 102, 110, 111, 113, 117, 120, 123, 129–140, 144–149, 152, 157, 158, 161–169].

En particular, el método de las expansiones asintóticas empatadas [32, 34, 36, 43, 53, 103, 104, 106, 114, 141, 170] es un algoritmo para ir construyendo varias aproximaciones locales aparentemente independientes y después, relacionarlas entre sí hasta, cuando sea posible, componerlas para obtener una estimación global uniformemente válida del comportamiento de la solución del problema diferencial. En el transcurso de este proceso, se acepta la presencia de coeficientes, escalares, vectoriales o funcionales, cuyo valor, necesario para el resultado final, momentáneamente se desconoce. El método es efectivo si se logra fijar de alguna manera acertada tales valores pendientes para suministrar una respuesta única al problema. Esto es lo que

ocurre de manera rutinaria, y este éxito ha hecho universal el uso del método.

Sin embargo, hace medio siglo, Ackerberg y O'Malley [2] publicaron una investigación, en la cual habían detectado una situación previamente desapercibida por la comunidad matemática, donde una solución que se pensaba prácticamente nula en toda oportunidad, lucía en casos excepcionales un comportamiento funcional a tener en cuenta, que bien podía llamarse *resonante*. Pero ocurría que, al aplicar el método de expansiones asintóticas empatadas para averiguar las características de estas soluciones excepcionales, un coeficiente crucial quedaba indeterminado, ocultando por vía de consecuencia la estructura o perfil real de tales soluciones.

El artículo de Ackerberg y O'Malley ha tenido muchas repercusiones, hasta el día presente [16, 22–26, 28, 37–42, 44, 46, 57, 63–66, 75–77, 105, 107–109, 114–116, 124, 125, 127, 128, 130, 139, 142, 154, 156, 159, 171, 172, 175, 176]. Por una parte, varios investigadores se preocuparon por determinar cuándo podía ocurrir el fenómeno, en todo caso excepcional, de resonancia de capas de frontera (otro nombre dado a la resonancia de Ackerberg y O'Malley). Análisis espectrales identificaron como causa la presencia de un autovalor dominante exponencialmente pequeño. Estudios tantos formales como rigurosos establecieron condiciones arduas, en unos casos necesarias, en otros suficientes, para esta resonancia.

Por otra parte, se propusieron vías alternativas para resolver la indeterminación dejada por el método de expansiones asintóticas empatadas. En muchos casos, no se recurría del todo a dicho método, o bien de entrada se modificaba notablemente. En otros pocos casos, se partía efectivamente del resultado parcialmente indeterminado y se proponía una manera de completarlo con la obtención de lo faltante. Este trabajo se interesa en este último aspecto, porque el método de expansiones asintóticas empatadas ha demostrado tanta utilidad que parece más razonable enriquecerlo en vez de desecharlo.

Para que este trabajo sea aceptablemente autónomo, su primer capítulo va introduciendo progresivamente el contexto en el cual se da la resonancia de Ackerberg y O'Malley, así como los detalles técnicos de aplicación estándar del método de



expansiones asintóticas empatadas. En la resolución de la ecuación con punto de retorno simple (cuya definición se da en el momento apropiado), se privilegia el uso de la función de Kummer [1, 7, 51], sin necesidad de análisis en el plano complejo.

El segundo capítulo presenta los tres métodos bien divulgados que proponen, en el caso de la resonancia de Ackerberg y O'Malley, completar el método de expansiones asintóticas empatadas con algún procedimiento adicional que solamente persigue resolver la indeterminación resultante. Para describirlos, se aplican en tres secciones sucesivas al mismo caso de prueba (el más sencillo posible), cuya resolución exacta se ha dado previamente. El primer método es simple pero requiere una propiedad exigente de simetría que en general no está presente. Los dos otros métodos son más sofisticados, requieren cálculos complicados y aproximaciones, y no tienen justificación matemática rigurosa.

El aporte original de este trabajo, desarrollado en el tercer y principal capítulo, consiste precisamente en presentar un método aparentemente nuevo aunque bastante simple y natural, para resolver directamente la indeterminación en los casos más comunes de resonancia de Ackerberg y O'Malley. Aludiendo a una circunstancia quizás análoga, cuando un especialista de Análisis Numérico discretiza una situación continua, a veces se consigue con un sistema de ecuaciones transformadas que no tiene el mismo número de grados de libertad que el original. Si es menor, recurre a un método de optimización y si es mayor, agrega condiciones llamadas numéricas, consistentes con el problema original y sus propiedades, para forzar la unicidad de la solución. De igual manera aquí, el método consiste en agregar una condición de frontera nueva, derivada rigurosamente de la ecuación diferencial, independiente de las ya presentes en el planteamiento del problema, y de una naturaleza particular que tiene que ver con la dificultad fundamental de los problemas resonantes. Al contrario de todos los problemas usuales, incluidos los singularmente perturbados, cantidades exponencialmente pequeñas influyen de manera decisiva en la estructura y amplitud de la solución resonante. Los métodos de aproximación son entonces retos difíciles y resultan por lo tanto sofisticados porque tienen que captar con herramientas *ad*

*hoc* tales magnitudes trascendentalmente pequeñas. La condición de frontera que se agrega en el método propuesto es del tipo mixto en el sentido de que relaciona en la misma identidad valores de las pendientes en los dos extremos del dominio, lo cual, de una cierta manera, equivale precisamente a captar la información trascendental que viaja a lo largo del dominio. Además de ser natural del punto de vista conceptual, el método también lo es en el aspecto técnico, ya que usa procedimientos clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias [5, 6, 13, 14, 49, 52, 59, 62, 112, 118, 119, 134, 151, 155, 160], tales como factor integrante, primera integral y reducción del orden. En la caracterización de los problemas resonantes, los artículos publicados enfatizan que son especialmente los que pueden ser transformados en ciertas ecuaciones modelo; por lo que la posibilidad de reducir el orden es aquí la regla y no la excepción. Esto permite una aplicabilidad suficientemente amplia del método, como se puede apreciar con la resolución de los casos más importantes de resonancia de Ackerberg y O'Malley comprobada, en las cinco secciones de este Capítulo 3.

El cuarto y último capítulo se sale del marco en el cual se conoce la resonancia de Ackerberg y O'Malley. Muestra, siempre con los casos más sencillos posibles sin ningún intento de generalización, que la resonancia de capas de frontera no está confinada a las ecuaciones ordinarias escalares de segundo orden, con el problema de indeterminación manifestándose similarmente en situaciones distintas, y que la idea de resolución descrita en este trabajo es también aplicable exitosamente en estos contextos diferentes.

En el trabajo, el código de todos los ítemes utiliza como prefijo el número del capítulo donde se encuentra; el teclear una referencia a un código activa el enlace. De igual manera, las referencias bibliográficas, entre corchetes, envían a la Bibliografía (ordenada alfabéticamente) que empieza página 128.

A lo largo de este trabajo, el mayor esfuerzo matemático radica en la consecución de aproximaciones asintóticas. A continuación, se dan solamente algunas definiciones básicas imprescindibles para cualquier estimación o análisis asintótico; más detalles pueden consultarse, por ejemplo, en [9, 17, 19, 21, 29, 35, 47, 54, 67, 68, 71–

73, 80, 81, 83–93, 97, 98, 101, 121, 126, 143, 150, 167, 173].

**Definición 0.1** (o chica). *Dadas dos funciones  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\delta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f(\varepsilon)$  es una o chica de  $\delta(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon$  tienda a cero por valores positivos y se escribe*

$$f(\varepsilon) = o(\delta(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

*si y sólo si para toda constante  $\mu > 0$ , existe un número  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  se cumple  $|f(\varepsilon)| \leq \mu|\delta(\varepsilon)|$ .*

**Definición 0.2** (O grande). *Dadas dos funciones  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\delta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $f(\varepsilon)$  es una O grande de  $\delta(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon$  tienda a cero por valores positivos y se escribe*

$$f(\varepsilon) = O(\delta(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

*si y sólo si existen una constante  $C > 0$  y un número  $\bar{\varepsilon} > 0$  tales que para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  se cumple  $|f(\varepsilon)| \leq C|\delta(\varepsilon)|$ .*

**Definición 0.3** (equivalencia asintótica). *Dadas una función  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , una constante  $f_0 \in \mathbb{R}$  no nula y una función  $\delta_0 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  para la cual existe un número  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  se tiene  $\delta_0(\varepsilon) \neq 0$ , se dice que  $f(\varepsilon)$  es asintóticamente equivalente a  $f_0\delta_0(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon$  tienda a cero por valores positivos y se escribe*

$$f(\varepsilon) \sim f_0\delta_0(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

*si y sólo si se cumple*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\varepsilon)}{f_0\delta_0(\varepsilon)} = 1.$$

**Definición 0.4** (sucesión asintótica). *Dada para cada número natural  $i$  una función  $\delta_i : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que  $\{\delta_i(\varepsilon)\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión asintótica cuando  $\varepsilon$  tienda a cero por valores positivos si y sólo si existe un número  $\bar{\varepsilon} > 0$  tal que para todo  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$  y todo  $i \in \mathbb{N}$  se tiene  $\delta_i(\varepsilon) \neq 0$  y tal que para todo  $i \in \mathbb{N}$  se cumple*

$$\delta_{i+1}(\varepsilon) = o(\delta_i(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Los términos  $\delta_i(\varepsilon)$  de una sucesión asintótica se llaman funciones de escala.

**Definición 0.5** (expansión asintótica). *Dadas una función  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , una sucesión asintótica  $\{\delta_i(\varepsilon)\}_{i \in \mathbb{N}}$  y una sucesión numérica  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , se dice que la serie  $\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \delta_i(\varepsilon)$  es una expansión asintótica en el sentido de Poincaré de la expresión  $f(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon$  tienda a cero por valores positivos y se escribe*

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \delta_i(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

si y sólo si para todo  $j \in \mathbb{N}$  se cumple

$$f(\varepsilon) = \sum_{i \leq j} f_i \delta_i(\varepsilon) + o(\delta_j(\varepsilon)) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

La condición para el término dominante de una expansión asintótica coincide con la de equivalencia asintótica dada en la Definición 0.3:  $f(\varepsilon) = f_0 \delta_0(\varepsilon) + o(\delta_0(\varepsilon))$  con  $f_0 \neq 0$  equivale a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(\varepsilon)}{f_0 \delta_0(\varepsilon)} = 1$ ; por eso se usa el mismo símbolo  $\sim$  en ambos casos.

---

## CAPÍTULO 1

### El problema con valores en la frontera de dos puntos, para una ecuación lineal homogénea singularmente perturbada de segundo orden

En este capítulo, para introducir tanto el contexto de los problemas de perturbación singular que exhiben la resonancia de Ackerberg y O'Malley, como las técnicas involucradas en la aplicación estándar del método de expansiones asintóticas empatadas (fuente de la indeterminación por resolver), se desarrolla el tratamiento general del problema con valores en la frontera (p.v.f.) asociado a una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) singularmente perturbada, lineal homogénea de segundo orden, sucesivamente cuando los coeficientes son constantes, cuando son variables pero sin existir un punto de retorno, cuando son constantes excepto un punto de retorno simple, cuando son variables incluyendo un punto de retorno simple pero sin darse el caso excepcional de la resonancia de Ackerberg y O'Malley y finalmente, cuando además satisfacen la condición planteada originalmente por Ackerberg y O'Malley en [2].

Si bien varios autores de trabajos relacionados con la resonancia de Ackerberg y O'Malley hacen incursiones en el plano complejo, aquí el dominio será limitado a la recta real; específicamente, se tratará del intervalo cerrado  $[-1, L]$ , donde  $L$  es un número positivo dado. Las condiciones de frontera serán de tipo Dirichlet, a saber

$$y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i, \quad y(L, \varepsilon) = B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i, \quad (1.1)$$

donde  $y(\cdot, \varepsilon)$  es la función incógnita,  $\varepsilon > 0$  es el parámetro de perturbación y  $A$  y  $B$  son dos funciones reales analíticas de  $\varepsilon$ , dadas.

### 1.1 Ecuación con coeficientes constantes

Sea la e.d.o. de segundo orden, lineal homogénea con coeficientes constantes

$$\varepsilon y'' + py' + pqy = 0, \quad -1 \leq x \leq L, \quad (1.2)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es un parámetro pequeño y los coeficientes  $p \neq 0$  y  $q$  son números reales dados, independientes de  $\varepsilon$  por simplicidad (podrían depender regularmente de  $\varepsilon$ , en cuyo caso se asumiría que el límite de  $p$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  no es nulo).

Se considerará primero el caso  $p > 0$ . La ecuación diferencial autónoma tiene como autovalores los dos números reales (al menos para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño)

$$\lambda(\varepsilon) = -\frac{p + \sqrt{p^2 - 4\varepsilon pq}}{2\varepsilon} = -\frac{p}{\varepsilon} + q + O(\varepsilon)$$

y

$$\mu(\varepsilon) = \frac{-2pq}{p + \sqrt{p^2 - 4\varepsilon pq}} = -q + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

La solución del p.v.f. (1.2)-(1.1) es entonces dada por la expresión exacta

$$y(x, \varepsilon) = \frac{[A - Be^{-\mu(L+1)}] e^{\lambda(x+1)} + [B - Ae^{\lambda(L+1)}] e^{\mu(x-L)}}{1 - e^{(\lambda-\mu)(L+1)}} \quad (1.3)$$

donde, para aliviar las escrituras, no se mencionó la dependencia de  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  respecto del parámetro  $\varepsilon$ .

De manera más explícita, vale la aproximación asintótica uniforme

$$y(x, \varepsilon) \sim [A_0 - B_0 e^{q(L+1)}] e^{-p(x+1)/\varepsilon} + B_0 e^{q(L-x)} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (1.4)$$

Esto indica que existe una *capa de frontera* para  $0 \leq x + 1 = O(\varepsilon)$ , en la cual la solución varía con una pendiente abrupta de orden  $O(1/\varepsilon)$ , desde el valor inicial izquierdo límite  $A_0$  hasta alcanzar el valor  $B_0 e^{q(L+1)}$  y empatarse entonces con la

curva suave  $Y_0(x) = B_0 e^{q(L-x)}$ , todo esto en forma aproximada.

**Ejemplo 1.1.** Para el p.v.f.

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1/2, \quad \varepsilon \in (0, 1/4),$$

$$y(-1) = y(1/2) = 1/(1 - \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i,$$

la aproximación asintótica (1.4) es  $y(x, \varepsilon) \sim e^{1/2-x} - (e^{3/2} - 1) e^{-(x+1)/\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

La Figura 1.1 muestra una comparación de la aproximación con la solución exacta para dos valores del parámetro  $\varepsilon$ .

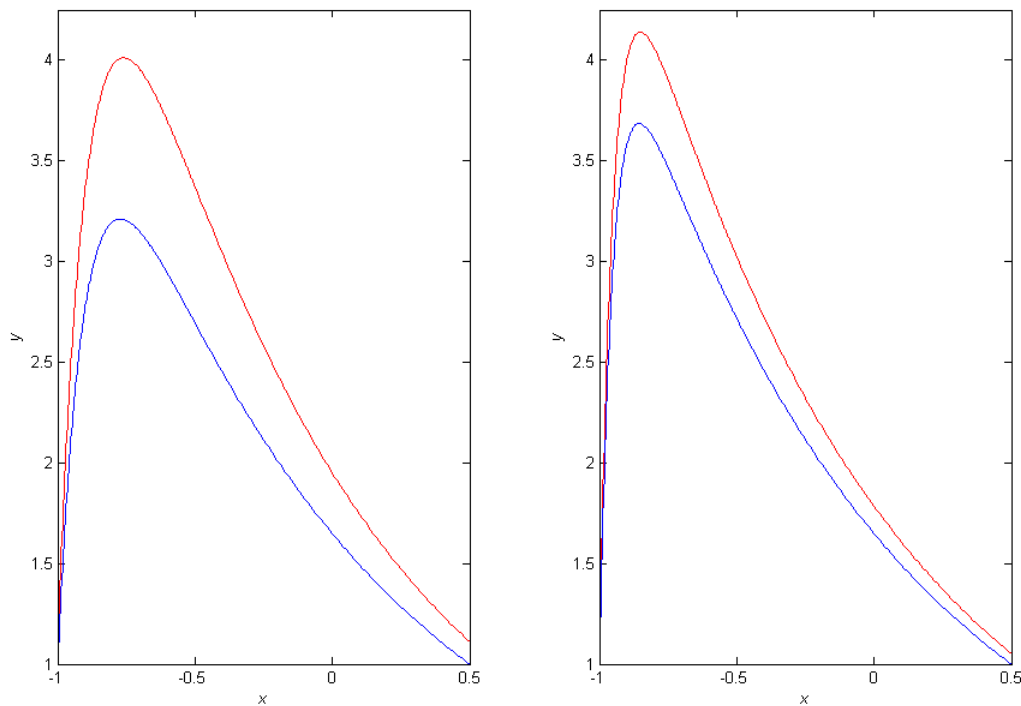


Figura 1.1: Solución (en rojo) y aproximación (en azul) para el Ejemplo 1.1. A la izquierda,  $\varepsilon = 0,1$  y a la derecha,  $\varepsilon = 0,05$ .

Si ahora se considera el caso  $p < 0$ , los mismos autovalores se escriben de

manera más adecuada como

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{2pq}{\sqrt{p^2 - 4\varepsilon pq} - p} = -q + O(\varepsilon)$$

y

$$\mu(\varepsilon) = \frac{\sqrt{p^2 - 4\varepsilon pq} - p}{2\varepsilon} = \frac{|p|}{\varepsilon} + q + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

y la misma solución exacta (1.3) admite la aproximación asintótica uniformemente válida

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{-q(x+1)} + [B_0 - A_0 e^{-q(L+1)}] e^{p(L-x)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (1.5)$$

la cual indica una evolución suave  $Y_0(x) = A_0 e^{-q(x+1)}$  desde  $x = -1$  hasta una vecindad  $O(\varepsilon)$  de la frontera derecha, empatándose entonces con una solución interior a una capa de frontera, no suave.

En efecto, en ambos casos, el límite de la solución del p.v.f. cuando  $\varepsilon$  tienda a cero es discontinuo en uno de los dos extremos del dominio (suponiendo, genéricamente,  $A_0 \neq B_0 e^{q(L+1)}$ ), por lo que no hay convergencia uniforme hacia una solución de la ecuación no perturbada correspondiente a  $\varepsilon = 0$  (tal ecuación *reducida* es  $pY_0' + pqY_0 = 0$  y la satisfacen las funciones de la forma  $Y_0(x) = \text{constante} \times e^{-qx}$ ). Para  $p > 0$ , se tienen los límites distintos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(x, \varepsilon) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} B_0 e^{q(L-x)} = B_0 e^{q(L+1)} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A(\varepsilon) = A_0 \end{aligned}$$

y análogamente para  $p < 0$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow L^-} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(x, \varepsilon) &= \lim_{x \rightarrow L^-} A_0 e^{-q(x+1)} = A_0 e^{-q(L+1)} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow L^-} y(x, \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} B(\varepsilon) = B_0; \end{aligned}$$



todo lo cual caracteriza el problema considerado como *singularmente perturbado*.

## 1.2 Ecuación con coeficientes variables, sin punto de retorno

Sea ahora la misma ecuación (1.2) pero con coeficientes variables:

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + p(x)q(x)y = 0, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.6)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones suaves y se asume que no hay *punto de retorno* (abscisa del intervalo  $[-1, L]$  en la cual se anule la función  $p$ ). Esta hipótesis implica, en particular, que la e.d.o. (1.6) no tiene soluciones oscilatorias y esto, a su vez, garantiza que para cualquier  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, el p.v.f. (1.6)-(1.1) tiene una solución y una sola.

Se considerará el caso  $p(x) > 0$  para todo  $x \in [-1, L]$ . Se espera entonces un comportamiento de la solución  $y(x, \varepsilon)$  con estructura análoga a la observada en la situación correspondiente con coeficientes constantes: una capa de frontera a la izquierda y exterior a ella, una función suave determinada en primera aproximación por la ecuación reducida.

Como, a diferencia de la sección anterior, no se dispone de la solución exacta, se resolverá el p.v.f. en forma aproximada por el método de *expansiones asintóticas empatadas*.

Primero, se asume para la solución exterior  $Y$  una expansión asintótica

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (1.7)$$

Al insertar esta expansión en la e.d.o. (1.6) y al agrupar lo correspondiente a cada potencia del parámetro  $\varepsilon$ , se deduce una ecuación diferencial para cada término de la expansión.

El término *dominante*  $Y_0$ , al satisfacer la e.d.o. de primer orden

$$p(x)Y_0' + p(x)q(x)Y_0 = 0,$$

puede cumplir con una sola de las dos condiciones de frontera, en este caso la derecha,  $Y_0(L) = B_0$ . Resulta

$$Y_0(x) = B_0 e^{\int_x^L q(s) ds}. \quad (1.8)$$

El término siguiente debe satisfacer

$$p(x)Y_1' + p(x)q(x)Y_1 = -Y_0'', \quad Y_1(L) = B_1$$

y resulta

$$Y_1(x) = \left[ B_1 + B_0 \int_x^L \frac{q^2(s) - q'(s)}{p(s)} ds \right] e^{\int_x^L q(s) ds}.$$

Se puede seguir similarmente, hallando más términos sucesivos para la función exterior a la capa de frontera.

Para determinar la solución interior, se regulariza (localmente) la ecuación diferencial, eliminando la singularidad (el factor  $\varepsilon$  de la derivada de mayor orden) mediante el cambio de variable

$$t = \frac{x+1}{\varepsilon} \quad (1.9)$$

que estira el ancho de la capa y convierte la pendiente  $O(1/\varepsilon)$  en una de orden uno respecto de la nueva escala.

Multiplicando la ecuación (1.6) por  $\varepsilon$ , haciendo  $y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon)$  y denotando cada derivación respecto de  $t$  por un punto superior, se obtiene la e.d.o.

$$\ddot{z} + p(-1 + \varepsilon t) \dot{z} + \varepsilon p(-1 + \varepsilon t) q(-1 + \varepsilon t) z = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (1.10)$$

condicionada al valor inicial  $z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon)$ , para cuya resolución también se usará una expansión asintótica:  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

Como el término dominante  $z_0$  debe satisfacer

$$\ddot{z}_0 + p(-1)\dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = A_0,$$

se obtiene

$$z_0(t) = a_0 + (A_0 - a_0)e^{-p(-1)t},$$

donde  $a_0$  es una constante de integración que se va a determinar mediante *empate* con el término dominante  $Y_0$  de la solución exterior.

Como para  $x$  fijo el cociente  $(x+1)/\varepsilon$  tiende al infinito cuando  $\varepsilon$  tienda a cero por valores positivos, se interpreta la “salida” de la capa como un límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , y como cuando  $\varepsilon$  tienda a cero la capa se reduce a la abscisa inicial, se interpreta la “entrada” en la región exterior como un límite cuando  $x \rightarrow -1^+$ . Por esto, se impone como condición de empate

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = \lim_{x \rightarrow -1^+} Y_0(x), \quad (1.11)$$

y viene  $a_0 = B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds}$ , resultando

$$z_0(t) = B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} + \left( A_0 - B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} \right) e^{-p(-1)t}. \quad (1.12)$$

Ahora, la solución  $y(x, \varepsilon)$  se comporta, en primera aproximación, como  $z_0(t)$  en la capa de frontera y como  $Y_0(x)$  fuera de ella, ambas funciones teniendo el valor común  $a_0$  en una asumida *región de superposición*. Cancelando la duplicación, una aproximación asintótica uniforme viene dada por la expresión compuesta

$$y(x, \varepsilon) \sim Y_0(x) + z_0\left(\frac{x+1}{\varepsilon}\right) - a_0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde, de hecho, la contribución  $z_0((x+1)/\varepsilon) - a_0$  de la solución interior es *trascen-*

dentalmente pequeña fuera de la capa:

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 e^{\int_x^L q(s) ds} + \left( A_0 - B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} \right) e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (1.13)$$

Si se particulariza este resultado al caso tratado en la sección anterior, suponiendo constantes las funciones  $p$  y  $q$ , se comprueba perfecta consistencia ya que la aproximación (1.13) se reduce precisamente a la (1.4).

Para obtener más términos de la expansión asintótica interior, se desarrollan los coeficientes  $p$  y  $q$  de la e.d.o. (1.10) en series de Taylor,

$$p(-1 + \varepsilon t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p^{(i)}(-1) \frac{t^i}{i!}, \quad q(-1 + \varepsilon t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i q^{(i)}(-1) \frac{t^i}{i!}.$$

El primer término correctivo  $z_1$  debe entonces satisfacer

$$\ddot{z}_1 + p(-1)\dot{z}_1 = -p'(-1)t\dot{z}_0 - p(-1)q(-1)z_0, \quad z_1(0) = A_1$$

y se obtiene

$$z_1(t) = a_1 + (A_1 - a_1)e^{-p(-1)t} - q(-1)B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} t + \left( A_0 - B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} \right) \left\{ -\frac{p'(-1)}{2} t^2 + \left[ q(-1) - \frac{p'(-1)}{p(-1)} \right] t \right\} e^{-p(-1)t},$$

donde  $a_1$  es una nueva constante de integración.

Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t)| = \infty$  si  $q(-1)B_0 \neq 0$ , el procedimiento de empate no es inmediato como en el caso anterior. Si se usa la regla de Van Dyke (ver Van Dyke [163] o, por ejemplo, Laforgue [93, Capítulo 7]), prácticamente se *identificará* el resultado de expresar  $(Y_0 + \varepsilon Y_1)(-1 + \varepsilon t)$  hasta el orden  $\varepsilon$  y volver a la variable  $x$ , con el resultado de expresar  $(z_0 + \varepsilon z_1)((x+1)/\varepsilon)$  hasta el orden  $\varepsilon$ . Aplicando

así esta regla, se tiene por una parte

$$\begin{aligned}
& (Y_0 + \varepsilon Y_1)(-1 + \varepsilon t) \\
&= \left\{ B_0 + \varepsilon \left[ B_1 + B_0 \int_{-1+\varepsilon t}^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds \right] \right\} e^{\int_{-1+\varepsilon t}^L q(s) ds} \\
&= \left\{ B_0 + \varepsilon \left[ B_1 + B_0 \int_{-1}^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds \right] \right\} e^{\int_{-1}^L q(s) ds} [1 - q(-1)\varepsilon t] + \dots \\
&= \left[ B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon B_0 \int_{-1}^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds - \varepsilon B_0 q(-1)t \right] e^{\int_{-1}^L q(s) ds} + \dots \\
&= \left[ B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon B_0 \int_{-1}^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds - B_0 q(-1)(x+1) \right] e^{\int_{-1}^L q(s) ds} + \dots
\end{aligned}$$

y por otra parte

$$(z_0 + \varepsilon z_1) \left( \frac{x+1}{\varepsilon} \right) = B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} + \varepsilon a_1 - q(-1) B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} (x+1) + \dots$$

Las dos funciones resultantes son idénticas con sólo tomar

$$a_1 = \left[ B_1 + B_0 \int_{-1}^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds \right] e^{\int_{-1}^L q(s) ds};$$

además, ellas indican los términos comunes a las expansiones exterior e interior, lo cual permite, cancelando tal duplicación, establecer la aproximación asintótica compuesta cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned}
y(x, \varepsilon) &\sim \left( B_0 \left[ 1 + \varepsilon \int_x^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds \right] + \varepsilon B_1 \right) e^{\int_x^L q(s) ds} + \\
&\left\{ \left( A_0 - B_0 e^{\int_{-1}^L q(s) ds} \right) \left( -\frac{p'(-1)}{2\varepsilon} (x+1)^2 + \left[ q(-1) - \frac{p'(-1)}{p(-1)} \right] (x+1) + 1 \right) \right. \\
&\left. + \varepsilon \left( A_1 - \left[ B_1 + B_0 \int_{-1}^L \frac{q^2(s)-q'(s)}{p(s)} ds \right] e^{\int_{-1}^L q(s) ds} \right) \right\} e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon},
\end{aligned}$$

válida uniformemente.

El caso  $p(x) < 0$  para todo  $x \in [-1, L]$  es análogo, con la diferencia de que se tiene una capa de frontera a la derecha y no a la izquierda, con un decaimiento

de la solución interior al salir de la capa dado por la función

$$e^{p(L)(L-x)/\varepsilon},$$

siendo crucial para tal amortiguamiento la negatividad del coeficiente  $p(L)$ , como era crucial la positividad del factor  $p(-1)$  en el caso anterior. Es nítida la relación entre la posibilidad de una capa de frontera y el signo en ese lugar del coeficiente de la primera derivada en la e.d.o.: si  $p > 0$ , no puede darse una capa a la derecha; si  $p < 0$ , no puede darse una capa a la izquierda.

### 1.3 Ecuación con coeficientes constantes, excepto un punto de retorno único y simple

Se incluye ahora la existencia de un punto de retorno en el interior del intervalo  $[-1, L]$ , específicamente en  $x = 0$  (sin pérdida de generalidad). Suponerlo único y simple implica que el coeficiente de la primera derivada, en los subintervalos  $[-1, 0)$  y  $(0, L]$ , no se anula y tiene signos constantes y opuestos. Se asumirá positivo a la izquierda y negativo a la derecha.

Estas hipótesis corresponden al marco escogido por Ackerberg y O'Malley [2] para presentar su fenómeno de resonancia, pero se deja para la última sección de este capítulo asumir una hipótesis adicional (no genérica; es decir, excepcional) indispensable para que se produzca tal resonancia. Además, se deja para la próxima sección el caso general con coeficientes variables y se considera primero la e.d.o.

$$\varepsilon y'' - pxy' + pqy = 0, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.14)$$

donde los factores  $p > 0$  y  $q$  son constantes.

Como en la Sección 1.1, es posible determinar la solución exacta del p.v.f. (1.14)-(1.1), y deducir de ella su comportamiento asintótico aproximado en términos de capas de frontera y solución exterior.

El cambio de variable

$$t = \frac{px^2}{2\varepsilon}$$

transforma la ecuación (1.14), restringida al intervalo  $[-1, 0]$  ó  $[0, L]$ , en la e.d.o.

$$t\ddot{y} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\dot{y} + \frac{q}{2}y = 0,$$

restringida al intervalo  $[0, p/(2\varepsilon)]$  o  $[0, pL^2/(2\varepsilon)]$ . Se trata de la ecuación de Kummer  $t\ddot{y} + (b - t)\dot{y} - ay = 0$ , con parámetros  $a = -q/2$  y  $b = 1/2$ . Una solución es la función de Kummer  $M(a, b, t)$  y otra linealmente independiente (entre otras) es  $t^{1-b}M(1 + a - b, 2 - b, t)$ . Abramowitz y Stegun [1, página 504] suministran el comportamiento asintótico

$$M(a, b, t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{t} t^{a-b} [1 + O(1/t)] \quad (t \rightarrow \infty). \quad (1.15)$$

Sin embargo, no mencionan conjuntamente las restricciones para el uso de esta fórmula, la cual es obviamente incorrecta en el caso excepcional pero factible de una función de Kummer que resulte polinomial (como se verá más adelante en este trabajo). Como en esta sección se aparta el caso excepcional de la resonancia de Ackerberg y O'Malley, se podrá usar (1.15), precisamente restringida a dilucidar el caso general sin resonancia.

Sean entonces

$$y_1(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{px^2}{2\varepsilon}\right)}{M\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{p}{2\varepsilon}\right)} \quad \text{e} \quad y_2(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x M\left(\frac{1-q}{2}, \frac{3}{2}, \frac{px^2}{2\varepsilon}\right)}{L M\left(\frac{1-q}{2}, \frac{3}{2}, \frac{pL^2}{2\varepsilon}\right)},$$

soluciones linealmente independientes de (1.14), respectivamente par e impar, normalizadas para satisfacer  $y_1(-1, \varepsilon) = 1$  e  $y_2(L, \varepsilon) = 1$ . Luego la solución del p.v.f. (1.14)-(1.1) puede escribirse como

$$y(x, \varepsilon) = \frac{[y_1(x) - y_1(L) y_2(x)] A + [y_2(x) - y_1(x) y_2(-1)] B}{1 - y_1(L) y_2(-1)} \quad (1.16)$$

donde, para aliviar la presentación, se ha omitido la dependencia de  $A$ ,  $B$ ,  $y_1$  e  $y_2$  respecto del parámetro  $\varepsilon$ .

Del comportamiento asintótico de  $M(a, b, t)$  en (1.15) se deduce el de las funciones  $y_1$  e  $y_2$  cuando  $\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} y_1(x, \varepsilon) &= |x|^{-q-1} e^{p(x^2-1)/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)] \\ y_2(x, \varepsilon) &= \sigma_x(L/|x|)^{q+1} e^{p(x^2-L^2)/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)], \end{aligned}$$

donde  $\sigma_x = \text{signo}(x)$ , y su uso en la solución exacta (1.16) implica

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= |x|^{-q-1} \left[ \left( \frac{1-\sigma_x}{2} \right) e^{p(x^2-1)/(2\varepsilon)} A_0 + \left( \frac{1+\sigma_x}{2} \right) L^{q+1} e^{p(x^2-L^2)/(2\varepsilon)} B_0 \right] \left[ 1 + O\left( \frac{\sqrt{\varepsilon}}{x} \right) \right] \\ &= \begin{cases} |x|^{-q-1} e^{p(x^2-1)/(2\varepsilon)} A_0 [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)] & \text{si } x < 0 \\ (L/x)^{q+1} e^{p(x^2-L^2)/(2\varepsilon)} B_0 [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)] & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Como  $M(a, b, 0) = 1$ , también se obtiene

$$y(0, \varepsilon) = \frac{\Gamma(-q/2)}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{p}{2\varepsilon} \right)^{(q+1)/2} \left[ A_0 e^{-\frac{p}{2\varepsilon}} + B_0 L^{q+1} e^{-\frac{pL^2}{2\varepsilon}} \right] [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Se tiene ahora la información suficiente para concluir:

**Proposición 1.1.** *La solución del p.v.f. (1.14)-(1.1) presenta capas de frontera en ambos extremos del dominio y fuera de ellas es trascendentalmente pequeña, es decir nula como expansión en potencias de  $\varepsilon$ . Una aproximación asintótica uniformemente válida es*

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{-p(x+1)/\varepsilon} + B_0 e^{Lp(x-L)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (1.17)$$

**Demostración.** Si  $x + 1 = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , existe  $t = O(1)$  tal que  $x = -1 + \varepsilon t$ ; entonces  $y(x, \varepsilon) = |-1 + \varepsilon t|^{-q-1} \exp\{p[(-1 + \varepsilon t)^2 - 1]/(2\varepsilon)\} A_0 [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] = \exp[-pt + O(\varepsilon)] A_0 [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] = A_0 \exp[-p(x+1)/\varepsilon] + O(\sqrt{\varepsilon})$ . Si  $x < 0$  y  $x + 1 \neq O(\varepsilon)$ , dado un número positivo cualquiera  $M$ , se tiene  $-1 + M\varepsilon < x < 0$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Entonces  $|y(x, \varepsilon)| < |x|^{-q-1} \exp[p(-M +$



$M^2\varepsilon/2)]|A_0|[1+O(\sqrt{\varepsilon})] < 2|A_0|\exp(-pM)$  si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño. Luego  $y(x, \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $L - x = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , existe  $t = O(1)$  tal que  $x = L - \varepsilon t$ ; entonces  $y(x, \varepsilon) = |L/(L - \varepsilon t)|^{q+1} \exp\{p[(L - \varepsilon t)^2 - L^2]/(2\varepsilon)\} B_0[1 + O(\sqrt{\varepsilon})] = \exp[-Lpt + O(\varepsilon)] B_0[1 + O(\sqrt{\varepsilon})] = B_0 \exp[Lp(x - L)/\varepsilon] + O(\sqrt{\varepsilon})$ . Si  $x > 0$  y  $L - x \neq O(\varepsilon)$ , dado un número positivo cualquiera  $M$ , se tiene  $0 < x < L - M\varepsilon$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Entonces  $|y(x, \varepsilon)| < |L/x|^{q+1} \exp[p(-LM + M^2\varepsilon/2)] |B_0|[1 + O(\sqrt{\varepsilon})] < 2|B_0|\exp(-LpM)$  si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño. Luego  $y(x, \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Ejemplo 1.2.** La solución exacta del p.v.f. singularmente perturbado

$$\varepsilon y'' - xy' - y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 1$$

es  $y(x, \varepsilon) = \exp(\frac{x^2-1}{2\varepsilon})$  y su aproximación asintótica (1.17) es

$$y(x, \varepsilon) \sim e^{-(x+1)/\varepsilon} + e^{(x-1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

La Figura 1.2 (página siguiente) muestra una comparación de la aproximación con la solución exacta para dos valores de  $\varepsilon$ .

#### 1.4 Ecuación con coeficientes variables y punto de retorno único y simple

Sea ahora la misma ecuación (1.14) pero con coeficientes variables

$$\varepsilon y'' - xp(x)y' + p(x)q(x)y = 0, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.18)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones suaves y  $p(x) > 0$  para todo  $x \in [-1, L]$ .

Se espera que la solución del p.v.f. (1.18)-(1.1) tenga una estructura análoga a la observada con coeficientes constantes: capas de frontera en ambos extremos del dominio y entre ellas una solución exterior asintóticamente nula. Se va a aplicar el método de expansiones asintóticas empatadas.

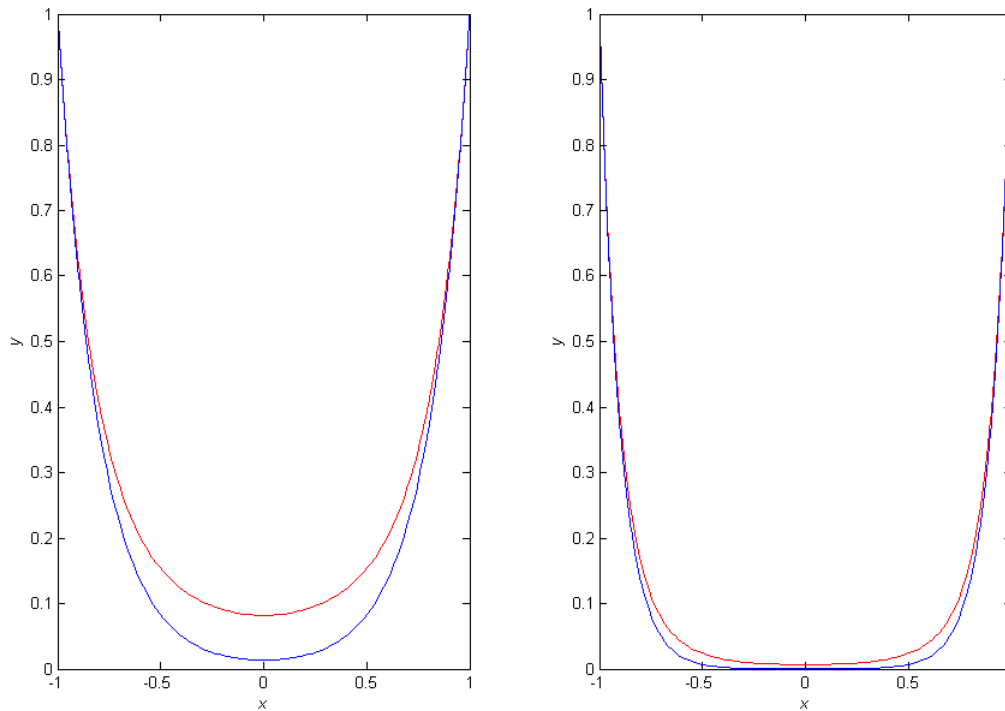


Figura 1.2: Solución (en rojo) y aproximación (en azul) para el Ejemplo 1.2. A la izquierda,  $\varepsilon = 0,2$  y a la derecha,  $\varepsilon = 0,1$ .

Para la capa de frontera izquierda, el cambio de variables

$$t = (x + 1)/\varepsilon, \quad z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$$

transforma la ecuación (1.18) en

$$\ddot{z} + (1 - \varepsilon t)p(-1 + \varepsilon t)\dot{z} + \varepsilon p(-1 + \varepsilon t)q(-1 + \varepsilon t)z = 0, \quad 0 \leq t < \infty$$

y los dos primeros términos de la expansión interior  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ , al satis-

facer

$$\begin{aligned}\ddot{z}_0 + p(-1)\dot{z}_0 &= 0, & z_0(0) &= A_0, \\ \ddot{z}_1 + p(-1)\dot{z}_1 &= tp(-1)\dot{z}_0 - p(-1)q(-1)z_0, & z_1(0) &= A_1,\end{aligned}$$

deben tener las formas

$$\begin{aligned}z_0(t) &= a_0 + (A_0 - a_0)e^{-p(-1)t} \\ z_1(t) &= a_1 + (A_1 - a_1)e^{-p(-1)t} - a_0q(-1)t \\ &\quad + (A_0 - a_0) \left\{ \frac{p(-1)}{2}t^2 + [q(-1) + 1]t \right\} e^{-p(-1)t},\end{aligned}$$

donde  $a_0$  y  $a_1$  son constantes de integración.

Para la capa de frontera derecha, el cambio de variables

$$t = (x - L)/\varepsilon, \quad z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$$

transforma la ecuación (1.18) en

$$\ddot{z} - (L + \varepsilon t)p(L + \varepsilon t)\dot{z} + \varepsilon p(L + \varepsilon t)q(L + \varepsilon t)z = 0, \quad -\infty < t \leq 0$$

y los dos primeros términos de la expansión interior  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ , al satisfacer

$$\begin{aligned}\ddot{z}_0 - Lp(L)\dot{z}_0 &= 0, & z_0(0) &= B_0, \\ \ddot{z}_1 - Lp(L)\dot{z}_1 &= tp(L)\dot{z}_0 - p(L)q(L)z_0, & z_1(0) &= B_1,\end{aligned}$$

deben tener las formas

$$\begin{aligned} z_0(t) &= b_0 + (B_0 - b_0)e^{Lp(L)t} \\ z_1(t) &= b_1 + (B_1 - b_1)e^{Lp(L)t} - \frac{b_0q(L)}{L}t \\ &\quad + (B_0 - b_0) \left\{ \frac{p(L)}{2}t^2 - \frac{q(L)+1}{L}t \right\} e^{Lp(L)t}, \end{aligned}$$

donde  $b_0$  y  $b_1$  son constantes de integración.

Ahora, la ecuación reducida, simplificada por  $p(x) > 0$ , es

$$-xY'_0 + q(x)Y_0 = 0, \quad -1 < x < L.$$

Tiene una singularidad en  $x = 0$  que puede ser removida para funciones  $q$  excepcionales, como por ejemplo cuando  $q(x) = xr(x)$  con  $r$  suave, pero en general no es el caso. Queda entonces como única solución admisible la idénticamente nula  $Y_0(x) = 0$ . Esto, a su vez, implica el mismo resultado para los demás términos, ya que han de satisfacer  $-xY'_{i+1} + q(x)Y_{i+1} = -Y''_i/p(x) = 0$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Se obtiene pues

$$Y(x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (1.19)$$

Las condiciones de empate al orden uno,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = 0$  a la izquierda y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = 0$  a la derecha, determinan respectivamente  $a_0 = 0$  y  $b_0 = 0$ . Habiendo quedado eliminados los términos lineales en las funciones  $z_1$ , las condiciones de empate al orden  $\varepsilon$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$  a la izquierda y  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z_1(t) = 0$  a la derecha, determinan respectivamente  $a_1 = 0$  y  $b_1 = 0$ .

Una aproximación asintótica uniformemente válida es entonces

$$\begin{aligned}
 y(x, \varepsilon) \sim & \\
 & \left( A_0 \left\{ \frac{p(-1)}{2\varepsilon} (x+1)^2 + [q(-1) + 1](x+1) + 1 \right\} + \varepsilon A_1 \right) e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \\
 & + \left( B_0 \left\{ \frac{p(L)}{2\varepsilon} (L-x)^2 + \frac{q(L)+1}{L} (L-x) + 1 \right\} + \varepsilon B_1 \right) e^{Lp(L)(x-L)/\varepsilon} \\
 & (\varepsilon \rightarrow 0^+);
 \end{aligned}$$

evidencia como previsto las dos capas de frontera separadas por una solución exterior (trascendentalmente) cercana a cero.

### 1.5 Ecuación con la condición de Ackerberg y O'Malley

Ackerberg y O'Malley [2] consideraron la ecuación (1.18) de la sección anterior

$$\varepsilon y'' - xp(x)y' + p(x)q(x)y = 0, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.20)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones analíticas y  $p(x) > 0$  para todo  $x \in [-1, L]$ , imponiendo adicionalmente la condición especial

$$q(0) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (1.21)$$

La ecuación reducida  $-xp(x)Y_0' + p(x)q(x)Y_0 = 0$  admite entonces la solución suave

$$Y_0(x) = k_0 x^{q(0)} \exp \left[ \int_0^x \frac{q(s) - q(0)}{s} ds \right] \quad (1.22)$$

para toda constante  $k_0 \in \mathbb{R}$ , y esto permite que la solución en el intervalo abierto  $(-1, L)$  no sea asintóticamente nula en todos los órdenes como en la situación general; por eso Ackerberg y O'Malley calificaron de *resonancia* a tal fenómeno excepcional. Se puede interpretar la constante multiplicativa  $k_0$  (todavía por determinar...) como la amplitud de la resonancia.

El empate de las soluciones interiores límites, obtenidas en la Sección 1.4, con la función exterior (1.22) da ahora  $a_0 = Y_0(-1)$  y  $b_0 = Y_0(L)$ . Se tiene entonces como *ansatz* de aproximación asintótica uniforme

$$y(x, \varepsilon) \sim Y_0(x) + [A_0 - Y_0(-1)]e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + [B_0 - Y_0(L)]e^{p(L)L(x-L)/\varepsilon}, \quad (1.23)$$

pero la constante  $k_0$  queda indeterminada después de completada la aplicación del método de expansiones asintóticas empatadas para la primera aproximación. En algunos problemas a los cuales se aplica este método, una indeterminación semejante se resuelve al efectuar el empate en los órdenes siguientes (ver Bender y Orszag [8]), pero no es el caso aquí.

Este fracaso de un método tan importante, de uso muy generalizado, es la razón principal del impacto que produjo el artículo de Ackerberg y O'Malley, el cual fue respondido por numerosas investigaciones publicadas desde entonces hasta el día de hoy. Algunas de ellas propusieron métodos externos a las expansiones asintóticas empatadas para lograr resolver la indeterminación sobre la amplitud de la resonancia; el próximo capítulo describe varios de estos métodos.

Sin embargo, otras de estas publicaciones [115, 128, ...] enfocaron el establecimiento de condiciones necesarias y/o suficientes para que se dé este tipo particular de resonancia. En efecto, en el marco de la ecuación (1.20), la condición (1.21) es realmente insuficiente. Por ejemplo, en general, la ecuación exterior correspondiente al término  $Y_1$  tiene una nueva singularidad aun cuando se haya cumplido con el requisito (1.21), lo cual implica que no hay resonancia si no se restringen mucho más los coeficientes  $p$  y  $q$  (se propusieron series infinitas de condiciones).

Resulta que los casos conocidos en los cuales ha sido demostrada la ocurrencia de la resonancia de Ackerberg y O'Malley son principalmente la familia de ecuaciones de Hermite singularmente perturbadas

$$\varepsilon y'' - xy' + qy = 0 \quad \text{con } q \in \mathbb{N}, \quad (1.24)$$

la familia de ecuaciones (asociadas a un tiempo de salida en Probabilidades Aplicadas) con  $q \equiv 0$  y punto de retorno de orden impar (una generalización respecto del planteamiento original)

$$\varepsilon y'' - x^{2m+1} p(x) y' = 0 \quad \text{con } m \in \mathbb{N} \text{ y } p > 0, \quad (1.25)$$

y ecuaciones particulares cuya función  $q$  depende además del parámetro  $\varepsilon$ , de manera bien específica, o con término no homogéneo también con dependencia bien específica de  $\varepsilon$ , siendo trascendentalmente pequeño el rango de valores de un término crítico para que se dé la resonancia (ver, por ejemplo, Kopell [63, 64]), saliéndose en tal situación del marco de la analiticidad.

En todos estos casos, el *ansatz* (1.23) de aproximación asintótica uniforme, mientras la constante  $k_0$  no esté determinada, oculta la estructura efectiva de la solución del p.v.f.: pareciera que existen capas de frontera en ambos extremos del dominio, lo cual en realidad sólo ocurre en una circunstancia particular (a saber, cuando  $L$  tenga el valor especial  $\widehat{L}$  que anula la integral sobre todo el dominio del término que multiplica la primera derivada en la e.d.o.:  $\int_{-1}^{\widehat{L}} xp(x) dx = 0$ ); en general, el valor de  $k_0$  es precisamente el que cancela una de las dos capas de frontera. Esto hace todavía más importante la tarea de lograr determinar la amplitud de la resonancia.

---

## CAPÍTULO 2

### Métodos conocidos para resolver la indeterminación

Para remediar el fracaso del método de expansiones asintóticas empatadas en el caso de la resonancia de Ackerberg y O'Malley, algunos autores propusieron utilizar otro método desde el principio. Por ejemplo, Ackerberg y O'Malley, en su propio artículo, usaron el clásico método WKB (o WKBJ); Watts [171], Zauderer [176] y Matkowsky [115] usaron aproximaciones asintóticas más precisas definiendo variables interiores más sofisticadas; Lakin [105] construyó series formales en términos de funciones parabólico-cilíndricas, uniformes en todo el dominio; Kreiss y Parter [66] recurrieron al principio del máximo; Kopell [63, 64], en un enfoque geométrico, estudió ciertas variedades invariantes de soluciones; de Groen [23–25] aplicó análisis espectral; Georgiou y Olmstead [44] reformularon el problema como una ecuación integral y aplicaron una condición de solubilidad; O'Malley y Ward [142] enfocaron la ecuación en derivadas parciales parabólica correspondiente, cuya solución converge muy despacio (*dinámica metaestable*) hacia la solución resonante como estado estacionario; usaron análisis espectral (ver también Laforgue [77] para una aplicación más directa de la misma idea). Todos estos métodos, desligados del de expansiones asintóticas empatadas, no se analizarán aquí.

Este capítulo presenta tres métodos que resuelven la indeterminación partiendo del propio *ansatz* de aproximación uniforme obtenido por el método de expansiones asintóticas empatadas. Para la ilustración de estos métodos, se aplicarán al ejemplo más sencillo de resonancia de Ackerberg y O'Malley, que es a la vez la ecuación singularmente perturbada de Hermite la más simple ( $q = 0$ ) y la versión la más simple de las ecuaciones asociadas a un tiempo de salida ( $m = 0$ ,  $p \equiv 1$ ):

$$\varepsilon y'' - xy' = 0, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (2.1)$$



donde  $L \in (0, \infty)$ , con las condiciones de frontera usuales

$$y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i, \quad y(L, \varepsilon) = B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i, \quad (2.2)$$

donde, por simplicidad, se asumirá  $A_0 B_0 \neq 0$ .

Al aplicar el método de expansiones asintóticas empatadas a este ejemplo tal como hecho en la Sección 1.5, se obtienen una solución exterior constante y soluciones interiores exponenciales simples, de donde la aproximación asintótica compuesta todavía indeterminada

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 + (A_0 - k_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0)e^{L(x-L)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.3)$$

La tarea es la de hallar cómo  $k_0$  depende de  $(A_0, B_0)$  y sobre todo de  $L$ . La respuesta discriminada correcta a conseguir puede derivarse aquí de la resolución exacta.

Al multiplicar la e.d.o. (2.1) por el factor no nulo  $\frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{1-x^2}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene una derivada exacta:  $[y'e^{(1-x^2)/(2\varepsilon)}]' = 0$ , de donde  $y'(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right)$  y luego  $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) I(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)$ , donde

$$I(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \exp\left(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}\right) ds$$

y  $(c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon))$  es un par de constantes de integración, las cuales deben satisfacer  $-c_1(\varepsilon) I(1, \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = A(\varepsilon)$  y  $c_1(\varepsilon) I(L, \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = B(\varepsilon)$ . Resulta

$$y(x, \varepsilon) = \frac{A(\varepsilon) I(L, \varepsilon) + B(\varepsilon) I(1, \varepsilon) + [B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] I(x, \varepsilon)}{I(L, \varepsilon) + I(1, \varepsilon)}. \quad (2.4)$$

Para elucidar el comportamiento asintótico oculto en esta fórmula, es necesario estimar  $I(x, \varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ; primero se hará para  $x = 1$ .

**Lema 2.1.** *Sea la función  $f : (-\infty, 1/2) \rightarrow (0, \infty)$  tal que  $f(t) = 1/\sqrt{1-2t}$  para*

todo  $t < 1/2$ . Su  $i$ -ésima derivada es

$$f^{(i)}(t) = \left( \prod_{j=0}^i |2j - 1| \right) / (1 - 2t)^{i+1/2} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

**Demostración.** La fórmula es cierta para  $i = 0$ . Al ser cierta para algún  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(i+1)}(t) = \left( \prod_{j=0}^i |2j - 1| \right) (-i - \frac{1}{2})(-2) / (1 - 2t)^{i+3/2} = \left( \prod_{j=0}^{i+1} |2j - 1| \right) / (1 - 2t)^{(i+1)+1/2}$ . Por el Principio de Inducción, la fórmula es cierta para todo  $i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposición 2.2.** *Se cumple*

$$I(1, \varepsilon) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \prod_{j=0}^{i-1} |2j - 1| \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.5)$$

**Demostración.** En la integral  $I(1, \varepsilon) = \int_0^1 \exp\left(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}\right) ds$ , se cambia la variable de integración  $s$  por  $t = (1 - s^2)/2$ , de donde  $s = \sqrt{1 - 2t}$ . Así,  $I(1, \varepsilon) = \int_0^{1/2} f(t)e^{-t/\varepsilon} dt$ , con  $f$  la función definida en el Lema 2.1. Para no seguir con una integral impropia, se observa que  $\int_{1/3}^{1/2} f(t)e^{-t/\varepsilon} dt \leq e^{-1/(3\varepsilon)} \int_{1/3}^{1/2} f(t) dt = \frac{e^{-1/(3\varepsilon)}}{\sqrt{3}}$ . Luego  $I(1, \varepsilon) = \int_0^{1/3} f(t)e^{-t/\varepsilon} dt + O\left(e^{-\frac{1}{3\varepsilon}}\right)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Ahora, se integra por partes  $n$  veces:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/3} f(t)e^{-t/\varepsilon} dt &= - \sum_{i=1}^n \varepsilon^i f^{(i-1)}(t)e^{-t/\varepsilon} \Big|_0^{1/3} + \int_0^{1/3} \varepsilon^n f^{(n)}(t)e^{-t/\varepsilon} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon^i f^{(i-1)}(0) + O\left(\varepsilon e^{-\frac{1}{3\varepsilon}}\right) + R(\varepsilon) \end{aligned}$$

donde  $0 < R(\varepsilon) \leq f^{(n)}(1/3) \int_0^{1/3} \varepsilon^n e^{-t/\varepsilon} dt = f^{(n)}(1/3)(1 - e^{-1/(3\varepsilon)})\varepsilon^{n+1}$ . Luego,  $I(1, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varepsilon^i f^{(i-1)}(0) + O(\varepsilon^{n+1})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . El Lema 2.1 aporta la conclusión.  $\square$

**Proposición 2.3.** *Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , se cumple*

$$I(x, \varepsilon) \sim \exp\left(\frac{x^2 - 1}{2\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{x^{2i-1}} \prod_{j=0}^{i-1} |2j - 1| \quad (\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0). \quad (2.6)$$

**Demostración.** En la integral  $I(x, \varepsilon) = \int_0^x \exp\left(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}\right) ds$ , se cambia la variable de integración  $s$  por  $\sigma = s/x$ , de donde  $s = x\sigma$ . Así,  $I(x, \varepsilon) = \int_0^x \exp\left(\frac{x^2\sigma^2-1}{2\varepsilon}\right) x d\sigma = x \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) \int_0^1 \exp\left(\frac{x^2\sigma^2-x^2}{2\varepsilon}\right) d\sigma = x \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) I(1, \varepsilon/x^2)$ . La Proposición 2.2 aporta la conclusión.  $\square$

**Proposición 2.4.** Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , se cumple

$$I(x, \varepsilon) = O\left(\sqrt{\varepsilon} e^{-1/(2\varepsilon)}\right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.7)$$

**Demostración.** En la integral  $I(x, \varepsilon) = \int_0^x \exp\left(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}\right) ds$ , se cambia la variable de integración  $s$  por  $\sigma = s/\sqrt{\varepsilon}$ . Así,  $I(x, \varepsilon) = \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right) \int_0^{x/\sqrt{\varepsilon}} \exp(\sigma^2/2) \sqrt{\varepsilon} d\sigma$ . Como  $x/\sqrt{\varepsilon} = O(1)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la conclusión sigue.  $\square$

Ahora se puede interpretar la solución exacta (2.4). Por la Proposición 2.3,  $I(L, \varepsilon) \sim \frac{\varepsilon}{L} \exp\left(\frac{L^2-1}{2\varepsilon}\right)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ; luego el orden de magnitud de  $I(L, \varepsilon)$  depende de manera *supersensible* de la posición de  $L$  respecto a 1, y es necesario distinguir los tres casos  $L < 1$ ,  $L = 1$  y  $L > 1$ .

**Proposición 2.5.** Si  $L = 1$ , la solución del p.v.f. (2.1)-(2.2) presenta dos capas de frontera, la amplitud de resonancia  $k_0$  es el promedio de los valores impuestos en la frontera al orden uno, y una aproximación asintótica uniformemente válida es

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0 + B_0}{2} + \frac{A_0 - B_0}{2} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{B_0 - A_0}{2} e^{(x-1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.8)$$

**Demostración.** Si  $L = 1$ , la solución exacta (2.4) se simplifica en  $y(x, \varepsilon) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2} \frac{I(x, \varepsilon)}{I(1, \varepsilon)}$ . Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la Proposición 2.4 implica  $y(x, \varepsilon) = \frac{A_0+B_0}{2} + O(\varepsilon)$  y como  $\exp[(\pm x - 1)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , las Proposiciones 2.2 y 2.3 implican  $y(x, \varepsilon) = \frac{A_0+B_0}{2} + \frac{B_0-A_0}{2x} \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)$ . Si  $x = -1 + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces  $\frac{B_0-A_0}{2x} = \frac{A_0-B_0}{2} + O(\varepsilon)$  y  $\frac{x^2-1}{2\varepsilon} = -\frac{x+1}{\varepsilon} + \frac{(x+1)^2}{2\varepsilon} = -(x+1)/\varepsilon + O(\varepsilon)$ , luego  $y(x, \varepsilon) = \frac{A_0+B_0}{2} + \frac{A_0-B_0}{2} e^{-(x+1)/\varepsilon} + O(\varepsilon)$  y como

$\exp[(x-1)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Si  $1-x = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces  $\frac{B_0-A_0}{2x} = \frac{B_0-A_0}{2} + O(\varepsilon)$  y  $\frac{x^2-1}{2\varepsilon} = \frac{x-1}{\varepsilon} + \frac{(x-1)^2}{2\varepsilon} = (x-1)/\varepsilon + O(\varepsilon)$ , luego  $y(x, \varepsilon) = \frac{A_0+B_0}{2} + \frac{B_0-A_0}{2}e^{(x-1)/\varepsilon} + O(\varepsilon)$  y como  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Finalmente, si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  y  $x^2-1 \neq O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , como  $\exp[(\pm x-1)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para los restantes rangos de valores de  $x$ .  $\square$

**Proposición 2.6.** *Si  $L < 1$ , la solución del p.v.f. (2.1)-(2.2) presenta una sola capa de frontera, a la izquierda, la amplitud  $k_0$  de la resonancia es el valor impuesto en la frontera derecha al orden uno, y una aproximación asintótica uniformemente válida es*

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.9)$$

**Demostración.** Si  $L < 1$ , entonces  $I(L, \varepsilon) \ll I(1, \varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  y la solución exacta (2.4) se simplifica en  $y(x, \varepsilon) = \left[ B + (B - A) \frac{I(x, \varepsilon)}{I(1, \varepsilon)} \right] \left[ 1 + O\left( \frac{I(L, \varepsilon)}{I(1, \varepsilon)} \right) \right]$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , las Proposiciones 2.2 y 2.4 implican  $y(x, \varepsilon) = B_0 + O(\varepsilon)$  y como  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , las Proposiciones 2.2 y 2.3 implican  $y(x, \varepsilon) = B_0 + \frac{B_0-A_0}{x} \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)$ . Los casos  $x = -1 + O(\varepsilon)$  y  $x^2-1 \neq O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se tratan como en la demostración anterior (aquí no hay caso  $1-x = O(\varepsilon)$  ya que  $x \leq L < 1$ ).  $\square$

**Proposición 2.7.** *Si  $L > 1$ , la solución del p.v.f. (2.1)-(2.2) presenta una sola capa de frontera, a la derecha, la amplitud  $k_0$  de la resonancia es el valor impuesto en la frontera izquierda al orden uno, y una aproximación asintótica uniformemente válida es*

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0)e^{L(x-L)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.10)$$

**Demostración.** Si  $L > 1$ , entonces  $I(L, \varepsilon) \gg I(1, \varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  y la solución exacta (2.4) se simplifica en  $y(x, \varepsilon) = \left[ A + (B - A) \frac{I(x, \varepsilon)}{I(L, \varepsilon)} \right] \left[ 1 + O\left( \frac{I(1, \varepsilon)}{I(L, \varepsilon)} \right) \right]$

( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , las Proposiciones 2.3 y 2.4 implican  $y(x, \varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon)$  y como  $\exp[L(x - L)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , las Proposiciones 2.2 y 2.3 implican  $y(x, \varepsilon) = A_0 + (B_0 - A_0)\frac{L}{x} \exp\left(\frac{x^2 - L^2}{2\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)$ . Si  $L - x = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces  $(B_0 - A_0)\frac{L}{x} = B_0 - A_0 + O(\varepsilon)$  y  $\frac{x^2 - L^2}{2\varepsilon} = \frac{L(x - L)}{\varepsilon} + \frac{(x - L)^2}{2\varepsilon} = L(x - L)/\varepsilon + O(\varepsilon)$ , luego la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  y  $x^2 - L^2 \neq O(\varepsilon)$ , como  $\exp[L(x - L)/\varepsilon] = o(\varepsilon^n)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la conclusión sigue para los restantes rangos de valores de  $x$ .  $\square$

En todo lo anterior, se ha supuesto que la extensión del dominio es independiente del parámetro de perturbación  $\varepsilon$ ; es decir,  $L \in (0, \infty)$  queda fijo cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . En particular, se utilizó esta hipótesis en las Proposiciones 2.6 y 2.7 al considerar el valor de la integral  $I(L, \varepsilon)$  transcendentamente pequeño o grande, respectivamente. En estas condiciones, la estructura de la solución bifurca de manera catastrófica cuando  $L$  pasa por el valor crítico  $\widehat{L} = 1$ : una capa de frontera en un extremo queda sustituida instantáneamente por un par de capas, el cual queda sustituido instantáneamente por una capa de frontera en el otro extremo. Además, las soluciones interiores son discontinuas en  $L = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{A_0 + B_0}{2} + \frac{A_0 - B_0}{2} e^{-(x+1)/\varepsilon} &\neq \lim_{L \rightarrow 1^-} [B_0 + (A_0 - B_0) e^{-(x+1)/\varepsilon}], \\ \frac{A_0 + B_0}{2} + \frac{B_0 - A_0}{2} e^{(x-1)/\varepsilon} &\neq \lim_{L \rightarrow 1^+} [A_0 + (B_0 - A_0) e^{L(x-L)/\varepsilon}]. \end{aligned}$$

Skinner [156] mostró que se puede conseguir un comportamiento *uniforme* si se considera  $L$  como otra variable independiente. Se supondrá a partir de ahora

$$L = L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i \quad \text{con } L_0 > 0.$$

En este nuevo contexto, las Proposiciones 2.6 y 2.7 son claramente válidas para

$L_0 < 1$  y  $L_0 > 1$ , respectivamente. Para  $L_0 = 1$ , la Proposición 2.5 queda sustituida por:

**Proposición 2.8.** *Si  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), la solución del p.v.f. (2.1)-(2.2) presenta dos capas de frontera, la amplitud de resonancia  $k_0$  es función suave de  $L_1$  y satisface*

$$\lim_{L_1 \rightarrow -\infty} k_0(L_1) = B_0, \quad k_0(0) = \frac{A_0 + B_0}{2}, \quad \lim_{L_1 \rightarrow \infty} k_0(L_1) = A_0$$

y una aproximación asintótica uniformemente válida es

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0 e^{L_1} + B_0}{e^{L_1} + 1} + \frac{A_0 - B_0}{e^{L_1} + 1} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{B_0 - A_0}{1 + e^{-L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.11)$$

**Demostración.** Si  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), entonces  $\exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] = e^{L_1} + O(\varepsilon)$  y la Proposición 2.3 da  $I(L(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon e^{L_1} + O(\varepsilon^2)$ . La solución exacta (2.4) se simplifica en  $y(x, \varepsilon) = \frac{A_0 e^{L_1+B_0}}{e^{L_1+1}} + \frac{B_0-A_0}{e^{L_1+1}} \frac{I(x, \varepsilon)}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ . Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$  o  $x = -1 + O(\varepsilon)$ , la demostración es análoga a la de la Proposición 2.5. Para  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  se tiene  $\frac{I(x, \varepsilon)}{\varepsilon} \sim \frac{\exp(\frac{x^2-1}{2\varepsilon})}{x}$ . Si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , entonces  $\frac{1}{x} = 1 + O(\varepsilon)$  y  $\frac{x^2-1}{2\varepsilon} = \frac{[x-L(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon} + \frac{L(\varepsilon)[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon} + \frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon} = \frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon} + L_1 + O(\varepsilon)$ , luego  $y(x, \varepsilon) = \frac{A_0 e^{L_1+B_0}}{e^{L_1+1}} + \frac{B_0-A_0}{e^{L_1+1}} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} e^{L_1} + O(\varepsilon)$  y la conclusión sigue para este rango de valores de  $x$ . Finalmente, ella sigue para los rangos restantes de manera análoga a la Proposición 2.5.  $\square$

En las tres secciones que siguen, se presentan sendos procedimientos que resuelven, cada uno de manera bien diferente, la indeterminación sobre  $k_0$  dejada por el método de expansiones asintóticas empatadas.

## 2.1 Simetría (Lagerstrom)

En el caso especial de una ecuación diferencial con dominio simétrico  $c - r \leq x \leq c + r$  y con la propiedad de paridad: “si  $y(c + \cdot)$  es solución entonces  $y(c - \cdot)$  es

solución” o la de imparidad: “si  $y(c + \cdot)$  es solución entonces  $-y(c - \cdot)$  es solución”, se puede usar un método simple para resolver la indeterminación, traduciendo la existencia de esta simetría en una condición de paridad o imparidad sobre la solución. Esto requiere por una parte tener garantizada la existencia y unicidad de la solución del problema y por otra parte, tener impuestos en la frontera valores que respetan la propiedad de paridad o imparidad detectada. Sin embargo, cuando no se cumpla esta última condición, Lagerstrom [103] observa que se puede aprovechar la linealidad de la e.d.o. para trasladar la función incógnita mediante una solución particular apropiada de tal modo de obtener valores adecuados en la frontera (una técnica común en el manejo de las ecuaciones en derivadas parciales lineales, para hacer homogéneas condiciones de frontera no dadas así).

Para las ecuaciones lineales homogéneas, las propiedades de paridad e imparidad vienen juntas, luego basta conseguir valores fronterizos que permitan una de las dos propiedades. Kevorkian y Cole [61, página 73] detallan el proceso para la ecuación de Hermite con  $q = 1$ , imponiendo paridad. Aquí, con  $q = 0$ , se impondrá imparidad, como se verá.

Primero se observa que el dominio propuesto  $[-1, L(\varepsilon)]$  no es *a priori* simétrico respecto del origen, por lo que en general, el método de simetría no sería aplicable (ver, sin embargo, más adelante). Se asume  $L(\varepsilon) \equiv 1$  y se pasa a tratar este caso especial.

Segundo, es inmediato verificar que la e.d.o.  $\varepsilon y'' - xy' = 0$  es invariante bajo la transformación  $x \mapsto -x$ , puesto que si  $u(x) = y(-x)$ , entonces  $u'(x) = -y'(-x)$  y  $u''(x) = y''(-x)$ ; luego, partiendo de la evaluación de la e.d.o. en  $-x$ , se tiene  $0 = \varepsilon y''(-x) - (-x)y'(-x) = \varepsilon u'' + x(-u') = \varepsilon u'' - xu'$ , la misma ecuación.

Tercero, suponiendo genéricamente  $|A(\varepsilon)| \neq |B(\varepsilon)|$ , se observa que la e.d.o. admite las funciones constantes como soluciones particulares. Luego se define la traslación  $u = y - C(\varepsilon)$ , donde la constante  $C(\varepsilon)$  se va a determinar convenientemente.

La nueva incógnita  $u$  debe satisfacer el p.v.f.

$$\varepsilon u'' - xu' = 0, \quad u(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon) - C(\varepsilon), \quad u(1, \varepsilon) = B(\varepsilon) - C(\varepsilon).$$

Se ve que no se puede imponer  $u(-1) = u(1)$  si  $A(\varepsilon) \neq B(\varepsilon)$ , pero sí se puede imponer  $u(-1) = -u(1)$ , haciendo

$$C(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(\varepsilon) + B(\varepsilon)}{2},$$

en cuyo caso las nuevas condiciones de frontera son  $u(-1) = [A(\varepsilon) - B(\varepsilon)]/2$  y  $u(1) = [B(\varepsilon) - A(\varepsilon)]/2$ .

Ahora bien, las dos funciones  $u$  y  $-u(\cdot)$  satisfacen tanto la e.d.o. como las condiciones de frontera. Como el p.v.f. tiene una única solución, ésta tiene que ser impar:

$$u(-x) = -u(x) \quad \text{para todo } x \in [-1, 1]. \quad (2.12)$$

La aproximación asintótica compuesta (indeterminada) de esta solución  $u$  es

$$u(x, \varepsilon) \sim k_0 + \left(\frac{A_0 - B_0}{2} - k_0\right) e^{-(x+1)/\varepsilon} + \left(\frac{B_0 - A_0}{2} - k_0\right) e^{(x-1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

La condición (2.12) de imparidad sobre la función  $u$  impone  $k_0 = 0$  y  $u(x, \varepsilon) \sim (B_0 - A_0) \text{sh}(x/\varepsilon) e^{-1/\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Luego la solución  $y = u + C(\varepsilon)$  del problema original tiene la aproximación asintótica uniforme

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0 + B_0}{2} + (B_0 - A_0) \text{sh}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-1/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (2.13)$$

la cual indica las dos capas de frontera en  $x = \pm 1$ , y la solución exterior constante promedio de los valores de frontera,  $Y_0 = (A_0 + B_0)/2$ , todo conforme con lo descrito en la Proposición 2.5.

Los casos más generales  $L(\varepsilon) = L_0 + O(\varepsilon)$  con  $L_0 \neq 1$  pueden deducirse de lo que se acaba de hacer, en la medida de que la existencia y unicidad de la solución



del p.v.f. valen todavía para un dominio convenientemente extendido: si  $L_0 < 1$ , se prolonga el dominio hasta  $x = 1$ , y si  $L_0 > 1$ , se prolonga el dominio a la izquierda hasta  $x = -L(\varepsilon)$ . La solución de interés es entonces la restricción al intervalo  $[-1, L(\varepsilon)]$  de la solución del p.v.f. sobre  $[-1, 1]$  o sobre  $[-L(\varepsilon), L(\varepsilon)]$ ; la capa de frontera en  $x = 1$  queda fuera del dominio en el primer caso y la capa en  $x = -L(\varepsilon)$  queda fuera en el segundo. Esto impone  $k_0 = B_0$  y  $k_0 = A_0$  respectivamente, y se obtienen todos los resultados descritos en las Proposiciones 2.6 y 2.7.

Los casos más sensibles  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$  con  $L_1 \neq 0$  no parecen susceptibles de ser resueltos por este método de simetría.

## 2.2 Cálculo variacional (Grasman y Matkowsky)

Grasman y Matkowsky [46] propusieron usar el cálculo variacional para conseguir la amplitud de resonancia  $k_0$  dejada indeterminada por el método de expansiones asintóticas empatadas. Tal enfoque fue después aprovechado y/o mejorado por Williams [172], Skinner [156] y Srinivasan [159], entre otros, y está descrito en Kevorkian y Cole [60, 61], Lagerstrom [103] y Verhulst [165], entre otros.

Para buscar una ecuación de Euler-Lagrange  $F_y - (F_{y'})' = 0$  equivalente a la e.d.o.  $\varepsilon y'' - xy' = 0$ , se puede hacer  $F_y = 0$  y  $(F_{y'})'$  proporcional a  $\varepsilon y'' - xy'$ . El factor integrante  $\exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$  da la solución  $F_{y'} = \varepsilon y' \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$ , de donde  $F(x, y', \varepsilon) = y'^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$ , prescindiendo del factor constante  $\varepsilon/2$ . Por lo tanto, la solución del p.v.f. optimiza el funcional

$$J_\varepsilon [y(\cdot, \varepsilon)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^L y'(x, \varepsilon)^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right) dx \quad (2.14)$$

entre las funciones  $y$  suaves tales que  $y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon)$  y  $y(L, \varepsilon) = B(\varepsilon)$ ; para aliviar las escrituras en esta sección, no se está indicando la dependencia de  $L = L(\varepsilon)$  respecto del parámetro  $\varepsilon$ .

Luego se puede esperar que una aproximación asintótica uniformemente válida al orden uno de la solución del p.v.f. optimice tal funcional entre las funciones suaves

tales que  $|y(-1, \varepsilon) - A_0|$  y  $|y(L, \varepsilon) - B_0|$  son trascendentalmente pequeños, específicamente entre las obtenidas como *ansatz*

$$y_{k_0}(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} k_0 + (A_0 - k_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0)e^{L(x-L)/\varepsilon}.$$

Se trata ahora de optimizar  $J_\varepsilon[y_{k_0}(\cdot, \varepsilon)]$  entre todos los reales  $k_0$ , lo cual requiere

$$\frac{\partial}{\partial k_0} J_\varepsilon[y_{k_0}(\cdot, \varepsilon)] = 0. \quad (2.15)$$

Con esto, se dispone de una condición adicional para resolver la indeterminación. Para evaluarla aquí, se calcula  $\varepsilon y'_{k_0}(x, \varepsilon) = (k_0 - A_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} + L(B_0 - k_0)e^{L(x-L)/\varepsilon}$ , de donde  $\varepsilon^2 y'_{k_0}(x, \varepsilon)^2 = (k_0 - A_0)^2 e^{-2(x+1)/\varepsilon} + L^2(B_0 - k_0)^2 e^{2L(x-L)/\varepsilon} + 2L(k_0 - A_0)(B_0 - k_0)e^{[(L-1)x - (L^2+1)]/\varepsilon}$ ; luego  $\frac{\partial}{\partial k_0} [\varepsilon^2 y'_{k_0}(x, \varepsilon)^2] = 2(k_0 - A_0)e^{-2(x+1)/\varepsilon} + 2L^2(k_0 - B_0)e^{2L(x-L)/\varepsilon} + 2L(A_0 + B_0 - 2k_0)e^{[(L-1)x - (L^2+1)]/\varepsilon}$ . Así

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial k_0} J_\varepsilon[y_{k_0}(\cdot, \varepsilon)] = 2(k_0 - A_0)J_1 + 2L^2(k_0 - B_0)J_2 + 2L(A_0 + B_0 - 2k_0)J_3,$$

donde

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-1}^L e^{-2(x+1)/\varepsilon} e^{-x^2/(2\varepsilon)} dx = \int_{-1}^L e^{-(x+2)^2/(2\varepsilon)} dx, \\ J_2 &= \int_{-1}^L e^{2L(x-L)/\varepsilon} e^{-x^2/(2\varepsilon)} dx = \int_{-1}^L e^{-(x-2L)^2/(2\varepsilon)} dx, \\ J_3 &= \int_{-1}^L e^{[(L-1)x - (L^2+1)]/\varepsilon} e^{-x^2/(2\varepsilon)} dx = \int_{-1}^L e^{-(x+1-L)^2/(2\varepsilon)} e^{-(L+1)^2/(2\varepsilon)} dx. \end{aligned}$$

Recurriendo a la función complementaria del error  $\operatorname{erfc} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-s^2} ds$

(Abramowitz y Stegun [1, página 297]), se obtiene

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{L+2}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right], \\ J_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{2L+1}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right], \\ J_3 &= -e^{-\frac{(L+1)^2}{2\varepsilon}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{L}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Abramowitz y Stegun [1, página 298] dan el comportamiento asintótico de la función complementaria del error cuando su argumento tienda al infinito:  $\operatorname{erfc} z = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} [1 + O(z^{-2})]$ . Así,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} e^{-1/(2\varepsilon)} [1 + O(\varepsilon)], \\ J_2 &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} e^{-L^2/(2\varepsilon)} [1 + O(\varepsilon)], \\ J_3 &= o \left( e^{-(L+1)^2/(2\varepsilon)} \right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

Luego, la condición de optimización  $\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial k_0} J_\varepsilon [y_{k_0}(\cdot, \varepsilon)] = 0$ , simplificando por  $\sqrt{2\varepsilon}$ , se reduce a

$$(k_0 - A_0) e^{-1/(2\varepsilon)} + L(k_0 - B_0) e^{-L^2/(2\varepsilon)} \sim 0 \quad (2.16)$$

Si  $L = 1$ , la ecuación  $(k_0 - A_0 + k_0 - B_0) e^{-1/(2\varepsilon)} = 0$  da  $k_0 = (A_0 + B_0)/2$ , en conformidad con la Proposición 2.5.

Si  $L_0 < 1$ , la ecuación  $L(k_0 - B_0) e^{-L^2/(2\varepsilon)} = 0$  da  $k_0 = B_0$ , en conformidad con la Proposición 2.6.

Si  $L_0 > 1$ , la ecuación  $(k_0 - A_0) e^{-1/(2\varepsilon)} = 0$  da  $k_0 = A_0$ , en conformidad con la Proposición 2.7.

Si  $L = 1 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$ , la ecuación  $[k_0 - A_0 + (k_0 - B_0) e^{-L_1}] e^{-1/(2\varepsilon)} = 0$  da  $k_0 = \frac{A_0 e^{L_1} + B_0}{e^{L_1} + 1}$ , en conformidad con la Proposición 2.8.

### 2.3 Incorporación de términos trascendentalmente pequeños (MacGillivray)

Para resolver la indeterminación, MacGillivray [114] propuso aplicar los mecanismos usuales del método de expansiones asintóticas empataadas pero además incorporando términos trascendentalmente pequeños.

En el problema que sirve aquí de ejemplo, la aplicación clásica del método produce al orden uno una solución exterior (regular) constante  $Y_0 = k_0$  con  $k_0 \in \mathbb{R}$  indeterminada, una solución interior a una capa de frontera en el extremo izquierdo  $z_0(t) = k_0 + (A_0 - k_0)e^{-t}$  donde  $t = (x + 1)/\varepsilon$  y una solución interior a una capa de frontera en el extremo derecho  $z_0(t) = k_0 + (B_0 - k_0)e^{L_0 t}$  donde  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$ .

Se trata ahora de agregar a la parte regular de la solución exterior una parte *irregular* con términos trascendentalmente pequeños:

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i(\varepsilon) Z_i(x, \varepsilon), \quad (2.17)$$

donde la función de escala cumple  $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero su magnitud precisa es al principio desconocida; además, se acepta dependencia del parámetro  $\varepsilon$  para los coeficientes  $Z_i$ , ya que no se está usando más una expansión en el sentido de Poincaré.

Al insertar la expansión aumentada (2.17) en la ecuación diferencial, y al cancelar lo que ya satisface la parte regular, se obtienen ecuaciones lineales para los términos  $Z_i$  (aquí la linealidad es trivial ya que se parte de una ecuación lineal, pero como ya  $Z_1$  es un término correctivo, se tendría linealidad aun cuando la ecuación original no fuese lineal).

Aquí, la linealidad implica que se obtiene la misma ecuación de partida:

$$\varepsilon Z_1'' - x Z_1' = 0. \quad (2.18)$$

Sin embargo, para la ilustración del método, no se aprovecharán los resultados referi-

dos a la solución exacta obtenidos al principio de este capítulo; se usarán los métodos comunes para este tipo de ecuaciones, como en la Sección 1.3 del primer capítulo.

El cambio de variables  $t = x^2/(2\varepsilon)$  transforma la ecuación (2.18) en

$$t\ddot{Z}_1 + \left(\frac{1}{2} - t\right)\dot{Z}_1 = 0,$$

que es la ecuación de Kummer con parámetros  $a = 0$  y  $b = 1/2$ . Una solución es  $M(0, \frac{1}{2}, t) \equiv 1$  y otra linealmente independiente es  $\sqrt{t}M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, t)$ . La solución general de la e.d.o. (2.18) es por lo tanto

$$Z_1(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) + \bar{c}_1(\varepsilon) x M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2\varepsilon}\right),$$

donde  $c_1(\varepsilon)$  y  $\bar{c}_1(\varepsilon)$  son constantes de integración.

Según Abramowitz y Stegun [1, página 504],  $M(a, b, t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{tt^{a-b}} [1 + O(1/t)]$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , luego si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$  se tiene  $M(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2\varepsilon}) = \frac{1}{2} e^{x^2/(2\varepsilon)} \frac{2\varepsilon}{x^2} [1 + O(\varepsilon)]$  y

$$Z_1(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) + \bar{c}_1(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{x} e^{x^2/(2\varepsilon)} [1 + O(\varepsilon)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.19)$$

Aquí, como se va a ver, la solución exterior aumentada se superpone a las capas de frontera, y la variable interior  $t$  sirve de variable “intermedia” (tanto la de la izquierda como la de la derecha).

A la izquierda, se usa  $t = (x + 1)/\varepsilon$  y se tiene  $(Y_0 + \delta(\varepsilon)Z_1)(x, \varepsilon) = k_0 + \delta(\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)\bar{c}_1(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{-1+\varepsilon t} e^{(-1+\varepsilon t)^2/(2\varepsilon)} [1 + O(\varepsilon)] = k_0 + \delta(\varepsilon)c_1(\varepsilon) - \delta(\varepsilon)\bar{c}_1(\varepsilon)\varepsilon e^{-t} e^{1/(2\varepsilon)} [1 + O(\varepsilon)]$ . Esto coincide con  $z_0(t) = k_0 + (A_0 - k_0)e^{-t}$  si  $\delta(\varepsilon)c_1(\varepsilon) = O(\varepsilon)$  y si

$$\delta(\varepsilon)\bar{c}_1(\varepsilon)\varepsilon e^{1/(2\varepsilon)} = k_0 - A_0. \quad (2.20)$$

A la derecha, se usa  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$  y se tiene  $(Y_0 + \delta(\varepsilon)Z_1)(x, \varepsilon) = k_0 + \delta(\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)\bar{c}_1(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{L(\varepsilon)+\varepsilon t} e^{[L(\varepsilon)+\varepsilon t]^2/(2\varepsilon)} [1 + O(\varepsilon)] = k_0 + \delta(\varepsilon)c_1(\varepsilon) + \delta(\varepsilon)\bar{c}_1(\varepsilon)\varepsilon L_0^{-1} e^{L_0^2/(2\varepsilon)} e^{L_0(L_1+t)} [1 + O(\varepsilon)]$ . Esto coincide con  $z_0(t) = k_0 + (B_0 - k_0)e^{L_0 t}$  si  $\delta(\varepsilon)c_1(\varepsilon) =$

$O(\varepsilon)$  y si

$$\delta(\varepsilon)\bar{c}_1(\varepsilon)\varepsilon L_0^{-1}e^{L_0 L_1}e^{L_0^2/(2\varepsilon)} = B_0 - k_0. \quad (2.21)$$

Al dividir la condición (2.20) entre la (2.21), se obtiene

$$\frac{k_0 - A_0}{B_0 - k_0} = L_0 e^{-L_0 L_1} e^{(1 - L_0^2)/(2\varepsilon)}.$$

De ahí,  $L(\varepsilon) \equiv 1$  implica  $k_0 = (A_0 + B_0)/2$ ,  $L_0 < 1$  implica  $k_0 = B_0$ ,  $L_0 > 1$  implica  $k_0 = A_0$  y  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$  implica  $k_0 = (A_0 + B_0 e^{-L_1})/(1 + e^{-L_1})$ , todo en conformidad con las Proposiciones 2.5–2.8.

Además, se puede tomar

$$\delta(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varepsilon^{-1} e^{-1/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 \leq 1 \\ \varepsilon^{-1} e^{-L_0^2/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 > 1, \end{cases}$$

lo cual verifica *a posteriori* la hipótesis  $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

---

## CAPÍTULO 3

### Un método nuevo y simple para resolver la indeterminación

Los tres métodos para resolver la indeterminación que se describieron en el capítulo anterior no son plenamente satisfactorios. El método de simetría, simple y riguroso, es aplicable solamente a ecuaciones muy especiales. El método de cálculo variacional parece aplicable en toda oportunidad, y de hecho ha sido usado en muchos trabajos publicados; sin embargo, por una parte involucra cálculos complicados y estimaciones precisas y por otra parte no hay justificación matemática rigurosa: de hecho, Srinivasan [159] mostró que la propuesta específica de Grasman y Matkowsky [46] no daba la respuesta correcta para órdenes más altos. En cuanto al método de MacGillivray, no es simple, no tiene justificación matemática y no ha sido aplicado a casos más generales de resonancia, para los cuales no se sabe pues si funciona.

En este capítulo, el principal del trabajo, se presenta un método para resolver la indeterminación que parece ser original en la medida de que no se ha encontrado (con los medios disponibles localmente) ninguna publicación que lo haya aplicado de una manera u otra, aun cuando las ideas que lo soportan son naturales y las técnicas involucradas son clásicas.

En la teoría y aplicación de las ecuaciones diferenciales, es punto de partida casi ineludible la conformación de un problema bien planteado que garantice existencia, unicidad y cierta suavidad de la solución. Esto, de manera rutinaria, se logra asociando a la ecuación diferencial un número ajustado con precisión de condiciones adicionales, llamadas genéricamente condiciones de frontera, que fijan algún valor para la solución o para una de sus derivadas en un punto determinado, o bien imponen una identidad relacionando dos valores de este tipo.

Para resolver la indeterminación sobre la amplitud de la resonancia de Ackenberg y O'Malley, es por lo tanto natural considerar la adición de precisamente una tal condición de frontera. Además, es deseable relacionar en ella valores en ambos ex-

tremos del dominio, porque la dificultad de esta clase de problemas radica en la existencia de un autovalor dominante exponencialmente pequeño que tiene influencia notable de un extremo al otro, cuando el método de expansiones asintóticas empatadas sólo balancea cantidades polinomialmente pequeñas. Finalmente, la condición de frontera por añadir debe ser independiente de las ya suministradas en el enunciado del problema, porque se necesita que aporte información que falta. Por ejemplo, si ya se dispone de una condición de Dirichlet en cada extremo, la condición adicional deberá involucrar las derivadas de la solución en dichos extremos.

Para conseguir una condición de frontera con las características mencionadas, se aprovechará el hecho de que las ecuaciones diferenciales para las cuales se ha demostrado rigurosamente que exhiben la resonancia de Ackerberg y O'Malley son muy particulares: se trata de las que son reducibles a ciertas ecuaciones de referencia universal (ver, por ejemplo, Olver [128]). En la práctica, resulta que es posible, mediante algún factor adecuado, integrar una vez la ecuación lineal, bien sea directamente o después de una eliminación del término no derivado (reducción del orden basada en el conocimiento de una solución particular).

En las cinco secciones de este capítulo, se evidenciará la efectividad del método propuesto, para las ecuaciones paradigmáticas de la resonancia de Ackerberg y O'Malley, verificándose lo correcto de los resultados, los cuales abarcan hasta la situación “excepcionalmente excepcional” exhibiendo supersensibilidad, donde una perturbación exponencialmente pequeña tiene efectos de orden uno (ver las subsecciones 3.1.1 y 3.3.1).

### 3.1 Ecuación asociada a un tiempo de salida

Se considera el p.v.f.

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - x^m p(x) y' &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), & & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) &= B(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.1}$$



donde están dados el número natural impar  $m$ , la función suave positiva  $p$  y las tres funciones reales analíticas  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  con  $L_0 > 0$ ,  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$  con  $A_0 \neq 0$  y  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  con  $B_0 \neq 0$ .

Como en el capítulo anterior, se va primero a resolver directamente el p.v.f. y estimar asintóticamente su solución exacta para que cuando después se obtengan los resultados de aproximación, se pueda verificar en el momento su acierto.

Un factor integrante de la e.d.o. en (3.1) es  $\exp[-P(x)/\varepsilon]$ , donde  $P$  es la función (no negativa) tal que

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x s^m p(s) ds, \quad x \geq -1. \quad (3.2)$$

Por lo tanto,  $y'(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) \exp[P(x)/\varepsilon]$  y se sigue  $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) I(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)$ , donde

$$I(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \exp[P(s)/\varepsilon] ds, \quad x \geq -1. \quad (3.3)$$

Las constantes de integración  $c_1(\varepsilon)$  y  $c_2(\varepsilon)$  han de satisfacer  $c_1(\varepsilon) I(-1, \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = A(\varepsilon)$  y  $c_1(\varepsilon) I(L(\varepsilon), \varepsilon) + c_2(\varepsilon) = B(\varepsilon)$ . Resulta

$$y(x, \varepsilon) = \frac{A(\varepsilon) I(L(\varepsilon), \varepsilon) - B(\varepsilon) I(-1, \varepsilon) + [B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] I(x, \varepsilon)}{I(L(\varepsilon), \varepsilon) - I(-1, \varepsilon)}. \quad (3.4)$$

Como el único valor máximo de  $P(s)$  cuando  $s$  está entre cero y  $x \neq 0$  es  $P(x)$ , y como  $P(s) = P(x) + x^m p(x)(s - x) + \dots$ , el método de Laplace (ver, por ejemplo, Wong [174, página 58]) suministra la estimación asintótica para  $x \neq 0$

$$I(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon e^{P(x)/\varepsilon}}{x^m p(x)} [1 + O(\varepsilon)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Como  $P(L(\varepsilon)) - P(L_0) = \int_{L_0}^{L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)} s^m p(s) ds = \varepsilon L_1 L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon^2)$ , se tiene entonces  $I(L(\varepsilon), \varepsilon) = \left[ \frac{\varepsilon}{\lambda(L_0, L_1)} \exp \frac{P(L_0)}{\varepsilon} \right] [1 + O(\varepsilon)]$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , donde

por conveniencia se usa la constante  $\lambda(L_0, L_1)$  definida como

$$\lambda(L_0, L_1) \stackrel{\text{def}}{=} L_0^m p(L_0) \exp[-L_1 L_0^m p(L_0)].$$

Luego, de la solución exacta (3.4) se obtiene por una parte para  $x = 0$ , que  $y(0, \varepsilon) = y_0(\varepsilon)[1 + O(\varepsilon)]$  donde

$$y_0(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0 p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + B_0 \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]}{p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]}$$

y por otra parte para  $x \neq 0$ ,

$$y(x, \varepsilon) = \left\{ y_0(\varepsilon) + \frac{(B_0 - A_0) \frac{\lambda(L_0, L_1) p(-1)}{x^m p(x)} \exp[P(x)/\varepsilon]}{p(-1) \exp[P(L_0)/\varepsilon] + \lambda(L_0, L_1) \exp[P(-1)/\varepsilon]} \right\} [1 + O(\varepsilon)].$$

El comportamiento de la solución depende de los valores relativos de  $P(-1)$  y  $P(L_0)$ .

**Lema 3.1.** *Si la integral impropia  $\int_{-1}^{\infty} s^m p(s) ds$  diverge o si converge a un valor positivo, entonces existe un único número  $\widehat{L} \in (0, \infty)$  tal que  $\int_{-1}^{\widehat{L}} s^m p(s) ds = 0$  (por ejemplo, si la función  $p$  es par, entonces  $\widehat{L} = 1$ ); se tiene entonces  $P(\widehat{L}) = P(-1)$  con  $P(x) < P(-1)$  para todo  $x \in (-1, \widehat{L})$  y  $P(x) > P(-1)$  para todo  $x > \widehat{L}$ . Si la integral impropia  $\int_{-1}^{\infty} s^m p(s) ds$  converge a un valor negativo o nulo, entonces  $P(x) < P(-1)$  para todo  $x > -1$  y se define  $\widehat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \infty$ .*

**Demostración.** Son consecuencias inmediatas de que la función suave  $P$  es estrictamente decreciente en el intervalo  $[-1, 0]$  y estrictamente creciente después.  $\square$

**Proposición 3.2.** *Si  $L_0 < \widehat{L}$  donde  $\widehat{L}$  está definido en el Lema 3.1, se cumple*

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0) e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (3.5)$$

*La solución tiene una capa de frontera a la izquierda en  $x = -1$  y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor límite impuesto en el extremo derecho.*

**Demostración.** Como  $P(L_0) < P(-1)$ , entonces  $y_0(\varepsilon) = B_0 + O(\exp \frac{P(L_0) - P(-1)}{\varepsilon})$  (la diferencia es trascendentalmente pequeña) y para  $x \neq 0$  se tiene  $y(x, \varepsilon) = [B_0 + (B_0 - A_0) \frac{p(-1)}{x^m p(x)} \exp \frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon}] [1 + O(\varepsilon)]$ , con  $P(x) < P(-1)$  si  $x > -1$ . Luego si  $x + 1 \neq O(\varepsilon)$ , entonces  $y(x, \varepsilon) = B_0 + O(\varepsilon)$  y si  $x + 1 = O(\varepsilon)$ , entonces  $P(x) - P(-1) = P'(-1)(x + 1) + O((x + 1)^2) = -p(-1)(x + 1) + O(\varepsilon^2)$ , se tiene  $y(x, \varepsilon) = \{B_0 + (B_0 - A_0) \frac{p(-1)}{-p(-1) + O(\varepsilon)} \exp[-p(-1)(x + 1)/\varepsilon]\} [1 + O(\varepsilon)]$ , y la conclusión sigue.  $\square$

**Proposición 3.3.** Si  $L_0 > \widehat{L}$  donde  $\widehat{L}$  está definido en el Lema 3.1, se cumple

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0) e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (3.6)$$

La solución tiene una capa de frontera a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$  y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor límite impuesto en el extremo izquierdo.

**Demostración.** Como  $P(L_0) > P(-1)$ , entonces  $y_0(\varepsilon) = A_0 + O(\exp \frac{P(-1) - P(L_0)}{\varepsilon})$  (la diferencia es trascendentalmente pequeña) y para  $x \neq 0$  se tiene  $y(x, \varepsilon) = [A_0 + (B_0 - A_0) \frac{\lambda(L_0, L_1)}{x^m p(x)} \exp \frac{P(x) - P(L_0)}{\varepsilon}] [1 + O(\varepsilon)]$ , con  $P(x) < P(L_0)$  si  $x < L_0$ . Luego si  $x - L_0 \neq O(\varepsilon)$ , entonces  $y(x, \varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon)$  y si  $x - L_0 = O(\varepsilon)$ , entonces  $P(x) - P(L_0) = P'(L_0)(x - L_0) + O((x - L_0)^2) = L_0^m p(L_0)(x - L_0) + O(\varepsilon^2)$ , se tiene  $y(x, \varepsilon) = \{A_0 + (B_0 - A_0) \frac{L_0^m p(L_0) \exp[-L_1 L_0^m p(L_0)]}{L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon)} \exp[L_0^m p(L_0)(x - L_0)/\varepsilon]\} [1 + O(\varepsilon)]$ , y  $L_0^m p(L_0)(x - L_0 - \varepsilon L_1)/\varepsilon = L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon + O(\varepsilon)$  implica la conclusión.  $\square$

**Proposición 3.4.** Si  $L_0 = \widehat{L}$  definido en el Lema 3.1, se cumplen  $y(0, \varepsilon) \sim y_0$  con  $y_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_0 p(-1) + B_0 \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e$

$$y(x, \varepsilon) \sim y_0 + \frac{(A_0 - B_0) \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e^{-p(-1)(x + 1)/\varepsilon} + \frac{(B_0 - A_0) p(-1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (3.7)$$

La solución tiene capas de frontera en ambos extremos  $x = -1$  y  $x = L(\varepsilon)$ ; entre ellas es aproximadamente constante, un promedio ponderado de los valores límites

*impuestos en los bordes.*

**Demostración.** Como  $P(L_0) = P(-1)$ , entonces  $y_0(\varepsilon) = y_0$  y para  $x \neq 0$  se tiene  $y(x, \varepsilon) = \left\{ y_0 + \frac{(B_0 - A_0)\lambda(L_0, L_1)p(-1)}{x^m p(x)[p(-1) + \lambda(L_0, L_1)]} \exp \frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon} \right\} [1 + O(\varepsilon)]$ , con  $P(x) < P(-1)$  si  $-1 < x < L_0$ . Luego si  $x + 1 \neq O(\varepsilon)$  y  $x - L_0 \neq O(\varepsilon)$ , entonces  $y(x, \varepsilon) = y_0 + O(\varepsilon)$ . Los casos  $x + 1 = O(\varepsilon)$  y  $x - L_0 = O(\varepsilon)$  son análogos a los vistos para las Proposiciones 3.2 y 3.3 respectivamente.  $\square$

**Corolario 3.5.** Como  $\lim_{L_1 \rightarrow -\infty} \lambda(L_0, L_1) = \infty$  y  $\lim_{L_1 \rightarrow \infty} \lambda(L_0, L_1) = 0$ , la aproximación (3.7) evoluciona continuamente desde la (3.5) hasta la (3.6) cuando  $L_1$  varía desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ .

Ahora se aplica el método de expansiones asintóticas empatadas. Una solución regular de la e.d.o.  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  debe satisfacer  $-x^m p(x) Y'_0 = 0$  y  $x^m p(x) Y'_{i+1} = Y''_i = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ ; por lo tanto, todos sus términos son constantes:

$$Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Para una posible capa de frontera a la izquierda en  $x = -1$ , se introduce el cambio de variables  $t = (x + 1)/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es

$$\begin{aligned} \ddot{z} + (1 - \varepsilon t)^m p(-1 + \varepsilon t) \dot{z} &= 0, & 0 \leq t < \infty \\ z(0, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) &= Y(-1, \varepsilon). \end{aligned}$$

Se resuelve mediante una expansión asintótica  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ , cuyo término dominante va a satisfacer

$$\ddot{z}_0 + p(-1) \dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = A_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = k_0;$$

resulta

$$z_0(t) = k_0 + (A_0 - k_0) e^{-p(-1)t}, \quad t \in [0, \infty).$$

En particular,  $\dot{z}_0(0) = (k_0 - A_0)p(-1)$ .

Para una posible capa de frontera a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$ , se introduce el cambio de variables  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es

$$\begin{aligned} \ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]^m p(L(\varepsilon) + \varepsilon t) \dot{z} &= 0, & -\infty < t \leq 0 \\ z(0, \varepsilon) &= B(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) &= Y(L(\varepsilon), \varepsilon). \end{aligned}$$

Se resuelve mediante una expansión asintótica  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$ , cuyo término dominante va a satisfacer

$$\ddot{z}_0 - L_0^m p(L_0) \dot{z}_0 = 0, \quad z_0(0) = B_0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = k_0;$$

resulta

$$z_0(t) = k_0 + (B_0 - k_0) e^{L_0^m p(L_0) t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

En particular,  $\dot{z}_0(0) = (B_0 - k_0) L_0^m p(L_0)$ .

De conocerse el valor de la constante  $k_0$ , se contaría con la aproximación asintótica compuesta

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &\sim k_0 + (A_0 - k_0) e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \\ &+ (B_0 - k_0) e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para determinar el valor de  $k_0$ , se va a derivar una condición de frontera adicional de tipo mixto; es decir, involucrando ambos extremos del dominio. Como ya se imponen los valores de la solución ahí, será una condición sobre los valores de su primera derivada.

Se multiplica la e.d.o. en (3.1) por el factor integrante  $\exp[-P(x)/\varepsilon]$ , donde la función  $P$  fue definida en (3.2). Se obtiene  $\{\varepsilon y' \exp[-P(x)/\varepsilon]\}' = 0$ , lo cual se integra desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$ , resultando  $\varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] =$

$\varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp[-P(-1)/\varepsilon]$ . Luego, usando los valores  $\dot{z}_0(0)$ ,

$$(B_0 - k_0)L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon) = [(k_0 - A_0)p(-1) + O(\varepsilon)] \exp \frac{P(L(\varepsilon)) - P(-1)}{\varepsilon},$$

de donde

$$(B_0 - k_0)\lambda(L_0, L_1) + O(\varepsilon) = [(k_0 - A_0)p(-1) + O(\varepsilon)] \exp \frac{P(L_0) - P(-1)}{\varepsilon}.$$

Esto implica que si  $L_0 < \widehat{L}$ , se tiene  $k_0 = B_0$ , la aproximación (3.8) se reduce a la (3.5) y se deduce lo contenido en la Proposición 3.2; si  $L_0 > \widehat{L}$ , se tiene  $k_0 = A_0$ , la aproximación (3.8) se reduce a la (3.6) y se deduce lo contenido en la Proposición 3.3; finalmente, si  $L_0 = \widehat{L}$ , se tiene  $k_0 = \frac{A_0 p(-1) + B_0 \lambda(L_0, L_1)}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1)} = y_0$ , la aproximación (3.8) coincide con la (3.7) y se deduce lo contenido en la Proposición 3.4.

Se presenta ahora una ilustración de lo analizado en esta sección con un ejemplo particular.

**Ejemplo 3.1.** Para disponer de una solución exacta que se pueda representar gráficamente con facilidad, se va a usar el valor  $m = 1$  así como una función positiva  $p$  que depende además del parámetro  $\varepsilon$  (pero sin tender a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

La solución general de la e.d.o.

$$\varepsilon y'' - x \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{x^2 + \varepsilon} \right) y' = 0 \quad (3.9)$$

es  $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)x \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) + c_2(\varepsilon)$ , y su solución particular bajo las condiciones de frontera

$$y(-1, \varepsilon) = -1, \quad y(L(\varepsilon), \varepsilon) = 1 \quad (3.10)$$

es

$$y(x, \varepsilon) = \frac{2xe^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}} + 1 - L(\varepsilon)e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}}}{1 + L(\varepsilon)e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}}},$$

la cual admite como aproximación asintótica uniforme cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} 1 - 2e^{-(x+1)/\varepsilon} & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{1 - e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} - \frac{2}{1 + e^{L_1}} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{2e^{L_1}}{1 + e^{L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} & \text{si } L_0 = 1, \\ -1 + 2e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Esto es consistente con (3.5) (aquí  $p(-1, 0) = 1$ ), con (3.6) (aquí  $p(L_0, 0) = 1$ ) y con (3.7) (aquí  $\lambda(L_0, L_1) = e^{-L_1}$ ).

La Figura 3.1 en la página siguiente muestra la solución exacta del p.v.f. (3.9)-(3.10) y su aproximación asintótica uniforme para varios valores representativos de  $L(\varepsilon)$ , con una capa de frontera a la izquierda cuando  $L_0 < \widehat{L}$ , una a la derecha cuando  $L_0 > \widehat{L}$  y las dos capas de frontera cuando  $L_0 = \widehat{L}$  (aquí,  $\widehat{L} = 1$  porque la función  $p$  es par).

### 3.1.1 Ecuación perturbada exhibiendo supersensibilidad

El método presentado ha resuelto la indeterminación, incluyendo la situación sensible planteada por Skinner [156], en la cual una modificación de orden  $\varepsilon$  de la extensión del dominio implica un cambio de orden uno en la solución resonante.

Se va a ver que el método además sirve para resolver la situación *supersensible* planteada por Williams [172] (ver también Kopell [63]), en la cual una perturbación trascendentalmente pequeña en la e.d.o. puede provocar un cambio de orden uno en la solución resonante [11, 67, 70, 75, 78, 79, 94–96, 99, 100, 150].

Se considera la e.d.o. perturbada

$$\varepsilon y'' - x^m p(x) y' = \varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} e^{-M/\varepsilon} q(x) [y - C(\varepsilon)], \quad (3.11)$$

donde intervienen adicionalmente la constante positiva  $M$ , la función suave  $q$  tal que  $q(0) > 0$ , y la función real analítica  $C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i$  con  $C_0 \neq 0$ .

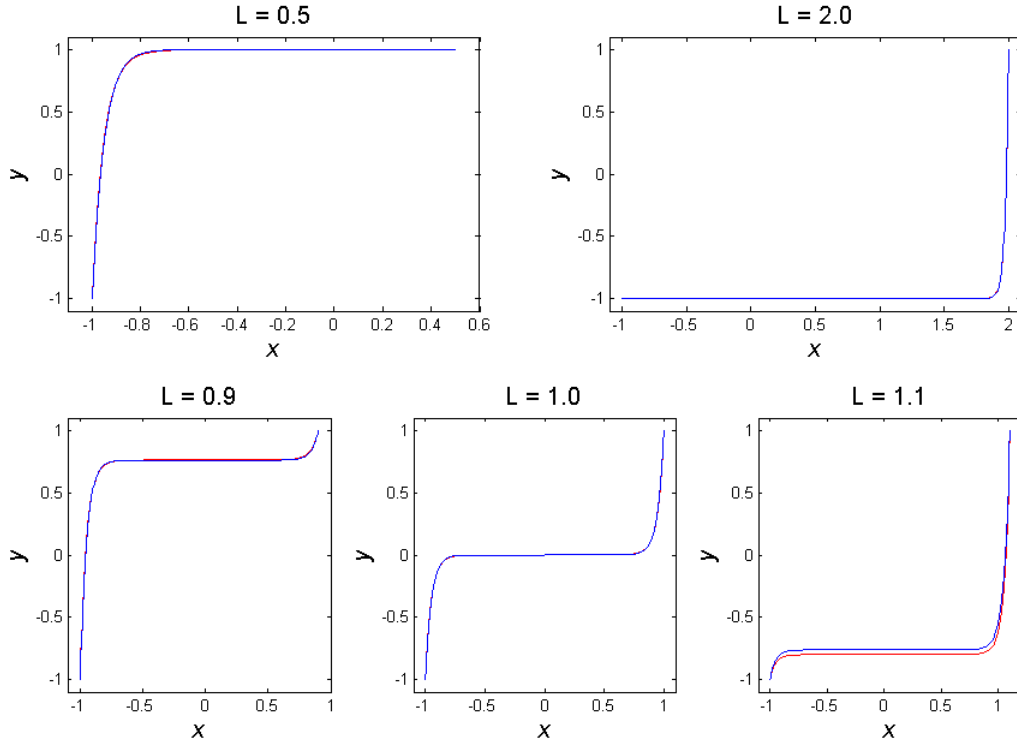


Figura 3.1: Solución (en rojo) y aproximación (en azul) para el Ejemplo 3.1 en los casos  $L(\varepsilon) = 0,5 < \hat{L}$ ,  $L(\varepsilon) = 2 > \hat{L}$  y  $L(\varepsilon) \simeq 1 = \hat{L}$ . Se usó el valor  $\varepsilon = 0,05$ .

Como la perturbación es trascendentalmente pequeña (mientras  $y$  se mantenga acotada), el método de expansiones asintóticas empatadas da el mismo resultado como en el caso no perturbado que se acaba de tratar.

Se deriva una condición de frontera adicional de la misma manera, usando el factor integrante  $\exp[-P(x)/\varepsilon]$  e integrando desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$ ; resulta

$$\begin{aligned} & \varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] - \varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp[-P(-1)/\varepsilon] \\ & = \varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} e^{-M/\varepsilon} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} q(s) [y(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)] \exp[-P(s)/\varepsilon] ds. \end{aligned}$$

Como el único valor mínimo de  $P(s)$  cuando  $s$  está entre  $-1$  y  $L(\varepsilon)$  es  $P(0) = 0$ , y como  $P(s) = \frac{p(0)}{m+1} s^{m+1} + \dots$ , el método de Laplace (ver, por ejemplo,



Holmes [51, página 306]) proporciona la estimación

$$\varepsilon^{\frac{-1}{m+1}} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} q(s)[y(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)] \exp[-P(s)/\varepsilon] ds = \mu[y(0, 0) - C_0] + O(\varepsilon),$$

donde  $\mu$  es la constante  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2q(0)\Gamma(1/(m+1))}{m+1\sqrt{(m+1)^m p(0)}}$ .

La condición adicional se transforma en

$$\begin{aligned} [(B_0 - k_0)L_0^m p(L_0) + O(\varepsilon)] e^{-P(L(\varepsilon))/\varepsilon} + [(A_0 - k_0)p(-1) + O(\varepsilon)] e^{-P(-1)/\varepsilon} \\ = [\mu(k_0 - C_0) + O(\varepsilon)] e^{-M/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si  $M > \min\{P(-1), P(L_0)\}$ , la perturbación introducida en la e.d.o. es demasiado pequeña para tener efecto perceptible y valen las Proposiciones 3.2, 3.3 y 3.4.

Si  $M < \min\{P(-1), P(L_0)\}$ , la perturbación domina los demás efectos e impone  $k_0 = C_0$  como amplitud de la resonancia en primera aproximación.

Si  $M = \min\{P(-1), P(L_0)\}$ , el valor de  $k_0$  queda determinado como

$$k_0 = \begin{cases} \frac{\lambda(L_0, L_1)B_0 + \mu C_0}{\lambda(L_0, L_1) + \mu} & \text{si } M = P(L_0) < P(-1), \\ \frac{p(-1)A_0 + \lambda(L_0, L_1)B_0 + \mu C_0}{p(-1) + \lambda(L_0, L_1) + \mu} & \text{si } M = P(L_0) = P(-1), \\ \frac{p(-1)A_0 + \mu C_0}{p(-1) + \mu} & \text{si } M = P(-1) < P(L_0). \end{cases}$$

Todos estos resultados supersensibles son consistentes con lo obtenido en Laforgue [77] mediante dinámica metaestable.

### 3.2 Ecuación propuesta por Kreiss y Parter

Kreiss y Parter [66] demostraron que para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, existe una única solución  $y(x, \varepsilon)$ , la cual exhibe resonancia, para un p.v.f. del tipo

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - xy' + \frac{xy}{a+x} &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde el número real  $a$  es tal que  $a > 1$  (ellos usaron  $a = 2$ ) y las tres funciones reales analíticas  $A = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$ ,  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  y  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  satisfacen  $A_0 B_0 \neq 0$ ,  $L_0 > 0$  y  $[a + L(\varepsilon)]A(\varepsilon) \neq (a - 1)B(\varepsilon)$  (esta última condición para que el problema sea singularmente perturbado).

Para resolver directamente el p.v.f. (3.12) (lo que no hicieron Kreiss y Parter en su artículo) se efectúa el cambio de variable dependiente  $y(x, \varepsilon) = (a + x)u(x, \varepsilon)$ , bajo el cual la e.d.o. queda transformada en

$$\varepsilon(a + x)u'' + [2\varepsilon - x(a + x)]u' = 0.$$

El factor integrante  $\varepsilon^{-1}(a + x) \exp[(1 - x^2)/(2\varepsilon)]$  conduce a una derivada exacta:  $[u'(a + x)^2 \exp(\frac{1-x^2}{2\varepsilon})]' = 0$ , de donde vienen  $u'(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)(a + x)^{-2} \exp(\frac{x^2-1}{2\varepsilon})$  y, por cuadratura,  $u(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) \int_0^x (a + s)^{-2} \exp(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}) ds + c_2(\varepsilon)$ , siendo  $c_1(\varepsilon)$  y  $c_2(\varepsilon)$  dos constantes de integración. Al integrar por partes, se obtiene  $u(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) \left[ \int_0^x \frac{s\varepsilon^{-1}}{a+s} \exp(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}) ds - \frac{1}{a+x} \exp(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}) \right] + c_2(\varepsilon)$ , donde el valor de  $c_2(\varepsilon)$  ha sido modificado. El regreso a la incógnita original da  $y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)\psi(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)(a + x)$ , con un valor de  $c_1(\varepsilon)$  modificado, donde se ha identificado la solución particular

$$\psi(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (a + x) \int_0^x \frac{s}{a + s} \exp\left(\frac{s^2 - 1}{2\varepsilon}\right) ds - \varepsilon \exp\left(\frac{x^2 - 1}{2\varepsilon}\right).$$

Al imponer ahora las condiciones de frontera, se obtiene la solución exacta del

p.v.f. (3.12) bajo la forma

$$y(x, \varepsilon) = \frac{[(a-1)B - (a+L)A] \psi(x) + [\psi(L)A - \psi(-1)B] (a+x)}{(a-1)\psi(L) - (a+L)\psi(-1)}, \quad (3.13)$$

donde, para aliviar la escritura, no se ha mencionado la dependencia de  $A$ ,  $B$ ,  $L$  y  $\psi$  respecto del parámetro  $\varepsilon$ .

Para poder reconocer el comportamiento de la solución exacta  $y(x, \varepsilon)$ , hay que aproximarla asintóticamente mediante una expresión más transparente que (3.13), y para esto, se necesita disponer de una estimación de  $\psi(x, \varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ; es decir, en particular, de la integral

$$I(x, \varepsilon, a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \frac{s}{a+s} \exp\left(\frac{s^2-1}{2\varepsilon}\right) ds.$$

El primer paso es considerar  $x = 1$ . La integral  $I(1, \varepsilon, a)$ , bajo el cambio de variable de integración  $s = \sqrt{1-2t}$ , se transforma en  $\int_0^{1/2} f(t)e^{-t/\varepsilon} dt$ , donde la función  $f$  introducida es tal que  $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} (a + \sqrt{1-2t})^{-1}$ . Reproduciendo la demostración de la Proposición 2.2, se deduce  $I(1, \varepsilon, a) \sim \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f^{(i-1)}(0)$ ; en particular,

$$I(1, \varepsilon, a) \sim \frac{\varepsilon}{a+1} + \frac{\varepsilon^2}{(a+1)^2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

El segundo paso es considerar  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ . La integral  $I(x, \varepsilon, a)$ , bajo los cambios de la variable de integración  $s$  por  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} s/x$  y del parámetro  $a$  por  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} a/x$ , se transforma en  $\int_0^1 \frac{\sigma}{\alpha+\sigma} \exp\left(\frac{x^2\sigma^2-1}{2\varepsilon}\right) x d\sigma = x \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) I(1, \frac{\varepsilon}{x^2}, \alpha)$ . Resulta la aproximación asintótica

$$I(x, \varepsilon, a) \sim \left[ \frac{\varepsilon}{a+x} + \frac{\varepsilon^2}{x(a+x)^2} \right] \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) \quad (\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0).$$

Como la solución particular es  $\psi(x, \varepsilon) = (a+x)I(x, \varepsilon, a) - \varepsilon \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene

$$\psi(x, \varepsilon) \sim \frac{\varepsilon^2}{x(a+x)} \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right) \quad (\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0).$$

En particular, se tienen  $\psi(L(\varepsilon), \varepsilon) \sim \frac{\varepsilon^2}{L_0(a+L_0)} \exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right]$  y  $\psi(-1, \varepsilon) \sim -\frac{\varepsilon^2}{a-1}$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Para el rango de valores de  $x$  faltante, a saber  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ , la integral  $I(x, \varepsilon, a)$  bajo el cambio de variable de integración  $s = \sqrt{\varepsilon}\sigma$  se transforma en  $\int_0^{x/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a+\sqrt{\varepsilon}\sigma} \exp\left(\frac{\varepsilon\sigma^2-1}{2\varepsilon}\right) \sqrt{\varepsilon} d\sigma = \varepsilon e^{-1/(2\varepsilon)} [a^{-1}(e^{x^2/(2\varepsilon)} - 1) + O(\sqrt{\varepsilon})]$ . Viene

$$\psi(x, \varepsilon) \sim -\varepsilon \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right) \quad \text{si } x = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Esto implica que  $y_{INT}(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} c_1(\varepsilon)\psi(x, \varepsilon)$  es despreciable en toda vecindad de orden  $O(\sqrt{\varepsilon})$  del punto de retorno, y allí prevalece  $y_{EXT}(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} c_2(\varepsilon)(a+x)$ , la cual satisface (en todo el dominio)

$$y_{EXT}(x, \varepsilon) \sim \frac{\frac{A_0}{L_0(a+L_0)} \exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] + \frac{B_0}{a-1}}{\frac{a-1}{L_0(a+L_0)} \exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] + \frac{a+L_0}{a-1}} (a+x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+);$$

es decir,

$$y_{EXT}(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} \frac{B_0}{a+L_0} (a+x) & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{(a-1)e^{L_1}A_0 + (a+1)B_0}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} (a+x) & \text{si } L_0 = 1, \\ \frac{A_0}{a-1} (a+x) & \text{si } L_0 > 1, \end{cases}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Para  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , se tiene

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \frac{\frac{(a-1)B_0 - (a+L_0)A_0}{x(a+x)} \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right)}{\frac{a-1}{L_0(a+L_0)} \exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] + \frac{a+L_0}{a-1}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Lema 3.6.** Si  $L_0 < 1$ , se cumple

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \left[ A_0 - \left( \frac{a-1}{a+L_0} \right) B_0 \right] e^{-(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.**  $L_0 < 1$  implica  $\exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] \ll 1$  y se tiene cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \left[ A_0 - \left( \frac{a-1}{a+L_0} \right) B_0 \right] \frac{(-1)(a-1)}{x(a+x)} \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right).$$

Si  $x+1 \neq O(\varepsilon)$ , se cumple  $y_{INT}(x, \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y lo mismo vale para  $\exp[-(x+1)/\varepsilon]$ . Si  $x+1 = O(\varepsilon)$ , entonces por una parte  $\frac{(-1)(a-1)}{x(a+x)} \sim 1$  y por otra parte  $\frac{x^2-1}{2\varepsilon} = -\frac{x+1}{\varepsilon} + \frac{(x+1)^2}{2\varepsilon}$ , donde  $\frac{(x+1)^2}{2\varepsilon} = O(\varepsilon)$ .  $\square$

**Lema 3.7.** Si  $L_0 > 1$ , se cumple

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \left[ B_0 - \left( \frac{a+L_0}{a-1} \right) A_0 \right] e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.**  $L_0 > 1$  implica  $\exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] \gg 1$  y se tiene cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \left[ B_0 - \left( \frac{a+L_0}{a-1} \right) A_0 \right] \frac{L_0(a+L_0)}{x(a+x)} \exp\left[\frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right].$$

Si  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , se cumple  $y_{INT}(x, \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , y lo mismo vale para  $\exp\{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon\}$ . Si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , entonces por una parte  $\frac{L_0(a+L_0)}{x(a+x)} \sim 1$  y por otra parte  $\frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon} + \frac{[x-L(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon} + \frac{L(\varepsilon)-L_0}{\varepsilon}[x-L(\varepsilon)]$ , donde  $\frac{[x-L(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon} = O(\varepsilon)$ ,  $\frac{L(\varepsilon)-L_0}{\varepsilon} = O(1)$  y  $x-L(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ .  $\square$

**Lema 3.8.** Si  $L_0 = 1$ , se cumple

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \frac{(a+1)[(a+1)A_0 - (a-1)B_0]}{(a-1)^2 e^{L_1} + (a+1)^2} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{(a-1)e^{L_1}[(a-1)B_0 - (a+1)A_0]}{(a-1)^2 e^{L_1} + (a+1)^2} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.**  $L_0 = 1$  implica  $\exp\left[\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}\right] = \exp(L_1) + O(\varepsilon)$  y se tiene cuando

$\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \frac{(a+1)[(a+1)A_0 - (a-1)B_0]}{(a-1)^2 e^{L_1} + (a+1)^2} \frac{(-1)(a-1)}{x(a+x)} \exp\left(\frac{x^2 - 1}{2\varepsilon}\right)$$

o de manera equivalente,

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \frac{(a-1)[(a-1)B_0 - (a+1)A_0]}{(a-1)^2 e^{L_1} + (a+1)^2} \frac{(a+1)}{x(a+x)} e^{L_1} \exp\left[\frac{x^2 - L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right].$$

Si  $x+1 \neq O(\varepsilon)$  y  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , se cumple  $y_{INT}(x, \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y lo mismo vale para  $\exp[-(x+1)/\varepsilon]$  y  $\exp\{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\}$ . Si  $x+1 = O(\varepsilon)$ , se hacen las mismas observaciones como en la demostración del Lema 3.6, y si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , se hacen las mismas observaciones como en la demostración del Lema 3.7.  $\square$

Se reúnen todos los resultados anteriores en tres proposiciones.

**Proposición 3.9.** *Si  $L_0 < 1$ , la solución del p.v.f. (3.12) admite la aproximación asintótica uniforme cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$*

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{B_0(a+x)}{a+L_0} + \left[ A_0 - \frac{B_0(a-1)}{a+L_0} \right] e^{-(x+1)/\varepsilon},$$

lo cual indica la presencia de una única capa de frontera en una vecindad de orden  $O(\varepsilon)$  del extremo izquierdo del dominio, así como exteriormente a ella una resonancia en forma de función lineal afín.

**Proposición 3.10.** *Si  $L_0 > 1$ , la solución del p.v.f. (3.12) admite la aproximación asintótica uniforme cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$*

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0(a+x)}{a-1} + \left[ B_0 - \frac{A_0(a+L_0)}{a-1} \right] e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon},$$

lo cual indica la presencia de una única capa de frontera en una vecindad de orden  $O(\varepsilon)$  del extremo derecho del dominio, así como exteriormente a ella una resonancia en forma de función lineal afín.

**Proposición 3.11.** *Si  $L_0 = 1$ , la solución del p.v.f. (3.12) admite la aproximación asintótica uniforme cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$*

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{(a-1)e^{L_1}A_0 + (a+1)B_0}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} (a+x) + \frac{(a+1)[(a+1)A_0 - (a-1)B_0]}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{(a-1)e^{L_1}[(a-1)B_0 - (a+1)A_0]}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon},$$

lo cual indica la presencia de capas de frontera en vecindades de orden  $O(\varepsilon)$  de los dos extremos del dominio, así como exteriormente a ellas una resonancia en forma de función lineal afín.

**Corolario 3.12.** *Valen los límites uniformes*

$$\lim_{\substack{L_0=1 \\ L_1 \rightarrow -\infty}} y(x, \varepsilon) = \lim_{L_0 \rightarrow 1^-} y(x, \varepsilon) \quad y \quad \lim_{\substack{L_0=1 \\ L_1 \rightarrow \infty}} y(x, \varepsilon) = \lim_{L_0 \rightarrow 1^+} y(x, \varepsilon).$$

Con respecto a las tres proposiciones anteriores, se puede notar que en el caso no genérico  $(a+L_0)A_0 = (a-1)B_0$ , las capas de frontera afectarían solamente a la derivada de la solución (en general).

Ahora se va a aplicar el método de expansiones asintóticas empatadas. El primer término de una solución regular  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  debe satisfacer  $-xY_0' + \frac{x}{a+x}Y_0 = 0$ , por lo que  $Y_0(x) = k_0(a+x)$  con  $k_0$  constante de integración. Los términos siguientes igualmente deben satisfacer  $-xY_{i+1}' + \frac{x}{a+x}Y_{i+1} = -Y_i'' = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Resulta entonces

$$Y(x, \varepsilon) = k(\varepsilon)(a+x) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i(a+x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Para una posible capa de frontera en el extremo izquierdo del dominio, se introduce el cambio de variables  $t = (x+1)/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local

correspondiente es

$$\begin{aligned} \ddot{z} + (1 - \varepsilon t)\dot{z} + \frac{-\varepsilon + \varepsilon^2 t}{a-1+\varepsilon t}z &= 0, & 0 \leq t < \infty \\ z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon), & \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) = k(\varepsilon)(a-1). \end{aligned}$$

El término dominante debe satisfacer  $\ddot{z}_0 + \dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = A_0$ ,  $z_0(\infty) = k_0(a-1)$ .

Resulta

$$z_0(t) = k_0(a-1) + [A_0 - k_0(a-1)]e^{-t}, \quad t \in [0, \infty);$$

en particular,  $\dot{z}_0(0) = k_0(a-1) - A_0$ .

Para una posible capa de frontera en el extremo derecho del dominio, se introduce el cambio de variables  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es

$$\begin{aligned} \ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]\dot{z} + \frac{\varepsilon L(\varepsilon) + \varepsilon^2 t}{a+L(\varepsilon)+\varepsilon t}z &= 0, & -\infty < t \leq 0 \\ z(0, \varepsilon) = B(\varepsilon), & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = k(\varepsilon)[a + L(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

El término dominante debe satisfacer  $\ddot{z}_0 - L_0\dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = B_0$ ,  $z_0(-\infty) = k_0(a + L_0)$ . Resulta

$$z_0(t) = k_0(a + L_0) + [B_0 - k_0(a + L_0)]e^{L_0 t}, \quad t \in (-\infty, 0];$$

en particular,  $\dot{z}_0(0) = L_0[B_0 - k_0(a + L_0)]$ .

El método de expansiones asintóticas empatadas culmina entonces, al orden uno, con la aproximación asintótica compuesta

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim k_0(a+x) + [A_0 - k_0(a-1)]e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ + [B_0 - k_0(a+L_0)]e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned} \tag{3.14}$$

basada en la constante  $k_0$  indeterminada.

Para conseguir el único valor correcto de  $k_0$ , se va a derivar una condición



de frontera adicional, a partir de la propia ecuación diferencial. El cambio de variable dependiente  $y(x, \varepsilon) = (a + x)u(x, \varepsilon)$  y el factor integrante  $(a + x) \exp[(1 - x^2)/(2\varepsilon)]$  conducen a la derivada exacta  $[\varepsilon u'(a + x)^2 \exp(\frac{1-x^2}{2\varepsilon})]' = 0$ , la cual integrada desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$  impone la identidad  $\varepsilon u'(L(\varepsilon), \varepsilon)[a + L(\varepsilon)]^2 \exp[\frac{1-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}] = \varepsilon u'(-1, \varepsilon)(a - 1)^2$ . El regreso a la variable original da la condición  $\{[a + L(\varepsilon)]\varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon y(L(\varepsilon), \varepsilon)\} \exp[\frac{1-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}] = (a - 1)\varepsilon y'(-1, \varepsilon) - \varepsilon y(-1, \varepsilon)$ . Usando las derivadas  $\dot{z}_0(0)$  de las soluciones interiores, se obtiene la relación

$$\begin{aligned} \{(a + L_0)L_0[B_0 - k_0(a + L_0)] + O(\varepsilon)\} \exp\left[\frac{1 - L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] \\ = (a - 1)[k_0(a - 1) - A_0] + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

que determina un valor único para la amplitud de la resonancia al orden uno:

$$k_0 = \begin{cases} \frac{B_0}{a + L_0} & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{(a - 1)e^{L_1}A_0 + (a + 1)B_0}{(a - 1)^2e^{L_1} + (a + 1)^2} & \text{si } L_0 = 1, \\ \frac{A_0}{a - 1} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Al insertar este resultado en la aproximación asintótica compuesta (3.14), se tiene si  $L_0 < 1$ ,

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{B_0(a + x)}{a + L_0} + \left[A_0 - \frac{B_0(a - 1)}{a + L_0}\right] e^{-(x + 1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

que es efectivamente correcta en virtud de la Proposición 3.9; así mismo, si  $L_0 = 1$ ,

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{(a-1)e^{L_1}A_0 + (a+1)B_0}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} (a+x) + \frac{(a+1)^2A_0 - (a^2-1)B_0}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{(a-1)^2e^{L_1}B_0 - (a^2-1)A_0}{(a-1)^2e^{L_1} + (a+1)^2} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

que es efectivamente correcta en virtud de la Proposición 3.11; y si  $L_0 > 1$ ,

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0(a+x)}{a-1} + \left[ B_0 - \frac{A_0(a+L_0)}{a-1} \right] e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}, \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

que es efectivamente correcta en virtud de la Proposición 3.10.

### 3.3 Ecuación de Hermite

Se va a considerar el p.v.f.

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - xy' + qy &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), & \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) &= B(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde están dados el número natural  $q$  y las tres funciones reales analíticas  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  con  $L_0 > 0$ ,  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$  con  $A_0 \neq 0$  y  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  con  $B_0 \neq 0$ .

La e.d.o. (ecuación de Hermite singularmente perturbada) es un caso particular de la ecuación estudiada en la Sección 1.3, aquí con  $p = 1$  y  $q \in \mathbb{N}$ . Luego, la solución del p.v.f. (3.15) está dada por (1.16):

$$y(x, \varepsilon) = \frac{[y_1(x) - y_1(L) y_2(x)] A + [y_2(x) - y_1(x) y_2(-1)] B}{1 - y_1(L) y_2(-1)} \quad (3.16)$$

(donde está omitida la dependencia de  $A$ ,  $B$ ,  $L$ ,  $y_1$  e  $y_2$  respecto del parámetro  $\varepsilon$ ),

en base a las funciones linealmente independientes convenientemente normalizadas

$$y_1(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\varepsilon}\right)}{M\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\varepsilon}\right)} \quad \text{e} \quad y_2(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x M\left(\frac{1-q}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{2\varepsilon}\right)}{L(\varepsilon) M\left(\frac{1-q}{2}, \frac{3}{2}, \frac{L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}.$$

Hay una diferencia crucial con la Sección 1.3: ocurre aquí que siempre una de estas dos funciones es un polinomio de grado  $q$ : la par  $y_1(\cdot, \varepsilon)$  cuando  $q$  sea par, la impar  $y_2(\cdot, \varepsilon)$  cuando  $q$  sea impar. En tales casos, el comportamiento asintótico no está dado por la estimación (1.15); se tienen cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$y_1(x, \varepsilon) = x^q + O(\varepsilon) \quad \text{e} \quad y_2(x, \varepsilon) = \left(\frac{x}{L_0}\right)^q + O(\varepsilon)$$

si  $q$  es par y si es impar, respectivamente (la expresión completa de estos polinomios se da más adelante). Se sigue teniendo en base a (1.15) cuando  $\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0$

$$y_2(x, \varepsilon) = (L_0/x)^{q+1} e^{[x^2 - L^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)]$$

si  $q$  es par, y si es impar

$$y_1(x, \varepsilon) = x^{-q-1} e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)].$$

Los valores particulares son

$$y_1(L(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{cases} L_0^q + O(\varepsilon) & \text{si } q \text{ es par} \\ L_0^{-q-1} e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] & \text{si } q \text{ es impar} \end{cases}$$

e

$$y_2(-1, \varepsilon) = \begin{cases} -L_0^{q+1} e^{\frac{1-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] & \text{si } q \text{ es par} \\ -L_0^{-q} + O(\varepsilon) & \text{si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

La solución exacta (3.16) se puede entonces descomponer como  $y(x, \varepsilon) =$

$y_{EXT}(x, \varepsilon) + y_{INT}(x, \varepsilon)$ , donde si  $q$  es par,

$$y_{EXT}(x, \varepsilon) = \frac{A_0 x^q + O(\varepsilon) + B_0 x^q L_0^{q+1} e^{\frac{1-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}{1 + L_0^{2q+1} e^{\frac{1-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]} \quad (3.17)$$

y si  $q$  es impar,

$$y_{EXT}(x, \varepsilon) = \frac{B_0 x^q L_0^{-q} + O(\varepsilon) - A_0 x^q L_0^{-2q-1} e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}{1 + L_0^{-2q-1} e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}; \quad (3.18)$$

además, si  $q$  es par,

$$y_{INT}(x, \varepsilon) = \frac{(B_0 - A_0 L_0^q) L_0^{q+1} x^{-q-1} e^{\frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)]}{1 + L_0^{2q+1} e^{\frac{1-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]} \quad (3.19)$$

y si  $q$  es impar,

$$y_{INT}(x, \varepsilon) = \frac{(A_0 + B_0 L_0^{-q}) x^{-q-1} e^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/x)]}{1 + L_0^{-2q-1} e^{\frac{L^2(\varepsilon)-1}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]} \quad (3.20)$$

Las estimaciones asintóticas de (3.17)-(3.20) van a depender de la posición de  $L(\varepsilon)$  respecto de la abscisa  $x = 1$ . Se obtiene independientemente de la paridad de  $q$

$$y_{EXT}(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} B_0 (x/L_0)^q & \text{si } L_0 < 1 \\ \frac{B_0 x^q + e^{L_1} A_0 (-x)^q}{1 + e^{L_1}} & \text{si } L_0 = 1 \\ A_0 (-x)^q & \text{si } L_0 > 1 \end{cases} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

y cuando  $\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0$ ,

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} [A_0 - B_0 (-L_0)^{-q}] (-x)^{-q-1} e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 < 1 \\ \frac{A_0 - B_0 (-1)^q}{1 + e^{L_1}} (-x)^{-q-1} e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 = 1 \\ [B_0 - A_0 (-L_0)^q] \left(\frac{L_0}{x}\right)^{q+1} e^{[x^2 - L^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Ahora, se puede concluir con las tres proposiciones siguientes.

**Proposición 3.13.** Si  $L_0 < 1$ , la solución del p.v.f. (3.15) se describe en primera aproximación como

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 \left( \frac{x}{L_0} \right)^q + \left[ A_0 - B_0 \left( \frac{-1}{L_0} \right)^q \right] e^{-(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (3.21)$$

tiene una capa de frontera a la izquierda en  $x = -1$  y fuera de ella se comporta como la función potencia  $x^q$  alcanzando suavemente el valor  $B_0$  en la frontera derecha.

**Demostración.** Si  $x+1 = O(\varepsilon)$ , entonces  $(-x)^{-q-1} \exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} = [1 + O(\varepsilon)] \exp \frac{(x+1)^2}{2\varepsilon} \exp \left( -\frac{x+1}{\varepsilon} \right) = \exp[-(x+1)/\varepsilon][1 + O(\varepsilon)]$ . Si  $x+1 \neq O(\varepsilon)$ , se tienen  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} \ll 1$  y  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] \ll 1$ .  $\square$

**Proposición 3.14.** Si  $L_0 > 1$ , la solución del p.v.f. (3.15) se describe en primera aproximación como

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0(-x)^q + [B_0 - A_0(-L_0)^q] e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (3.22)$$

tiene una capa de frontera a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$  y fuera de ella se comporta como la función potencia  $x^q$  alcanzando suavemente el valor  $A_0$  en la frontera izquierda.

**Demostración.** Si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , entonces  $(L_0/x)^{q+1} \exp \frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon} = [1 + O(\varepsilon)] \exp \frac{[x-L(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon} \exp \frac{L(\varepsilon)[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon} = \exp\{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\}[1 + O(\varepsilon)]$ . Si  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , se tienen  $\exp \frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon} \ll 1$  y  $\exp\{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\} \ll 1$ .  $\square$

**Proposición 3.15.** Si  $L_0 = 1$ , la solución del p.v.f. (3.15) se describe en primera aproximación como

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{B_0 x^q + e^{L_1} A_0 (-x)^q}{1 + e^{L_1}} + \frac{A_0 - B_0 (-1)^q}{1 + e^{L_1}} e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ + \frac{B_0 - A_0 (-1)^q}{1 + e^{-L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (3.23)$$

tiene capas de frontera en ambos extremos y entre ellas se comporta como la función potencia  $x^q$ ; además, cuando  $L_1 \rightarrow -\infty$ , esta solución del caso  $L_0 = 1$  tiende

uniformemente al límite de la solución del caso  $L_0 < 1$  cuando  $L_0 \rightarrow 1^-$ , y cuando  $L_1 \rightarrow \infty$ , tiende uniformemente al límite de la solución del caso  $L_0 > 1$  cuando  $L_0 \rightarrow 1^+$ .

**Demostración.** Si  $x+1 = O(\varepsilon)$ , entonces  $(-x)^{-q-1} \exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} = \exp[-(x+1)/\varepsilon][1 + O(\varepsilon)]$  como en la demostración de la Proposición 3.13, y se tiene  $\exp \frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon} \ll 1$ . Si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , entonces  $(-x)^{-q-1} \exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} = [(-1)^{-q-1} + O(\varepsilon)] \exp \frac{[x-L(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon} \exp \frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon} e^{L_1} \exp[L_1(x-1)] = (-1)^{-q-1} e^{L_1} \exp\{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon\}[1 + O(\varepsilon)]$ , y se tiene  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] \ll 1$ . Si  $x+1 \neq O(\varepsilon)$  y  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , se tienen  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} \ll 1$ ,  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] \ll 1$  y  $\exp\{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon\} \ll 1$ .  $\square$

Ahora se aplica el método de expansiones asintóticas empatadas. Una solución regular de la e.d.o.  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  debe satisfacer  $-xY_0' + qY_0 = 0$  y  $-xY_{i+1}' + qY_{i+1} = -Y_i''$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Se obtiene

$$Y(x, \varepsilon) \sim k_0 x^q + \varepsilon \left[ k_1 x^q - k_0 \frac{q(q-1)}{2} x^{q-2} \right] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $k_0$  y  $k_1$  son constantes de integración.

Para una posible capa de frontera a la izquierda en  $x = -1$ , se introduce el cambio de variables  $t = (x+1)/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es  $\ddot{z} + (1 - \varepsilon t)\dot{z} + \varepsilon qz = 0$ ,  $z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) = Y(-1, \varepsilon)$ . El término dominante  $z_0(t)$  de su solución, para satisfacer  $\ddot{z}_0 + \dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = A_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = k_0(-1)^q$ , resulta

$$z_0(t) = k_0(-1)^q + [A_0 - k_0(-1)^q]e^{-t}, \quad t \in [0, \infty).$$

En particular,  $\dot{z}_0(0) = k_0(-1)^q - A_0$ .

Para una posible capa de frontera a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$ , se introduce el cambio de variables  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es  $\ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]\dot{z} + \varepsilon qz = 0$ ,  $z(0, \varepsilon) = B(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = Y(L(\varepsilon), \varepsilon)$ . El término dominante  $z_0(t)$  de su solución, para satisfacer  $\ddot{z}_0 - L_0 \dot{z}_0 = 0$ ,

$z_0(0) = B_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = k_0 L_0^q$ , resulta

$$z_0(t) = k_0 L_0^q + (B_0 - k_0 L_0^q) e^{L_0 t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

En particular,  $\dot{z}_0(0) = L_0(B_0 - k_0 L_0^q)$ .

De conocerse el valor de la constante  $k_0$ , se contaría con la aproximación asintótica compuesta

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 x^q + [A_0 - k_0(-1)^q] e^{-(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0 L_0^q) e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (3.24)$$

Para determinar el valor de  $k_0$ , se va a derivar una condición de frontera adicional, de tipo mixto, sobre los valores de la primera derivada.

**Lema 3.16.** *La función polinomial de grado  $q$  en  $x$  y grado  $[q/2]$  (parte entera de  $q/2$ ) en  $\varepsilon$*

$$h(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{[q/2]} \frac{q!}{(q-2i)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{i!} x^{q-2i} \quad (3.25)$$

es solución regular de la e.d.o. en (3.15): satisface  $\varepsilon h'' - xh' + qh = 0$  (y es tal que  $h(x, 0) = x^q$  y tal que  $h(x, \varepsilon) \sim x^q$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ ).

Nota: se tiene  $Y(x, \varepsilon) = k(\varepsilon)h(x, \varepsilon)$  con  $k(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i$  y se tienen  $y_1(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon)/h(-1, \varepsilon)$  e  $y_2(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon)/h(L(\varepsilon), \varepsilon)$  cuando  $q$  sea par e impar, respectivamente.

**Demostración.** Al derivar (3.25), desaparece un término sólo si  $q$  es par y se obtiene

$$h'(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{[q/2]} \frac{q!}{(q-2i-1)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{i!} x^{q-2i-1};$$

entonces  $-xh'(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{[q/2]} -(q-2i) \frac{q!}{(q-2i)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{i!} x^{q-2i}$  (tomando en cuenta que el factor  $(q-2i)$  se anula cuando  $i = q/2$ ), de donde (tomando en cuenta la cancelación

$qx^q - xqx^{q-1}$  cuando  $i = 0$ )

$$qh(x, \varepsilon) - xh'(x, \varepsilon) = 2 \sum_{i=1}^{[q/2]} \frac{q!}{(q-2i)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{(i-1)!} x^{q-2i}.$$

Al derivar (3.25) dos veces, una de las derivaciones hace desaparecer un término y la otra no y se obtiene

$$h''(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{[q/2]-1} \frac{q!}{(q-2i-2)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{i!} x^{q-2i-2};$$

entonces  $\varepsilon h''(x, \varepsilon) = -2 \sum_{i=0}^{[q/2]-1} \frac{q!}{(q-2i-2)!} \frac{(-\varepsilon/2)^{i+1}}{i!} x^{q-2i-2}$ , de donde

$$\varepsilon h''(x, \varepsilon) = -2 \sum_{i=1}^{[q/2]} \frac{q!}{(q-2i)!} \frac{(-\varepsilon/2)^i}{(i-1)!} x^{q-2i}$$

y esto es lo opuesto de lo obtenido para  $qh(x, \varepsilon) - xh'(x, \varepsilon)$ . □

Ahora, se usa la función  $h(\cdot, \varepsilon)$  para el procedimiento clásico de reducción del orden en la ecuación diferencial de (3.15). El cambio de variable  $y(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon)u(x, \varepsilon)$  reduce la e.d.o. a

$$\varepsilon h(x, \varepsilon)u'' + [2\varepsilon h'(x, \varepsilon) - xh(x, \varepsilon)]u' = 0.$$

Al multiplicar por  $\varepsilon^{-1}h(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $\left[u'h^2(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)\right]' = 0$ , lo cual integrado desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$  da la condición exacta

$$u'(L(\varepsilon), \varepsilon)h^2(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = u'(-1, \varepsilon)h^2(-1, \varepsilon) \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right);$$

regresando a la variable  $y$  original, debe darse  $[h(L(\varepsilon), \varepsilon)y'(L(\varepsilon), \varepsilon) - h'(L(\varepsilon), \varepsilon)y(L(\varepsilon), \varepsilon))] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [h(-1, \varepsilon)y'(-1, \varepsilon) - h'(-1, \varepsilon)y(-1, \varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ ; de donde

$$[L_0^q y'(L(\varepsilon), \varepsilon) + O(1)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [(-1)^q y'(-1, \varepsilon) + O(1)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right).$$



Las pendientes en la frontera se aproximan en base a los términos dominantes  $z_0$  de las soluciones interiores:

$$[L_0^{q+1}(B_0 - k_0 L_0^q) + O(\varepsilon)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [k_0 - (-1)^q A_0 + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right).$$

Si  $L_0 < 1$ , como  $\exp\left(\frac{-L_0^2}{2\varepsilon}\right) \gg \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $L_0^{q+1}(B_0 - k_0 L_0^q) = 0$ ; es decir  $k_0 = B_0 L_0^{-q}$ , lo cual insertado en la aproximación (3.24) da  $y(x, \varepsilon) \sim B_0 L_0^{-q} x^q + [A_0 - B_0(-1/L_0)^q] e^{-(x+1)/\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), en conformidad con la Proposición 3.13.

Si  $L_0 > 1$ , como  $\exp\left(\frac{-L_0^2}{2\varepsilon}\right) \ll \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $k_0 - (-1)^q A_0 = 0$ ; es decir  $k_0 = A_0(-1)^q$ , lo cual insertado en la aproximación (3.24) da  $y(x, \varepsilon) \sim A_0(-x)^q + [B_0 - A_0(-L_0)^q] e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), en conformidad con la Proposición 3.14.

Si  $L_0 = 1$ , como  $\exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [e^{-L_1} + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $(B_0 - k_0)e^{-L_1} = k_0 - (-1)^q A_0$ ; es decir  $k_0 = \frac{A_0(-1)^q + B_0 e^{-L_1}}{1 + e^{-L_1}}$ , lo cual insertado en la aproximación (3.24) da  $y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0(-x)^q + B_0 x^q e^{-L_1}}{1 + e^{-L_1}} + \frac{A_0 - B_0(-1)^q}{1 + e^{-L_1}} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{B_0 - A_0(-1)^q}{1 + e^{-L_1}} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), en conformidad con la Proposición 3.15.

### 3.3.1 Ecuación perturbada exhibiendo supersensibilidad

Se va a considerar la e.d.o. perturbada

$$\varepsilon y'' - xy' + qy = \varepsilon^{-q-1/2} e^{-M/\varepsilon} r(x)[y - C(\varepsilon)h(x, \varepsilon)], \quad (3.26)$$

donde intervienen adicionalmente la constante positiva  $M$ , la función suave  $r$  tal que  $r(0) > 0$ , y la función real analítica  $C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i$  con  $C_0 \neq 0$ .

Como la perturbación es trascendentalmente pequeña (mientras  $y$  se mantenga acotada), el método de expansiones asintóticas empatadas da el mismo resultado como en el caso no perturbado que se acaba de tratar.

Se deriva una condición de frontera adicional de la misma manera, efectuando

primero el cambio de variable  $y(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon)u(x, \varepsilon)$ , multiplicando después por el factor integrante  $\varepsilon^{-1}h(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$  y entonces integrando desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$ ; resulta

$$u'(L(\varepsilon), \varepsilon)h^2(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] - u'(-1, \varepsilon)h^2(-1, \varepsilon) \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-q-3/2}e^{-M/\varepsilon} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} r(s)[u(s, \varepsilon) - C(\varepsilon)]h^2(s, \varepsilon) \exp\left(\frac{-s^2}{2\varepsilon}\right) ds.$$

Regresando a la variable  $y$  original, debe darse  $[h(L(\varepsilon), \varepsilon)y'(L(\varepsilon), \varepsilon) - h'(L(\varepsilon), \varepsilon)y(L(\varepsilon), \varepsilon)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] - [h(-1, \varepsilon)y'(-1, \varepsilon) - h'(-1, \varepsilon)y(-1, \varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right) = \varepsilon^{-q-3/2}e^{-M/\varepsilon} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} r(s)[k(\varepsilon) - C(\varepsilon)]h^2(s, \varepsilon) \exp\left(\frac{-s^2}{2\varepsilon}\right) ds$ , donde se ha usado la aproximación  $y(x, \varepsilon) = Y(x, \varepsilon)$  ya que debido a la presencia de  $\exp\left(\frac{-s^2}{2\varepsilon}\right)$ , sólo contribuye perceptiblemente la vecindad de  $s = 0$ , y ahí la solución del p.v.f. es la exterior. Sin embargo, no se puede aplicar directamente el método de Laplace clásico, porque la función  $h^2(s, \varepsilon)$  depende simultáneamente de la variable de integración y del parámetro pequeño.

Abramowicz y Stegun [1, página 786] suministran la integral exacta

$$\int_0^\infty e^{-t^2} H_q^2(t) dt = \sqrt{\pi} 2^{q-1} q!,$$

donde  $H_q$  es el polinomio de Hermite de grado  $q$  en base al cual se tiene  $h(s, \varepsilon) = (\varepsilon/2)^{q/2} H_q(s/\sqrt{2\varepsilon})$ ; se deduce vía el cambio de variable de integración  $s = t\sqrt{2\varepsilon}$

$$\int_{-\infty}^\infty h^2(s, \varepsilon) \exp\left(\frac{-s^2}{2\varepsilon}\right) ds = \sqrt{2\pi} q! \varepsilon^{q+1/2}.$$

Usando esto en la condición multiplicada por  $\varepsilon$ , resulta

$$\begin{aligned} [L_0^{q+1}(B_0 - k_0 L_0^q) + O(\varepsilon)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] - [k_0 - (-1)^q A_0 + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right) = \\ [\mu(k_0 - C_0) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-M}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

con  $\mu \stackrel{\text{def}}{=} r(0)\sqrt{2\pi q!}$ .

Si  $M > \min\{L_0^2/2, 1/2\}$ , la perturbación introducida en la e.d.o. es demasiado pequeña para tener efecto perceptible y valen las Proposiciones 3.13, 3.14 y 3.15.

Si  $M < \min\{L_0^2/2, 1/2\}$ , la perturbación domina los demás efectos e impone  $k_0 = C_0$  como amplitud de la resonancia en primera aproximación.

Si  $M = \min\{L_0^2/2, 1/2\}$ , el valor de  $k_0$  queda determinado como

$$k_0 = \begin{cases} \frac{L_0^{q+1}B_0 + \mu C_0}{L_0^{2q+1} + \mu} & \text{si } M = \frac{L_0^2}{2} < \frac{1}{2}, \\ \frac{(-1)^q A_0 + e^{-L_1} B_0 + \mu C_0}{1 + e^{-L_1} + \mu} & \text{si } M = \frac{L_0^2}{2} = \frac{1}{2}, \\ \frac{(-1)^q A_0 + \mu C_0}{1 + \mu} & \text{si } M = \frac{1}{2} < \frac{L_0^2}{2}. \end{cases}$$

Todos estos resultados supersensibles son consistentes con lo obtenido por Williams [172] mediante cálculo variacional y por Lee y Ward [107] mediante su método de proyección.

### 3.4 Ecuación de Hermite generalizada

Se va a considerar el p.v.f. cuyo carácter resonante fue demostrado por Cook y Eckhaus [16] y por Lewis [108]

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - xy' + (q + ax - a^2\varepsilon)y &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), & \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) &= B(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde están dados los números  $q \in \mathbb{N}$  y  $a \in \mathbb{R}$ , así como las tres funciones reales analíticas  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  con  $L_0 > 0$ ,  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$  con  $A_0 \neq 0$  y  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  con  $B_0 \neq 0$ .

Para determinar la solución exacta del problema (3.27) y entonces estimarla

asintóticamente, se define el cambio de variables

$$\tilde{x} \stackrel{\text{def}}{=} x - 2a\varepsilon, \quad \tilde{y}(\tilde{x}, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-ax}y(x, \varepsilon).$$

El p.v.f. queda transformado en

$$\begin{aligned} \varepsilon \tilde{y}'' - \tilde{x} \tilde{y}' + q \tilde{y} &= 0, & \tilde{-1}(\varepsilon) \leq \tilde{x} \leq \tilde{L}(\varepsilon), & \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \tilde{y}(\tilde{-1}(\varepsilon), \varepsilon) &= A(\varepsilon)e^a, & \tilde{y}(\tilde{L}(\varepsilon), \varepsilon) &= B(\varepsilon)e^{-aL(\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $\tilde{-1}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} -1 - 2a\varepsilon$  y  $\tilde{L}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} L(\varepsilon) - 2a\varepsilon$ .

La nueva e.d.o. (ecuación de Hermite singularmente perturbada) es el mismo caso particular de la ecuación estudiada en la Sección 1.3 (con  $p = 1$  y  $q \in \mathbb{N}$ ) como el de la sección anterior. Luego, la solución del p.v.f. (3.28) está dada por

$$\tilde{y}(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{\left[ \tilde{y}_1(\tilde{x}) - \tilde{y}_1(\tilde{L}) \tilde{y}_2(\tilde{x}) \right] A e^a + \left[ \tilde{y}_2(\tilde{x}) - \tilde{y}_1(\tilde{x}) \tilde{y}_2(\tilde{-1}) \right] B e^{-aL}}{1 - \tilde{y}_1(\tilde{L}) \tilde{y}_2(\tilde{-1})} \quad (3.29)$$

(donde está omitida la dependencia de  $A$ ,  $B$ ,  $L$ ,  $\tilde{-1}$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{y}_1$  e  $\tilde{y}_2$  respecto del parámetro  $\varepsilon$ ), en base a las funciones linealmente independientes convenientemente normalizadas

$$\tilde{y}_1(\tilde{x}, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\tilde{x}^2}{2\varepsilon}\right)}{M\left(-\frac{q}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\tilde{-1}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)} \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(\tilde{x}, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{x} M\left(\frac{1-q}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\tilde{x}^2}{2\varepsilon}\right)}{\tilde{L}(\varepsilon) M\left(\frac{1-q}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\tilde{L}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)}.$$

Como en la sección anterior, la función par  $\tilde{y}(\cdot, \varepsilon)$ , cuando  $q$  sea par, o la función impar  $\tilde{y}(\cdot, \varepsilon)$ , cuando  $q$  sea impar, es un polinomio de grado  $q$ , con comportamiento asintótico cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\tilde{y}_1(\tilde{x}, \varepsilon) = \tilde{x}^q + O(\varepsilon) \quad \text{e} \quad \tilde{y}_2(\tilde{x}, \varepsilon) = \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_0}\right)^q + O(\varepsilon);$$

mientras se tiene que para  $\sqrt{\varepsilon}/\tilde{x} \rightarrow 0$ , cuando  $q$  sea impar

$$\tilde{y}_1(\tilde{x}, \varepsilon) = \tilde{x}^{-q-1} e^{[\tilde{x}^2 - \tilde{1}^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/\tilde{x})]$$

o cuando  $q$  sea par

$$\tilde{y}_2(\tilde{x}, \varepsilon) = (L_0/\tilde{x})^{q+1} e^{[\tilde{x}^2 - \tilde{L}^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/\tilde{x})].$$

Los valores particulares son

$$\tilde{y}_1(\tilde{L}(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{cases} L_0^q + O(\varepsilon) & \text{si } q \text{ es par} \\ L_0^{-q-1} e^{[\tilde{L}^2(\varepsilon) - \tilde{1}^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] & \text{si } q \text{ es impar} \end{cases}$$

e

$$\tilde{y}_2(\tilde{1}(\varepsilon), \varepsilon) = \begin{cases} -L_0^{q+1} e^{[\tilde{1}^2(\varepsilon) - \tilde{L}^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})] & \text{si } q \text{ es par} \\ -L_0^{-q} + O(\varepsilon) & \text{si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

La solución exacta (3.29) se puede entonces descomponer como  $\tilde{y}(\tilde{x}, \varepsilon) = \tilde{y}_{EXT}(\tilde{x}, \varepsilon) + \tilde{y}_{INT}(\tilde{x}, \varepsilon)$ , donde si  $q$  es par,

$$\tilde{y}_{EXT}(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{A_0 e^a \tilde{x}^q + O(\varepsilon) + B_0 e^{-aL_0} \tilde{x}^q L_0^{q+1} e^{\frac{\tilde{1}^2(\varepsilon) - \tilde{L}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}{1 + L_0^{2q+1} e^{\frac{\tilde{1}^2(\varepsilon) - \tilde{L}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]} \quad (3.30)$$

y si  $q$  es impar,

$$\tilde{y}_{EXT}(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{B_0 e^{-aL_0} \tilde{x}^q L_0^{-q} + O(\varepsilon) - A_0 e^a \tilde{x}^q L_0^{-2q-1} e^{\frac{\tilde{L}^2(\varepsilon) - \tilde{1}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}{1 + L_0^{-2q-1} e^{\frac{\tilde{L}^2(\varepsilon) - \tilde{1}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}, \quad (3.31)$$

además, si  $q$  es par,

$$\tilde{y}_{INT}(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{(B_0 e^{-aL_0} - A_0 e^a L_0^q) L_0^{q+1} \tilde{x}^{-q-1} e^{\frac{\tilde{x}^2 - \tilde{L}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/\tilde{x})]}{1 + L_0^{2q+1} e^{\frac{\tilde{1}^2(\varepsilon) - \tilde{L}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]} \quad (3.32)$$

y si  $q$  es impar,

$$\tilde{y}_{INT}(\tilde{x}, \varepsilon) = \frac{(A_0 e^a + B_0 e^{-aL_0} L_0^{-q}) \tilde{x}^{-q-1} e^{\frac{\tilde{x}^2 - \tilde{1}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon}/\tilde{x})]}{1 + L_0^{-2q-1} e^{\frac{\tilde{L}^2(\varepsilon) - \tilde{1}^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})]}. \quad (3.33)$$

Las estimaciones asintóticas de (3.30)-(3.33) dependen del signo de  $L_0 - 1$ .

Se obtiene independientemente de la paridad de  $q$

$$\tilde{y}_{EXT}(\tilde{x}, \varepsilon) \sim \begin{cases} B_0 e^{-aL_0} (\tilde{x}/L_0)^q & \text{si } L_0 < 1 \\ \frac{B_0 e^a \tilde{x}^q + A_0 e^{L_1 - a} (-\tilde{x})^q}{e^{2a} + e^{L_1 - 2a}} & \text{si } L_0 = 1 \\ A_0 e^a (-\tilde{x})^q & \text{si } L_0 > 1 \end{cases} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

y cuando  $\sqrt{\varepsilon}/\tilde{x} \rightarrow 0$ ,

$$\tilde{y}_{INT}(\tilde{x}, \varepsilon) \sim \begin{cases} [A_0 e^a - B_0 e^{-aL_0} (-L_0)^{-q}] (-\tilde{x})^{-q-1} e^{[\tilde{x}^2 - \tilde{1}^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 < 1 \\ \frac{A_0 e^a - B_0 e^{-a} (-1)^q}{e^{2a} + e^{L_1 - 2a}} (-\tilde{x})^{-q-1} e^{[\tilde{x}^2 - 1]/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 = 1 \\ [B_0 e^{-aL_0} - A_0 e^a (-L_0)^q] \left(\frac{L_0}{\tilde{x}}\right)^{q+1} e^{[\tilde{x}^2 - \tilde{L}^2(\varepsilon)]/(2\varepsilon)} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Regresando a las variables originales, se tiene

$$y_{EXT}(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} B_0 (x/L_0)^q e^{a(x-L_0)} & \text{si } L_0 < 1 \\ \frac{A_0 (-x)^q e^{a(x-1)} + B_0 x^q e^{a(x+1)-L_1}}{e^{-2a} + e^{2a-L_1}} & \text{si } L_0 = 1 \\ A_0 (-x)^q e^{a(x+1)} & \text{si } L_0 > 1 \end{cases} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

y cuando  $\sqrt{\varepsilon}/x \rightarrow 0$ ,

$$y_{INT}(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} [A_0 e^{a(x+1)} - B_0 (-L_0)^{-q} e^{a(x-L_0)}] (-x)^{-q-1} e^{-2a(x+1)} e^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}} & \text{si } L_0 < 1 \\ \frac{A_0 e^{a(1-x)} - B_0 e^{-a(1+x)} (-1)^q}{e^{2a} + e^{L_1-2a}} (-x)^{-q-1} e^{\frac{x^2-1}{2\varepsilon}} & \text{si } L_0 = 1 \\ [B_0 e^{a(L_0-x)} - A_0 (-L_0)^q e^{a(2L_0+1-x)}] \left(\frac{L_0}{x}\right)^{q+1} e^{\frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Ahora, se puede concluir con las tres proposiciones siguientes.

**Proposición 3.17.** Si  $L_0 < 1$ , la solución del p.v.f. (3.27) se describe en primera aproximación como

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 \left( \frac{x}{L_0} \right)^q e^{a(x-L_0)} + \left[ A_0 - B_0 \left( \frac{-1}{L_0} \right)^q e^{-a(1+L_0)} \right] e^{-(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

tiene una capa de frontera a la izquierda en  $x = -1$  y fuera de ella se comporta como la función  $x^q e^{ax}$  alcanzando suavemente el valor  $B_0$  en la frontera derecha.

**Demostración.** Si  $x+1 = O(\varepsilon)$ , entonces  $e^{a(x+1)} = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $e^{a(x-L_0)} = e^{-a(1+L_0)} + O(\varepsilon)$ ,  $(-x)^{-q-1} = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $e^{-2a(x+1)} = 1 + O(\varepsilon)$  y  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} = \exp \left( -\frac{x+1}{\varepsilon} \right) [1 + O(\varepsilon)]$ . Si  $x+1 \neq O(\varepsilon)$ , se tienen  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} \ll 1$  y  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] \ll 1$ .  $\square$

**Proposición 3.18.** Si  $L_0 > 1$ , la solución del p.v.f. (3.27) se describe en primera aproximación como

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 (-x)^q e^{a(x+1)} + [B_0 - A_0 (-L_0)^q e^{a(1+L_0)}] e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

tiene una capa de frontera a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$  y fuera de ella se comporta como la función  $x^q e^{ax}$  alcanzando suavemente el valor  $A_0$  en la frontera izquierda.

**Demostración.** Si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , entonces  $e^{a(L_0-x)} = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $e^{a(2L_0+1-x)} = e^{a(L_0+1)} + O(\varepsilon)$ ,  $(L_0/x)^{q+1} = 1 + O(\varepsilon)$  y  $\exp \frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon} = \exp\{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\} [1 + O(\varepsilon)]$ . Si  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , se tienen  $\exp \frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon} \ll 1$  y  $\exp\{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\} \ll 1$ .  $\square$

**Proposición 3.19.** Si  $L_0 = 1$ , la solución del p.v.f. (3.27) se describe en primera aproximación como

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0(-x)^q e^{a(x-1)} + B_0 x^q e^{a(x+1)-L_1}}{e^{-2a} + e^{2a-L_1}} + \frac{A_0 e^{2a} - B_0 (-1)^q}{e^{2a} + e^{L_1-2a}} e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ + \frac{B_0 e^{-2a} - A_0 (-1)^q}{e^{-2a} + e^{2a-L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

tiene capas de frontera en ambos extremos y entre ellas se comporta como la función  $x^q e^{ax}$ ; además, cuando  $L_1 \rightarrow -\infty$ , esta solución del caso  $L_0 = 1$  tiende uniforme-

mente al límite de la solución del caso  $L_0 < 1$  cuando  $L_0 \rightarrow 1^-$ , y cuando  $L_1 \rightarrow \infty$ , tiende uniformemente al límite de la solución del caso  $L_0 > 1$  cuando  $L_0 \rightarrow 1^+$ .

**Demostración.** Si  $x+1 = O(\varepsilon)$ , entonces  $e^{a(1-x)} = e^{2a} + O(\varepsilon)$ ,  $e^{-a(1+x)} = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $(-x)^{-q-1} = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} = \exp[-(x+1)/\varepsilon][1 + O(\varepsilon)]$  y  $\exp \frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon} \ll 1$ . Si  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$ , entonces  $e^{a(1-x)} = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $e^{-a(1+x)} = e^{-2a} + O(\varepsilon)$ ,  $(-x)^{-q-1} = (-1)^{-q-1} + O(\varepsilon)$ ,  $[A_0 - B_0(-1)^q e^{-2a}](-1)^{-q-1} = B_0 e^{-2a} - A_0(-1)^q$ ,  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} = e^{L_1} \exp\{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon\}[1+O(\varepsilon)]$  y  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] \ll 1$ . Si  $x+1 \neq O(\varepsilon)$  y  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , se tienen  $\exp \frac{x^2-1}{2\varepsilon} \ll 1$ ,  $\exp[-(x+1)/\varepsilon] \ll 1$  y  $\exp\{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon\} \ll 1$ .  $\square$

Ahora se aplica el método de expansiones asintóticas empatadas. Una solución regular de la e.d.o.  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  debe satisfacer  $-xY_0' + (q+ax)Y_0 = 0$  y  $-xY_{i+1}' + (q+ax)Y_{i+1} = a^2 Y_i - Y_i''$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Se obtiene

$$Y(x, \varepsilon) \sim k_0 x^q e^{ax} + \varepsilon \left\{ k_1 x^q e^{ax} - k_0 \left[ \frac{q(q-1)}{2} x^{q-2} + 2aqx^{q-1} \right] e^{ax} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $k_0$  y  $k_1$  son constantes de integración.

Para una posible capa de frontera a la izquierda en  $x = -1$ , se introduce el cambio de variables  $t = (x+1)/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es  $\ddot{z} + (1-\varepsilon t)\dot{z} + \varepsilon(q-a-a^2\varepsilon+a\varepsilon t)z = 0$ ,  $z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) = Y(-1, \varepsilon)$ . El término dominante  $z_0(t)$  de su solución, para satisfacer  $\ddot{z}_0 + \dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = A_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = k_0(-1)^q e^{-a}$ , resulta

$$z_0(t) = k_0(-1)^q e^{-a} + [A_0 - k_0(-1)^q e^{-a}]e^{-t}, \quad t \in [0, \infty).$$

En particular,  $\dot{z}_0(0) = k_0(-1)^q e^{-a} - A_0$ .

Para una posible capa de frontera a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$ , se introduce el cambio de variables  $t = [x-L(\varepsilon)]/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El problema local correspondiente es  $\ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]\dot{z} + \varepsilon[q + aL(\varepsilon) - a^2\varepsilon + a\varepsilon t]z = 0$ ,  $z(0, \varepsilon) = B(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = Y(L(\varepsilon), \varepsilon)$ . El término dominante  $z_0(t)$  de su solución, para



satisfacer  $\ddot{z}_0 - L_0 \dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = B_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = k_0 L_0^q e^{aL_0}$ , resulta

$$z_0(t) = k_0 L_0^q e^{aL_0} + (B_0 - k_0 L_0^q e^{aL_0}) e^{L_0 t}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

En particular,  $\dot{z}_0(0) = L_0(B_0 - k_0 L_0^q e^{aL_0})$ .

De conocerse el valor de la constante  $k_0$ , se contaría con la aproximación asintótica compuesta

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim & k_0 x^q e^{ax} + [A_0 - k_0 (-1)^q e^{-a}] e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ & + (B_0 - k_0 L_0^q e^{aL_0}) e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para determinar el valor de  $k_0$ , se va a derivar una condición de frontera adicional, de tipo mixto, sobre los valores de la primera derivada. Usando la función  $h$  definida en el Lema 3.16, el cambio de variable  $y(x, \varepsilon) = \varphi(x, \varepsilon) u(x, \varepsilon)$  con  $\varphi(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} h(x - 2a\varepsilon, \varepsilon) e^{ax}$  reduce la e.d.o. a

$$\varepsilon \varphi(x, \varepsilon) u'' + [2\varepsilon \varphi'(x, \varepsilon) - x \varphi(x, \varepsilon)] u' = 0.$$

Al multiplicar por  $\varepsilon^{-1} \varphi(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $\left[u' \varphi^2(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)\right]' = 0$ , lo cual integrado desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$  da la condición exacta

$$u'(L(\varepsilon), \varepsilon) \varphi^2(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = u'(-1, \varepsilon) \varphi^2(-1, \varepsilon) \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right);$$

regresando a la variable  $y$  original, debe darse  $[\varphi(L(\varepsilon), \varepsilon) y'(L(\varepsilon), \varepsilon) - \varphi'(L(\varepsilon), \varepsilon) y(L(\varepsilon), \varepsilon)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [\varphi(-1, \varepsilon) y'(-1, \varepsilon) - \varphi'(-1, \varepsilon) y(-1, \varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ ; de donde

$$[L_0^q e^{aL_0} y'(L(\varepsilon), \varepsilon) + O(1)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [(-1)^q e^{-a} y'(-1, \varepsilon) + O(1)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right).$$

Las pendientes en la frontera se aproximan en base a los términos dominantes  $z_0$  de

las soluciones interiores:

$$\begin{aligned} [L_0^{q+1}e^{aL_0}(B_0 - k_0L_0^q e^{aL_0}) + O(\varepsilon)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = \\ [e^{-a}(k_0e^{-a} - (-1)^q A_0) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Si  $L_0 < 1$ , como  $\exp\left(\frac{-L_0^2}{2\varepsilon}\right) \gg \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $L_0^{q+1}e^{aL_0}(B_0 - k_0L_0^q e^{aL_0}) = 0$ ; es decir  $k_0 = B_0L_0^{-q}e^{-aL_0}$ , lo cual insertado en la aproximación (3.34) da

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0L_0^{-q}x^q e^{a(x-L_0)} + [A_0 - B_0(-1/L_0)^q e^{-a-aL_0}]e^{-(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

en conformidad con la Proposición 3.17.

Si  $L_0 > 1$ , como  $\exp\left(\frac{-L_0^2}{2\varepsilon}\right) \ll \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $e^{-a}(k_0e^{-a} - (-1)^q A_0) = 0$ ; es decir  $k_0 = A_0(-1)^q e^a$ , lo cual insertado en la aproximación (3.34) da

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0(-x)^q e^{a+ax} + [B_0 - A_0(-L_0)^q e^{a+aL_0}]e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

en conformidad con la Proposición 3.18.

Si  $L_0 = 1$ , como  $\exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = [e^{-L_1} + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene  $e^a(B_0 - k_0e^a)e^{-L_1} = e^{-a}(k_0e^{-a} - (-1)^q A_0)$ ; es decir  $k_0 = \frac{e^{-a}A_0(-1)^q + B_0e^{a-L_1}}{e^{-2a} + e^{2a-L_1}}$ , lo cual insertado en la aproximación (3.34) da

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim \frac{e^{a(x-1)}A_0(-x)^q + B_0x^q e^{a(x+1)-L_1}}{e^{-2a} + e^{2a-L_1}} + \frac{e^{2a}A_0 - B_0(-1)^q}{e^{2a} + e^{L_1-2a}} e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ + \frac{e^{-2a}B_0 - A_0(-1)^q}{e^{-2a} + e^{2a-L_1}} e^{[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

en conformidad con la Proposición 3.19.

### 3.5 Ecuación con un punto de retorno de orden impar y dos simples en la frontera

Se va a considerar el p.v.f.

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + px^m(x+1)[x - L(\varepsilon)]y' &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) &= B(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde el número real  $p$  es positivo, el número natural  $m$  es impar y las tres funciones reales analíticas  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$ ,  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  y  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  son tales que  $A_0 B_0 \neq 0$  y  $L_0 > 0$ .

Asumiendo como anteriormente una sola solución exterior en todo el intervalo  $[-1 + \delta, L_0 - \delta]$  para cualquier  $\delta > 0$  pequeño pero independiente de  $\varepsilon$ , se obtiene la función constante

$$Y(x, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Para una capa de frontera en el extremo izquierdo, el cambio de variables apropiado aquí

$$t = \frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} z_i(t)$$

transforma localmente el problema en

$$\begin{aligned} \ddot{z} + p(-1 + \sqrt{\varepsilon}t)^m t[-1 - L(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}t]\dot{z} &= 0, & t \in [0, \infty) \\ z(0, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & \lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) &= k(\varepsilon). \end{aligned}$$

El término dominante  $z_0 = z_0(t)$ , determinado por  $\ddot{z}_0 + p(1 + L_0)t\dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = A_0$ ,  $z_0(\infty) = k_0$ , resulta

$$z_0(t) = k_0 + (A_0 - k_0) \operatorname{erfc} \left[ t \sqrt{p(1 + L_0)/2} \right],$$

haciendo uso de la función de error complementaria  $\operatorname{erfc}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau}^{\infty} e^{-s^2} ds$ . En particular, se tiene  $\dot{z}_0(0) = (k_0 - A_0)\sqrt{2p(1+L_0)/\pi}$ .

Para una capa de frontera en el extremo derecho, el cambio de variables apropiado aquí

$$t = \frac{x - L(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} z_i(t)$$

transforma localmente el problema en

$$\begin{aligned} \ddot{z} + p[L(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}t]^m t [1 + L(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}t] \dot{z} &= 0, \quad t \in (-\infty, 0] \\ z(0, \varepsilon) &= B(\varepsilon), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = k(\varepsilon). \end{aligned}$$

El término dominante  $z_0 = z_0(t)$ , determinado por  $\ddot{z}_0 + pL_0^m(1+L_0)t\dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = B_0$ ,  $z_0(-\infty) = k_0$ , resulta

$$z_0(t) = k_0 + (B_0 - k_0) \operatorname{erfc} \left[ -t\sqrt{pL_0^m(1+L_0)/2} \right];$$

en particular, se tiene  $\dot{z}_0(0) = (B_0 - k_0)\sqrt{2pL_0^m(1+L_0)/\pi}$ .

En base a todo lo anterior, viene como *ansatz* de aproximación asintótica compuesta

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim k_0 + (A_0 - k_0) \operatorname{erfc} \left[ (x+1)\sqrt{\frac{p(1+L_0)}{2\varepsilon}} \right] \\ + (B_0 - k_0) \operatorname{erfc} \left\{ [L(\varepsilon) - x]\sqrt{\frac{pL_0^m(1+L_0)}{2\varepsilon}} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

donde la constante  $k_0$  es todavía indeterminada.

Para agregar una condición de frontera adecuada, se multiplica la e.d.o. por el factor integrante  $\exp[\varepsilon^{-1}f(x, \varepsilon)]$ , donde

$$f(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} p \left\{ \frac{x^{m+3}}{m+3} + [1 - L(\varepsilon)] \frac{x^{m+2}}{m+2} - L(\varepsilon) \frac{x^{m+1}}{m+1} \right\} \quad (3.36)$$

(de tal modo que  $f'(x, \varepsilon) = px^m(x+1)[x-L(\varepsilon)]$ ), obteniéndose  $\{\varepsilon y' \exp[\varepsilon^{-1}f(x, \varepsilon)]\}' = 0$ . La integración desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$  provee la identidad

$$\varepsilon y'(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L^{m+2}(\varepsilon)}{(m+1)(m+2)} + \frac{L^{m+3}(\varepsilon)}{(m+2)(m+3)} \right] \right\} = \varepsilon y'(-1, \varepsilon) \exp \left\{ -\frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L(\varepsilon)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} \right] \right\}.$$

Al usar las derivadas de las soluciones interiores dominantes, se sigue la condición

$$(B_0 - k_0)\sqrt{L_0^m} + O(\sqrt{\varepsilon}) = [k_0 - A_0 + O(\sqrt{\varepsilon})] \exp \left\{ \frac{p}{\varepsilon} \left[ L(\varepsilon) \frac{L^{m+1}(\varepsilon) - 1}{(m+1)(m+2)} + \frac{L^{m+3}(\varepsilon) - 1}{(m+2)(m+3)} \right] \right\},$$

la cual determina la constante  $k_0$  de la manera siguiente:

$$k_0 = \begin{cases} B_0 & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0}{e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1} & \text{si } L_0 = 1, \\ A_0 & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

Se puede concluir con tres proposiciones.

**Proposición 3.20.** *Si  $L_0 < 1$ , una estimación asintótica uniforme de la solución del p.v.f. (3.35) es*

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0) \operatorname{erfc} \left[ (x+1) \sqrt{\frac{p(1+L_0)}{2\varepsilon}} \right] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+);$$

*se observa una sola capa de frontera, a la izquierda, y fuera de ella la solución es aproximadamente constante, con el valor al orden uno impuesto en la frontera derecha.*

**Proposición 3.21.** Si  $L_0 > 1$ , una estimación asintótica uniforme de la solución del p.v.f. (3.35) es

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0) \operatorname{erfc} \left\{ [L(\varepsilon) - x] \sqrt{\frac{pL_0^m(1 + L_0)}{2\varepsilon}} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+);$$

se observa una sola capa de frontera, a la derecha, y fuera de ella la solución es aproximadamente constante, con el valor al orden uno impuesto en la frontera izquierda.

**Proposición 3.22.** Si  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$ , una estimación asintótica uniforme de la solución del p.v.f. (3.35) es

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim & \frac{A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0}{e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1} + \frac{A_0 - B_0}{e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1} \operatorname{erfc} \left[ (x + 1) \sqrt{\frac{p}{\varepsilon}} \right] \\ & + \frac{B_0 - A_0}{1 + e^{-\frac{2pL_1}{m+2}}} \operatorname{erfc} \left\{ [L(\varepsilon) - x] \sqrt{\frac{p}{\varepsilon}} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+); \end{aligned}$$

se observan capas de frontera en ambos extremos del dominio y fuera de ellas la solución es aproximadamente constante, con un valor al orden uno que tiende al caso  $L_0 < 1$  cuando  $L_1 \rightarrow -\infty$  y al caso  $L_0 > 1$  cuando  $L_1 \rightarrow \infty$ .

Para verificar las aserciones de las tres proposiciones, se va a resolver directamente el p.v.f. (3.35) para estimar asintóticamente su solución exacta. Ya se vio que la e.d.o. equivale a  $\{\varepsilon y' \exp[\varepsilon^{-1} f(x, \varepsilon)]\}' = 0$ , donde  $f(x, \varepsilon)$  fue definido en (3.36). Por lo tanto,  $y(x, \varepsilon) = c_1 + c_2 I(x, \varepsilon)$ , donde

$$I(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x \exp[\varepsilon^{-1} f(s, \varepsilon)] ds.$$

Así, la solución exacta se expresa como

$$y(x, \varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)I(L(\varepsilon), \varepsilon) - B(\varepsilon)I(-1, \varepsilon) + [B(\varepsilon) - A(\varepsilon)]I(x, \varepsilon)}{I(L(\varepsilon), \varepsilon) - I(-1, \varepsilon)}.$$

Se va a estimar asintóticamente  $I(-1, \varepsilon)$  e  $I(L(\varepsilon), \varepsilon)$ . Se tiene

$$I(-1, \varepsilon) = - \int_{-1}^0 \varphi(s) \exp[-\varepsilon^{-1} f(s, 0)] ds [1 + O(\varepsilon)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $\varphi(s) = \exp \left[ pL_1 \left( \frac{s^{m+2}}{m+2} + \frac{s^{m+1}}{m+1} \right) \right] = \exp \left[ \frac{pL_1}{(m+1)(m+2)} \right] \left[ 1 - \frac{pL_1}{2}(s+1)^2 + \dots \right] = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (s+1)^i$  y  $f(s, 0) = p \left[ \frac{s^{m+3}}{m+3} + (1-L_0) \frac{s^{m+2}}{m+2} - L_0 \frac{s^{m+1}}{m+1} \right] = -p \left[ \frac{L_0}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} \right] + \frac{p(1+L_0)}{2}(s+1)^2 + \dots = f(-1, 0) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (s+1)^{i+2}$ . El Teorema 1 en la página 58 de Wong [174] da

$$\int_{-1}^0 \varphi(s) \exp[-\varepsilon^{-1} f(s, 0)] ds \sim e^{-\frac{f(-1,0)}{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) c_i \varepsilon^{\frac{i+1}{2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $c_0 = \frac{b_0}{2\sqrt{a_0}} = e^{\frac{pL_1}{(m+1)(m+2)}} / \sqrt{2p(1+L_0)}$ . Así

$$\begin{aligned} I(-1, \varepsilon) &\sim -e^{\frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L_0}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} \right] + \frac{pL_1}{(m+1)(m+2)} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2p(1+L_0)}}} \\ &\sim -\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2p(1+L_0)}} \exp \left\{ \frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L(\varepsilon)}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} \right] \right\} \\ &\quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene

$$I(L_0, \varepsilon) = \int_{-L_0}^0 \varphi(\sigma) \exp[-\varepsilon^{-1} f(-\sigma, 0)] d\sigma [1 + O(\varepsilon)] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $\varphi(\sigma) = \exp \left[ pL_1 \left( \frac{\sigma^{m+1}}{m+1} - \frac{\sigma^{m+2}}{m+2} \right) \right] = \exp \left[ pL_1 \left( \frac{L_0^{m+1}}{m+1} + \frac{L_0^{m+2}}{m+2} \right) \right] \left[ 1 - pL_1(L_0^m + L_0^{m+1})(\sigma+L_0) + \dots \right] = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (\sigma+L_0)^i$  y  $f(-\sigma, 0) = p \left[ \frac{\sigma^{m+3}}{m+3} + (L_0-1) \frac{\sigma^{m+2}}{m+2} - L_0 \frac{\sigma^{m+1}}{m+1} \right] = -p \left[ \frac{L_0^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{L_0^{m+3}}{(m+2)(m+3)} \right] + \frac{pL_0^m(1+L_0)}{2}(\sigma+L_0)^2 + \dots = f(L_0, 0) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\sigma+L_0)^{i+2}$ . El Teorema 1 en la página 58 de Wong [174] da

$$\int_{-L_0}^0 \varphi(\sigma) \exp[-\varepsilon^{-1} f(-\sigma, 0)] d\sigma \sim e^{-\frac{f(L_0,0)}{\varepsilon}} \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) c_i \varepsilon^{\frac{i+1}{2}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $c_0 = \frac{b_0}{2\sqrt{a_0}} = e^{pL_1\left(\frac{L_0^{m+1}}{m+1} + \frac{L_0^{m+2}}{m+2}\right)} / \sqrt{2pL_0^m(1+L_0)}$ . Así

$$\begin{aligned} I(L_0, \varepsilon) &\sim e^{\frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L_0^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{L_0^{m+3}}{(m+2)(m+3)} \right] + pL_1\left(\frac{L_0^{m+1}}{m+1} + \frac{L_0^{m+2}}{m+2}\right)} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2pL_0^m(1+L_0)}} \\ &\sim \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2pL_0^m(1+L_0)}} \exp \left\{ \frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L^{m+2}(\varepsilon)}{(m+1)(m+2)} + \frac{L^{m+3}(\varepsilon)}{(m+2)(m+3)} \right] \right\} \\ &\quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

Además, como  $\int_{L_0}^{L(\varepsilon)} \exp[-\varepsilon^{-1}f(s, \varepsilon)] ds \sim [L(\varepsilon) - L_0] \exp[-\varepsilon^{-1}f(L(\varepsilon), \varepsilon)] = [\varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)] \exp \left\{ \frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L^{m+2}(\varepsilon)}{(m+1)(m+2)} + \frac{L^{m+3}(\varepsilon)}{(m+2)(m+3)} \right] \right\}$ , entonces  $I(L(\varepsilon), \varepsilon) - I(L_0, \varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon} I(L_0, \varepsilon))$  y el comportamiento asintótico dominante de  $I(L(\varepsilon), \varepsilon)$  es el de  $I(L_0, \varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$I(L(\varepsilon), \varepsilon) \sim \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2pL_0^m(1+L_0)}} \exp \left\{ \frac{p}{\varepsilon} \left[ \frac{L^{m+2}(\varepsilon)}{(m+1)(m+2)} + \frac{L^{m+3}(\varepsilon)}{(m+2)(m+3)} \right] \right\}.$$

Comparando las dos estimaciones asintóticas obtenidas, se obtiene cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\frac{I(L(\varepsilon), \varepsilon)}{|I(-1, \varepsilon)|} \sim L_0^{-m/2} \exp \left\{ \frac{p}{\varepsilon} \left[ L(\varepsilon) \frac{L^{m+1}(\varepsilon) - 1}{(m+1)(m+2)} + \frac{L^{m+3}(\varepsilon) - 1}{(m+2)(m+3)} \right] \right\}.$$

Luego, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , si  $L_0 < 1$  se tiene  $I(L(\varepsilon), \varepsilon)/|I(-1, \varepsilon)| = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ; si  $L_0 = 1$  se tiene  $I(L(\varepsilon), \varepsilon)/|I(-1, \varepsilon)| \sim \exp\left(\frac{2pL_1}{m+2}\right)$  y si  $L_0 > 1$  se tiene  $|I(-1, \varepsilon)|/I(L(\varepsilon), \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se deduce que el comportamiento asintótico de la solución exacta cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se simplifica en

$$y(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} B_0 + (B_0 - A_0)I(x, \varepsilon)/|I(-1, \varepsilon)| & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0 + (B_0 - A_0)I(x, \varepsilon)/|I(-1, \varepsilon)|}{e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1} & \text{si } L_0 = 1, \\ A_0 + (B_0 - A_0)I(x, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon) & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

**Demostración de la Proposición 3.20.** Se asume  $L_0 < 1$ . Si  $x + 1 = O(\sqrt{\varepsilon})$ ,



existe  $t = O(1)$  tal que  $x = -1 + \sqrt{\varepsilon}t$ . Se tiene  $y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0)[1 - E(t, \varepsilon)]$  donde  $E(t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} [I(-1 + \sqrt{\varepsilon}t, \varepsilon) - I(-1, \varepsilon)] / |I(-1, \varepsilon)|$ . Usando la estimación asintótica de  $|I(-1, \varepsilon)|$ , viene

$$E(t, \varepsilon) \sim \sqrt{\frac{2p(1+L_0)}{\pi\varepsilon}} \int_{-1}^{-1+\sqrt{\varepsilon}t} \exp\{\varepsilon^{-1}[f(-1, \varepsilon) - f(s, \varepsilon)]\} ds.$$

El cambio de variable de integración  $s = -1 + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{p(1+L_0)}} \sigma$  implica

$$E(t, \varepsilon) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t\sqrt{p(1+L_0)/2}} \exp\left\{\varepsilon^{-1}\left[f(-1, \varepsilon) - f\left(-1 + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{p(1+L_0)}} \sigma, \varepsilon\right)\right]\right\} d\sigma.$$

Como  $f'(-1, \varepsilon) = 0$  y  $f''(-1, \varepsilon) = p(1+L_0) + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces  $E(t, \varepsilon) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t\sqrt{p(1+L_0)/2}} \exp[-\sigma^2 + O(\sqrt{\varepsilon})] d\sigma$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ); es decir  $E(t, \varepsilon) \sim \text{erf}\left[t\sqrt{p(1+L_0)/2}\right]$ , de donde  $y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0) \text{erfc}\left[(x+1)\sqrt{\frac{p(1+L_0)}{2\varepsilon}}\right]$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

Si ahora  $x+1 \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\text{erfc}\left[(x+1)\sqrt{\frac{p(1+L_0)}{2\varepsilon}}\right] = o(1)$  y hay que demostrar que  $y(x, \varepsilon) \sim B_0$ . Sea  $x < 0$ . Como  $x > -1 + \sqrt{\varepsilon}t$  para todo  $t \in (0, \infty)$  y como la función  $|I(x, \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)|$  es decreciente para  $-1 \leq x \leq 0$ , se tiene  $|I(x, \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)| < |I(-1 + \sqrt{\varepsilon}t, \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)| = \text{erfc}\left[t\sqrt{p(1+L_0)/2}\right] + O(\sqrt{\varepsilon})$  para todo  $t \in (0, \infty)$ ; así  $|I(x, \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)| = o(1)$  y  $y(x, \varepsilon) \sim B_0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Sea finalmente  $x \in [0, L(\varepsilon)]$ ; entonces como la función  $|I(x, \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)|$  es creciente para  $0 \leq x \leq L(\varepsilon)$ , se tiene  $|I(x, \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)| \leq |I(L(\varepsilon), \varepsilon)/I(-1, \varepsilon)| = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $y(x, \varepsilon) \sim B_0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).  $\square$

**Demostración de la Proposición 3.21.** Se asume  $L_0 > 1$ . Si  $L(\varepsilon) - x = O(\sqrt{\varepsilon})$ , existe  $t = O(1)$  tal que  $x = L(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}t$ . Se tiene  $y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0)[1 - E(t, \varepsilon)]$  donde  $E(t, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} [I(L(\varepsilon), \varepsilon) - I(L(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}t, \varepsilon)] / |I(L(\varepsilon), \varepsilon)|$ . Usando la estimación asintótica de  $|I(L(\varepsilon), \varepsilon)|$ , viene

$$E(t, \varepsilon) \sim \sqrt{\frac{2pL_0^m(1+L_0)}{\pi\varepsilon}} \int_{L(\varepsilon)-\sqrt{\varepsilon}t}^{L(\varepsilon)} \exp\{\varepsilon^{-1}[f(L(\varepsilon), \varepsilon) - f(s, \varepsilon)]\} ds.$$

El cambio de variable de integración  $s = L(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{pL_0^m(1+L_0)}} \sigma$  implica

$$E(t, \varepsilon) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t\sqrt{pL_0^m(1+L_0)}/2} \exp \left\{ \varepsilon^{-1} \left[ f(L(\varepsilon), \varepsilon) - f \left( L(\varepsilon) - \sqrt{\frac{2\varepsilon}{pL_0^m(1+L_0)}} \sigma, \varepsilon \right) \right] \right\} d\sigma.$$

Como  $f'(L(\varepsilon), \varepsilon) = 0$  y  $f''(L(\varepsilon), \varepsilon) = pL_0^m(1+L_0) + O(\varepsilon)$ , entonces  $E(t, \varepsilon) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t\sqrt{pL_0^m(1+L_0)}/2} \exp[-\sigma^2 + O(\sqrt{\varepsilon})] d\sigma$ ; es decir  $E(t, \varepsilon) \sim \operatorname{erf} [t\sqrt{pL_0^m(1+L_0)}/2]$ , de donde  $y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0) \operatorname{erfc} \left\{ [L(\varepsilon) - x] \sqrt{\frac{pL_0^m(1+L_0)}{2\varepsilon}} \right\}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

Si ahora  $L(\varepsilon) - x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\operatorname{erfc} \left\{ [L(\varepsilon) - x] \sqrt{\frac{pL_0^m(1+L_0)}{2\varepsilon}} \right\} = o(1)$  y hay que demostrar que  $y(x, \varepsilon) \sim A_0$ . Sea  $x > 0$ . Como  $x < L(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}t$  para todo  $t \in (0, \infty)$  y como la función  $I(x, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon)$  es creciente para  $0 \leq x \leq L(\varepsilon)$ , se tiene  $I(x, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon) < I(L(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}t, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{erfc} [t\sqrt{pL_0^m(1+L_0)}/2] + O(\sqrt{\varepsilon})$  para todo  $t \in (0, \infty)$ ; así  $I(x, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon) = o(1)$  y  $y(x, \varepsilon) \sim A_0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Sea finalmente  $x \in [-1, 0]$ ; entonces como la función  $|I(x, \varepsilon)|/I(L(\varepsilon), \varepsilon)$  es decreciente para  $-1 \leq x \leq 0$ , se tiene  $|I(x, \varepsilon)|/I(L(\varepsilon), \varepsilon) \leq |I(-1, \varepsilon)|/I(L(\varepsilon), \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $y(x, \varepsilon) \sim A_0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).  $\square$

**Demostración de la Proposición 3.22.** Se asume  $L_0 = 1$ . Si  $x + 1 = O(\sqrt{\varepsilon})$ , existe  $t = O(1)$  tal que  $x = -1 + \sqrt{\varepsilon}t$ . Se tiene  $(e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1)y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0 + (A_0 - B_0)[1 - E(t, \varepsilon)]$  con  $E(t, \varepsilon)$  definido en la demostración de la Proposición 3.20 (aquí con  $L_0 = 1$ ). Resulta entonces  $(e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1)y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0 + (A_0 - B_0) \operatorname{erfc} [(x + 1)\sqrt{p/\varepsilon}]$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ).

Si  $x \in (-1, 0)$  con  $x + 1 \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\operatorname{erfc} [(x + 1)\sqrt{p/\varepsilon}] = o(1)$  y también  $\operatorname{erfc} \{ [L(\varepsilon) - x]\sqrt{p/\varepsilon} \} = o(1)$ , por lo que hay que demostrar  $(e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1)y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0$ , lo cual es inmediato haciendo  $L_0 = 1$  en la parte correspondiente de la demostración de la Proposición 3.20.

Si  $L(\varepsilon) - x = O(\sqrt{\varepsilon})$ , existe  $t = O(1)$  tal que  $x = L(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}t$ . Como  $I(x, \varepsilon)/|I(-1, \varepsilon)| = \frac{I(L(\varepsilon), \varepsilon)}{|I(-1, \varepsilon)|} I(x, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon) \sim e^{\frac{2pL_1}{m+2}} I(x, \varepsilon)/I(L(\varepsilon), \varepsilon)$ , se tiene  $(e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1)y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0 + (B_0 - A_0) e^{\frac{2pL_1}{m+2}} [1 - E(t, \varepsilon)]$  con  $E(t, \varepsilon)$  definido en la demostración de la Proposición 3.21 (aquí con  $L_0 = 1$ ). Resulta entonces

$$\left(e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1\right)y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0 + (B_0 - A_0)e^{\frac{2pL_1}{m+2}} \operatorname{erfc}\{[L(\varepsilon) - x]\sqrt{p/\varepsilon}\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Finalmente, si  $x \in [0, L(\varepsilon)]$  con  $L(\varepsilon) - x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\operatorname{erfc}\{[L(\varepsilon) - x]\sqrt{p/\varepsilon}\} = o(1)$  y también  $\operatorname{erfc}\{(x+1)\sqrt{p/\varepsilon}\} = o(1)$ , por lo que hay que demostrar  $\left(e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + 1\right)y(x, \varepsilon) \sim A_0 e^{\frac{2pL_1}{m+2}} + B_0$ , lo cual es inmediato haciendo  $L_0 = 1$  en la parte correspondiente de la demostración de la Proposición 3.21.  $\square$

### 3.5.1 Comentario sobre el orden impar

Naturalmente, se podría considerar una ecuación similar pero con punto de retorno interior de orden par; es decir, la e.d.o.

$$\varepsilon y'' + px^{2m}(x+1)[L(\varepsilon) - x]y' = 0, \quad -1 \leq x \leq L(\varepsilon)$$

o bien

$$\varepsilon y'' + px^{2m}(x+1)[x - L(\varepsilon)]y' = 0, \quad -1 \leq x \leq L(\varepsilon),$$

donde  $p \in (0, \infty)$  y  $m \in \mathbb{N}$ .

Entonces, en el primer caso no puede darse una capa de frontera en el extremo derecho y en el segundo, no puede darse en el izquierdo. Luego, si bien sigue presente la resonancia de Ackerberg y O'Malley, no obstante el método estándar de expansiones asintóticas empatadas produce una aproximación asintótica compuesta sin ninguna indeterminación:

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + (A_0 - B_0) \operatorname{erfc} \left[ (x+1) \sqrt{\frac{p(L_0+1)}{2\varepsilon}} \right] \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

en el primer caso, y en el segundo

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + (B_0 - A_0) \operatorname{erfc} \left\{ L_0^m [L(\varepsilon) - x] \sqrt{\frac{p(L_0+1)}{2\varepsilon}} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Además, en particular, no hay ningún fenómeno de dependencia sensible respecto de la extensión del dominio.

Por otra parte, la no ocurrencia de alguna indeterminación es también la razón por la cual, en el tratamiento del punto de retorno de orden impar, se ha considerado la e.d.o. en (3.35) y no la similar

$$\varepsilon y'' + px^m(x+1)[L(\varepsilon) - x]y' = 0, \quad -1 \leq x \leq L(\varepsilon).$$

En efecto, con esta última ecuación, no puede darse una capa de frontera en ninguno de los dos extremos del dominio y esto implica la presencia de una capa interior de transición en el punto de retorno. El método estándar de expansiones asintóticas empatadas produce entonces como aproximación asintótica compuesta simplemente la solución interior. Ésta, al haberse empatado de un lado con la solución exterior izquierda  $Y_0(x) \equiv A_0$  y del otro lado con la solución exterior derecha  $Y_0(x) \equiv B_0$ , no conserva ninguna constante de integración indeterminada. Por ejemplo, si  $m = 1$ , se obtiene

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 + \frac{A_0 - B_0}{2} \operatorname{erfc} \left( x \sqrt{\frac{pL_0}{2\varepsilon}} \right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Tampoco aquí hay materia para alguna dependencia sensible respecto de la extensión del dominio.

---

## CAPÍTULO 4

### Problemas diferentes

En la literatura consultada, el único caso encontrado de resonancia de Ackerman y O'Malley que se salga del marco de las ecuaciones diferenciales ordinarias, escalares, lineales y de segundo orden es el estudio por Jiang y Jin [55] de una e.d.o. de tercer orden, la cual tratan por un método de escalas múltiples distintas de las usadas en el método estándar de expansiones asintóticas empatadas. Por el contrario, en la primera sección de este capítulo, se presenta el enfoque clásico, aplicado a la ecuación más sencilla posible, correspondiente a la considerada en el Capítulo 2, y completado por la resolución sencilla de la indeterminación al estilo del Capítulo 3. Tal ecuación tiene la ventaja, aquí también, de poder ser resuelta en forma exacta, lo cual permite verificar los resultados del método de aproximación asintótica.

En una segunda sección, se presenta una ecuación de primer orden correspondiente a la considerada en la Sección 3.1 (ecuación asociada a un tiempo de salida), con una frontera de dos puntos, para la cual el método de expansiones asintóticas empatadas deja una indeterminación que también puede resolverse simplemente por el método abogado en este trabajo; la obtención de la solución exacta permite verificar el acierto de las deducciones.

En una tercera sección, se considera un sistema de dos ecuaciones de segundo orden para dos funciones incógnitas en interrelación. El método de expansiones asintóticas empatadas desemboca en soluciones aproximadas resonantes todavía dependientes de una constante  $k_0$  indeterminada. Se aplica exitosamente el método de la Sección 3.3 a una combinación lineal adecuada de las dos componentes y los resultados en todos los casos se verifican mediante la obtención y resolución de un sistema transformado equivalente pero desacoplado.

En una cuarta sección, se estudia una ecuación no lineal para la cual el método de expansiones asintóticas empatadas deja indeterminada la amplitud de la solución

“resonante”, y ésta se desvela por el método propuesto de resolución simple, incluyendo la dependencia sensible del número de capas de frontera respecto de la extensión del dominio. Los resultados se verifican mediante el análisis asintótico de la solución exacta.

En una quinta sección, se considera una ecuación con un término no local que involucra la integral de la función buscada sobre todo el dominio. La indeterminación dejada por el método de expansiones asintóticas empataadas se resuelve aquí también, y la validez de los resultados se establece mediante la equivalencia del p.v.f. planteado con un problema manejable con técnicas clásicas.

Finalmente, en una última sección, se enfoca una ecuación en derivadas parciales del tipo elíptico, con punto de retorno en el origen del plano, de nuevo la más sencilla posible y correspondiente a la e.d.o. considerada en el Capítulo 2; se aplica el método de expansiones asintóticas empataadas y se llega a una indeterminación que se puede resolver directamente en el espíritu de este trabajo, obteniéndose resultados conformes con los existentes en la literatura.

#### 4.1 Ecuación de tercer orden

Se estudiará el p.v.f.

$$\varepsilon y''' - xy'' = 0, \quad -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (4.1)$$

$$y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i, \quad y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i, \quad (4.2)$$

$$\varepsilon [\alpha(\varepsilon)y'(-1, \varepsilon) + \beta(\varepsilon)y'(L(\varepsilon), \varepsilon)] = C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i \quad (4.3)$$

con  $A_0 B_0 C_0 \neq 0$ , donde  $\alpha(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \alpha_i$  y  $\beta(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \beta_i$  con  $\alpha_0 \beta_0 \neq 0$ , y  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  con  $L_0 > 0$ . La tercera condición de frontera es de tipo mixto, porque involucra valores en los dos extremos del dominio; Jiang y Jin [55] no consideran esta clase de condiciones.

Se empieza con la aplicación del método de expansiones asintóticas empatadas.

Una solución exterior  $Y = Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) debe satisfacer  $-xY_0'' = 0$  y  $xY_{i+1}'' = Y_i''' = 0$  para todo  $i \geq 0$ ; por lo tanto,

$$Y(x, \varepsilon) = k(\varepsilon) + \bar{k}(\varepsilon)x \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (k_i + \bar{k}_i x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (4.4)$$

para pares de coeficientes  $(k_i, \bar{k}_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , por determinar.

Al introducir la variable local  $t = (x + 1)/\varepsilon$  para considerar una posible capa de frontera en el extremo izquierdo  $x = -1$ , una solución interior  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) debe satisfacer  $\ddot{z}_0 + \ddot{z}_0 = 0$  y  $\ddot{z}_{i+1} + \ddot{z}_{i+1} = t\ddot{z}_i$  para todo  $i \geq 0$ , con  $z_i(0) = A_i$  para todo  $i \geq 0$ ; por lo tanto,

$$\begin{aligned} z_0(t) &= a_0 + \bar{a}_0 t + (A_0 - a_0)e^{-t}, \\ z_1(t) &= a_1 + \bar{a}_1 t + (A_1 - a_1)e^{-t} + (A_0 - a_0)(2t + t^2/2)e^{-t}, \end{aligned}$$

donde  $a_0$ ,  $\bar{a}_0$ ,  $a_1$  y  $\bar{a}_1$  son constantes de integración. En particular, se tiene  $\dot{z}_0(0) = \bar{a}_0 + a_0 - A_0$ .

Al introducir la variable local  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$  para considerar una posible capa de frontera en el extremo derecho  $x = L(\varepsilon)$ , una solución interior  $z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) debe satisfacer  $\ddot{z}_0 - L_0 \ddot{z}_0 = 0$  y  $\ddot{z}_{i+1} - L_0 \ddot{z}_{i+1} = t\ddot{z}_i + \sum_{j=1}^{i+1} L_j \ddot{z}_{i+1-j}$  para todo  $i \geq 0$ , con  $z_i(0) = B_i$  para todo  $i \geq 0$ ; por lo tanto,

$$\begin{aligned} z_0(t) &= b_0 + \bar{b}_0 t + (B_0 - b_0)e^{L_0 t}, \\ z_1(t) &= b_1 + \bar{b}_1 t + (B_1 - b_1)e^{L_0 t} + (B_0 - b_0)(L_1 t - 2t/L_0 + t^2/2)e^{L_0 t}, \end{aligned}$$

donde  $b_0$ ,  $\bar{b}_0$ ,  $b_1$  y  $\bar{b}_1$  son constantes de integración. En particular, se tiene  $\dot{z}_0(0) = \bar{b}_0 - L_0 b_0 + L_0 B_0$ .

La condición de frontera (4.3) al orden uno impone

$$\alpha_0(\bar{a}_0 + a_0 - A_0) + \beta_0(\bar{b}_0 - L_0b_0 + L_0B_0) = C_0. \quad (4.5)$$

Se aplica la regla de Van Dyke primero para empatar la solución interior izquierda con la solución exterior, al orden uno. Por una parte,  $Y_0(x) = k_0 + \bar{k}_0x = k_0 + \bar{k}_0(-1 + \varepsilon t) = k_0 - \bar{k}_0 + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Por otra parte,  $z_0(t) = a_0 + \bar{a}_0t + (A_0 - a_0)e^{-t} = a_0 + \bar{a}_0(x+1)/\varepsilon + (A_0 - a_0)\exp[-(x+1)/\varepsilon] = a_0 + \bar{a}_0(x+1)/\varepsilon + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . El empate exige

$$a_0 = k_0 - \bar{k}_0 \quad \text{y} \quad \bar{a}_0 = 0.$$

Se aplica ahora la regla de Van Dyke para empatar la solución interior derecha con la solución exterior, al orden uno. Por una parte,  $Y_0(x) = k_0 + \bar{k}_0x = k_0 + \bar{k}_0[L(\varepsilon) + \varepsilon t] = k_0 + L_0\bar{k}_0 + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Por otra parte,  $z_0(t) = b_0 + \bar{b}_0t + (B_0 - b_0)e^{L_0t} = b_0 + \bar{b}_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon + (B_0 - b_0)\exp\{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\} = b_0 - \bar{b}_0L_1 + \bar{b}_0(x - L_0)/\varepsilon + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . El empate exige

$$b_0 = k_0 + L_0\bar{k}_0 \quad \text{y} \quad \bar{b}_0 = 0.$$

La condición de frontera (4.5) se escribe ahora  $\alpha_0(k_0 - \bar{k}_0 - A_0) + \beta_0(-L_0k_0 - L_0^2\bar{k}_0 + L_0B_0) = C_0$ ; es decir,

$$(\alpha_0 - L_0\beta_0)k_0 - (\alpha_0 + L_0^2\beta_0)\bar{k}_0 = \alpha_0A_0 - \beta_0L_0B_0 + C_0. \quad (4.6)$$

Sin tomar en cuenta esta condición todavía, una aproximación asintótica compuesta tendría la forma

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 + \bar{k}_0x + (A_0 - k_0 + \bar{k}_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0 - L_0\bar{k}_0)e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.7)$$



Contiene dos constantes libres  $k_0$  y  $\bar{k}_0$ ; la condición (4.6) puede fijar una de ellas pero queda una indeterminación.

Para resolverla, se va a derivar una condición adicional exacta sobre las derivadas segundas en la frontera. Al multiplicar la ecuación diferencial (4.1) por el factor no nulo  $\exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$ , se obtiene una derivada exacta:  $[\varepsilon y'' e^{-x^2/(2\varepsilon)}]' = 0$ . Al integrarla entre  $x = 1$  y  $x = L(\varepsilon)$ , resulta  $\varepsilon y''(L(\varepsilon), \varepsilon) e^{-L^2(\varepsilon)/(2\varepsilon)} = \varepsilon y''(-1, \varepsilon) e^{-1/(2\varepsilon)}$ ; es decir,

$$y''(L(\varepsilon), \varepsilon) = E(\varepsilon) y''(-1, \varepsilon) \quad \text{con } E(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} e^{[L^2(\varepsilon)-1]/(2\varepsilon)}. \quad (4.8)$$

En base a las soluciones interiores, se tienen las primeras aproximaciones cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} y''(L(\varepsilon), \varepsilon) &= \varepsilon^{-2} L_0^2 (B_0 - k_0 - L_0 \bar{k}_0) + O(\varepsilon^{-1}), \\ y''(-1, \varepsilon) &= \varepsilon^{-2} (A_0 - k_0 + \bar{k}_0) + O(\varepsilon^{-1}). \end{aligned}$$

Al insertar estas expresiones en (4.8) y reordenar, viene la condición

$$(L_0^2 - E)k_0 + (L_0^3 + E)\bar{k}_0 = L_0^2 B_0 - A_0 E + O(\varepsilon) + O(\varepsilon E) \quad (4.9)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , donde  $E(\varepsilon)$  se denota  $E$  a partir de ahora para aliviar la escritura.

La solución del sistema lineal algebraico (4.6)-(4.9) es

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{L_0 A_0 + B_0}{L_0 + 1} - \frac{L_0^{-1} (L_0^3 + E) C_0}{(L_0 + 1)(\beta_0 E - \alpha_0 L_0)} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon E), \\ \bar{k}_0 &= \frac{B_0 - A_0}{L_0 + 1} + \frac{L_0^{-1} (L_0^2 - E) C_0}{(L_0 + 1)(\beta_0 E - \alpha_0 L_0)} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon E), \end{aligned} \quad (4.10)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , asumiendo  $\alpha_0 \neq \beta_0$  en el caso particular  $L(\varepsilon) \equiv 1$  (de lo contrario, se necesitaría  $C_0 = 0$  y  $k_0$  quedaría indeterminada).

La aproximación asintótica compuesta (4.7) queda como

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 + \bar{k}_0 x + \frac{L_0 C_0}{\beta_0 E - \alpha_0 L_0} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{L_0^{-1} C_0 E}{\beta_0 E - \alpha_0 L_0} e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.11)$$

Se observa que si  $L_0 = 1$ , entonces  $E(\varepsilon) = e^{L_1} + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ; si  $L_0 < 1$ , entonces  $E(\varepsilon) \ll 1$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ) y si  $L_0 > 1$ , entonces  $E(\varepsilon) \gg 1$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Por lo tanto, hay que distinguir estos tres casos.

Si  $L_0 = 1$ , la solución (4.10) da los valores al orden uno

$$k_0 = \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{(1 + e^{L_1})C_0}{2(\beta_0 e^{L_1} - \alpha_0)}$$

$$\bar{k}_0 = \frac{B_0 - A_0}{2} + \frac{(1 - e^{L_1})C_0}{2(\beta_0 e^{L_1} - \alpha_0)},$$

asumiendo nuevamente  $\alpha_0 \neq \beta_0$  en el caso particular  $L_0 = 1$ ,  $L_1 = 0$  que incluye el caso más particular anterior  $L(\varepsilon) \equiv 1$ . La aproximación asintótica compuesta resulta

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{(1 + e^{L_1})C_0}{2(\beta_0 e^{L_1} - \alpha_0)} + \left[ \frac{B_0 - A_0}{2} + \frac{(1 - e^{L_1})C_0}{2(\beta_0 e^{L_1} - \alpha_0)} \right] x + \frac{C_0}{\beta_0 e^{L_1} - \alpha_0} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{e^{L_1} C_0}{\beta_0 e^{L_1} - \alpha_0} e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.12)$$

En este caso, hay efectivamente dos capas de frontera. Además, se observa por una parte que la solución exterior límite (es decir, la amplitud de la resonancia) depende del coeficiente  $L_1$  en la expansión  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots$ ; por otra parte, hacer tender  $L_1$  al infinito tiene por efecto el de suprimir la capa de frontera en  $x = -1$ , mientras que si  $L_1 \rightarrow -\infty$ , se suprime la capa en  $x = L(\varepsilon)$ . Esto es consistente con los dos casos siguientes, en el sentido de que establece una *continuación* entre los tres casos.

Si  $L_0 > 1$ , la solución (4.10) da los valores al orden uno

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{L_0 A_0 + B_0}{L_0 + 1} - \frac{L_0^{-1} C_0}{(L_0 + 1) \beta_0} \\ \bar{k}_0 &= \frac{B_0 - A_0}{L_0 + 1} - \frac{L_0^{-1} C_0}{(L_0 + 1) \beta_0} \end{aligned}$$

y la aproximación asintótica compuesta resulta

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim & \frac{L_0 A_0 + B_0}{L_0 + 1} - \frac{L_0^{-1} C_0}{(L_0 + 1) \beta_0} + \left[ \frac{B_0 - A_0}{L_0 + 1} - \frac{L_0^{-1} C_0}{(L_0 + 1) \beta_0} \right] x \\ & + \frac{L_0^{-1} C_0}{\beta_0} e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned} \quad (4.13)$$

En este caso, hay una sola capa de frontera, a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$ .

Si  $L_0 < 1$ , la solución (4.10) da los valores al orden uno

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{L_0 A_0 + B_0}{L_0 + 1} + \frac{L_0 C_0}{(L_0 + 1) \alpha_0} \\ \bar{k}_0 &= \frac{B_0 - A_0}{L_0 + 1} - \frac{C_0}{(L_0 + 1) \alpha_0} \end{aligned}$$

y la aproximación asintótica compuesta resulta

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim & \frac{L_0 A_0 + B_0}{L_0 + 1} + \frac{L_0 C_0}{(L_0 + 1) \alpha_0} + \left[ \frac{B_0 - A_0}{L_0 + 1} - \frac{C_0}{(L_0 + 1) \alpha_0} \right] x \\ & - \frac{C_0}{\alpha_0} e^{-(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned} \quad (4.14)$$

En este caso, hay una sola capa de frontera, a la izquierda en  $x = -1$ .

Para verificar estos resultados de aproximación asintótica, se va a determinar la solución exacta del p.v.f. (4.1)-(4.3) y luego ésta se estimará cuando  $\varepsilon$  tienda a cero (en función del valor de  $L_0$ ).

Al aplicar el factor integrante  $\exp\left(\frac{1-x^2}{2\varepsilon}\right)$  a la e.d.o. (4.1), se obtiene (denotando  $c_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , las constantes de integración)  $y''(x, \varepsilon) = c_3(\varepsilon) \exp\left(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}\right)$ ,

de donde  $y'(x, \varepsilon) = c_3(\varepsilon)I(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)$ , definiendo como en el Capítulo 2

$$I(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x e^{(s^2-1)/(2\varepsilon)} ds;$$

luego  $y(x, \varepsilon) = c_3(\varepsilon) \int_0^x I(\sigma, \varepsilon) d\sigma + c_2(\varepsilon)x + c_1(\varepsilon)$ . Se integra por partes, a saber  $y(x, \varepsilon) = c_3(\varepsilon) [\sigma I(\sigma, \varepsilon)|_0^x - \int_0^x \sigma e^{(\sigma^2-1)/(2\varepsilon)} d\sigma] + c_2(\varepsilon)x + c_1(\varepsilon) = c_1(\varepsilon) + c_2(\varepsilon)x + c_3(\varepsilon) [xI(x, \varepsilon) - \varepsilon e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)} + \varepsilon e^{-1/(2\varepsilon)}]$ . Así, con un cambio en el valor de  $c_1(\varepsilon)$ ,

$$y(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon) + c_2(\varepsilon)x + c_3(\varepsilon) [xI(x, \varepsilon) - \varepsilon e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)}]. \quad (4.15)$$

Las condiciones de frontera dan el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & I(1) - \varepsilon \\ 1 & L & LI(L) - \varepsilon E \\ 0 & \varepsilon\alpha + \varepsilon\beta & \varepsilon\beta I(L) - \varepsilon\alpha I(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1(\varepsilon) \\ c_2(\varepsilon) \\ c_3(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix},$$

donde  $E$  (definida en (4.8)) depende de  $L$  y  $A, B, C, \alpha, \beta, I$  y  $L$  dependen de  $\varepsilon$ . Su determinante principal es  $\Delta = \varepsilon[I(L) + I(1)](\beta - \alpha L) + \varepsilon^2(\alpha + \beta)(E - 1)$ . De las estimaciones vistas en el Capítulo 2, se tienen  $I(1) = \varepsilon + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$  e  $I(L) = E[\varepsilon/L + \varepsilon^2/L^3 + O(\varepsilon^3)] = E[\varepsilon/L_0 + \varepsilon^2(1/L_0^3 - L_1/L_0^2) + O(\varepsilon^3)]$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Viene

$$\Delta = \varepsilon^2(L_0 + 1)L_0^{-1}(\beta_0 E - \alpha_0 L_0) + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^3 E) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

El numerador de  $c_1(\varepsilon)$  es  $\Delta c_1(\varepsilon) = [I(L) + I(1)](\varepsilon\beta B - \varepsilon\alpha LA - LC) + \varepsilon^2(\alpha + \beta)(AE - B) + \varepsilon C(E + L) = \varepsilon^2[(L_0 A_0 + B_0)L_0^{-1}(\beta_0 E - \alpha_0 L_0) - C_0 L_0^{-2}(E + L_0^3)] + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^3 E)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Resulta

$$c_1(\varepsilon) = \frac{L_0 A_0 + B_0}{L_0 + 1} - \frac{L_0^{-1}(L_0^3 + E)C_0}{(L_0 + 1)(\beta_0 E - \alpha_0 L_0)} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon E) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

lo cual coincide con la expresión de  $k_0$  vista en (4.10).

El numerador de  $c_2(\varepsilon)$  es  $\Delta c_2(\varepsilon) = \varepsilon[\beta I(L) - \alpha I(1)](B - A) + [I(1) - LI(L)]C + \varepsilon C(E - 1) = \varepsilon^2[(B_0 - A_0)L_0^{-1}(\beta_0 E - \alpha_0 L_0) + C_0 L_0^{-2}(L_0^2 - E)] + O(\varepsilon^3) + O(\varepsilon^3 E)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Resulta

$$c_2(\varepsilon) = \frac{B_0 - A_0}{L_0 + 1} + \frac{L_0^{-1}(L_0^2 - E)C_0}{(L_0 + 1)(\beta_0 E - \alpha_0 L_0)} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon E) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

lo cual coincide con la expresión de  $\bar{k}_0$  vista en (4.10).

El numerador de  $c_3(\varepsilon)$  es  $\Delta c_3(\varepsilon) = (L + 1)C + \varepsilon(\alpha + \beta)(A - B) = (L_0 + 1)C_0 + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Resulta

$$c_3(\varepsilon) = \frac{L_0 C_0}{\varepsilon^2(\beta_0 E - \alpha_0 L_0)} + O(\varepsilon^{-1}) + O(\varepsilon^{-1} E^{-1}) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

En la solución exacta (4.15), en virtud de la Proposición 2.3, el término que  $c_3(\varepsilon)$  multiplica es

$$\begin{aligned} xI(x, \varepsilon) - \varepsilon e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)} &= e^{(x^2-1)/(2\varepsilon)} \left[ \frac{\varepsilon^2}{x^2} + O\left(\frac{\varepsilon^3}{x^4}\right) \right], \text{ si } x \neq O(\sqrt{\varepsilon}) \\ &= \begin{cases} \varepsilon^2 e^{-(x+1)/\varepsilon} [1 + O(\varepsilon)], & \text{si } x = -1 + O(\varepsilon); \\ \varepsilon^2 L_0^{-2} E e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} [1 + O(\varepsilon)], & \text{si } x = L_0 + O(\varepsilon); \\ O(\varepsilon^n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, & \text{si } x \in (-1, L_0). \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, una aproximación asintótica uniforme es

$$y(x, \varepsilon) \sim c_1(\varepsilon) + c_2(\varepsilon)x + \frac{L_0 C_0}{\beta_0 E - \alpha_0 L_0} e^{-(x+1)/\varepsilon} + \frac{L_0^{-1} C_0 E}{\beta_0 E - \alpha_0 L_0} e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Como esto coincide con (4.11), todas las conclusiones están verificadas.

## 4.2 Ecuación de primer orden

El éxito del tratamiento en la sección anterior del p.v.f. de tercer orden que incluía en su planteamiento una condición de frontera mixta, invita a considerar un

p.v.f. de primer orden con la misma característica:

$$\begin{aligned} \varepsilon y' - x^m p(x)[y - A(\varepsilon)] &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ \alpha(\varepsilon)y(-1, \varepsilon) + \beta(\varepsilon)y(L(\varepsilon), \varepsilon) &= C(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $m$  es un número natural impar,  $p$  es una función suave tal que  $p(x) > 0$  para todo  $x \geq -1$  y se dan cinco funciones reales analíticas:  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  con  $L_0 > 0$ ,  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$ ,  $C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i$  con  $C_0 \neq 0$ ,  $\alpha(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \alpha_i$  con  $\alpha_0 \neq 0$  y  $\beta(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \beta_i$  con  $\beta_0 \neq 0$ .

Se empieza con la aplicación del método de expansiones asintóticas empatadas.

Al buscar primero una solución exterior  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), se constata que las ecuaciones  $-x^m p(x)(Y_0 - A_0) = 0$  y  $x^m p(x)(Y_{i+1} - A_{i+1}) = Y'_i = 0$  para  $i \in \mathbb{N}$  implican la solución constante  $Y(x, \varepsilon) \equiv A(\varepsilon)$ . Así, el problema (4.16) exhibe una resonancia inmediatamente determinada por el dato  $A(\varepsilon)$ ; sin embargo, la prosecución de la aplicación del método de expansiones asintóticas empatadas conduce a una indeterminación que hay que resolver de alguna manera.

Se examina la posibilidad de una capa de frontera en  $x = -1$  introduciendo el cambio de variables  $t = (x + 1)/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El término dominante,  $z_0 = z_0(t)$ , al satisfacer la e.d.o.  $\dot{z}_0 + p(-1)(z_0 - A_0) = 0$ , debe tener la forma  $z_0(t) = A_0 + a_0 \exp[-p(-1)t]$  para todo  $t \geq 0$ , donde  $a_0$  es una constante de integración. Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_0(t) = A_0 = Y_0(-1)$ , esta capa es factible por el momento.

Igualmente, se examina la posibilidad de una capa de frontera en  $x = L(\varepsilon)$  introduciendo el cambio de variables  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$ ,  $z(t, \varepsilon) = y(x, \varepsilon)$ . El término dominante,  $z_0 = z_0(t)$ , al satisfacer la e.d.o.  $\dot{z}_0 - L_0^m p(L_0)(z_0 - A_0) = 0$ , debe tener la forma  $z_0(t) = A_0 + b_0 \exp[L_0^m p(L_0)t]$  para todo  $t \leq 0$ , donde  $b_0$  es una constante de integración. Como  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z_0(t) = A_0 = Y_0(L(\varepsilon))$ , esta capa es factible por el momento.

La aproximación asintótica compuesta que resulta de todo lo anterior,

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + a_0 e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} + b_0 e^{L_0^m p(L_0)[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (4.17)$$

incluye las constantes  $a_0$  y  $b_0$  todavía indeterminadas; como  $y(-1, 0) = A_0 + a_0$  e  $y(L(\varepsilon), 0) = A_0 + b_0$ , deben satisfacer la condición de frontera límite

$$\alpha_0 a_0 + \beta_0 b_0 = C_0 - (\alpha_0 + \beta_0) A_0, \quad (4.18)$$

pero queda un grado de libertad.

Para resolver tal indeterminación, se va a agregar una segunda condición de frontera, derivándola de la e.d.o.

Al multiplicar la ecuación diferencial del problema (4.16) por  $\exp[-P(x)/\varepsilon]$ , donde  $P$  es la función no negativa (igual a la definida en la Sección 3.1) tal que

$$P(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^x s^m p(s) ds, \quad x \geq -1,$$

se obtiene una derivada exacta:  $\{\varepsilon[y - A(\varepsilon)]e^{-P(x)/\varepsilon}\}' = 0$ . Al integrar desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$ , viene  $\varepsilon[y(L(\varepsilon), \varepsilon) - A(\varepsilon)] \exp[-P(L(\varepsilon))/\varepsilon] = \varepsilon[y(-1, \varepsilon) - A(\varepsilon)] \exp[-P(-1)/\varepsilon]$ , de donde

$$y(L(\varepsilon), \varepsilon) - A(\varepsilon) = [y(-1, \varepsilon) - A(\varepsilon)]E(\varepsilon) \quad \text{con} \quad E(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left[\frac{P(L(\varepsilon)) - P(-1)}{\varepsilon}\right]. \quad (4.19)$$

Esta condición de frontera adicional provee la relación  $b_0 \sim a_0 E(\varepsilon)$  que, combinada con (4.18), permite determinar

$$a_0 \sim \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 + \beta_0 E(\varepsilon)} \quad \text{y} \quad b_0 \sim \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 E^{-1}(\varepsilon) + \beta_0} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \quad (4.20)$$

La estructura de la solución va a depender del orden de magnitud del factor  $E(\varepsilon)$  y del factor inverso, determinado por el signo de la diferencia  $P(L_0) - P(-1)$ ;

es decir, el signo de la integral  $\int_{-1}^{L_0} s^m p(s) ds$ . Se usará el número  $\widehat{L} \in (0, \infty]$  definido en el Lema 3.1 ( $\int_{-1}^{\widehat{L}} s^m p(s) ds = 0$  si existe tal real positivo).

Si  $L_0 < \widehat{L}$ , resultan  $E(\varepsilon) \ll 1$  y  $E^{-1}(\varepsilon) \gg 1$ ; luego  $a_0 = [C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0]/\alpha_0$  y  $b_0 = 0$ . La solución del p.v.f. (4.16), al admitir la aproximación asintótica uniforme

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0} e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (4.21)$$

presenta una sola capa de frontera, a la izquierda en  $x = -1$ .

Si  $L_0 > \widehat{L}$ , resultan  $E(\varepsilon) \gg 1$  y  $E^{-1}(\varepsilon) \ll 1$ ; luego  $a_0 = 0$  y  $b_0 = [C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0]/\beta_0$ . La solución del p.v.f. (4.16), al admitir la aproximación asintótica uniforme

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\beta_0} e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (4.22)$$

presenta una sola capa de frontera, a la derecha en  $x = L(\varepsilon)$ .

Si  $L_0 = \widehat{L}$ , resulta  $E(\varepsilon) = \exp[\frac{1}{\varepsilon} \int_{L_0}^{L_0 + \varepsilon L_1 + \dots} s^m p(s) ds] = E_0 + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , con  $E_0 \stackrel{\text{def}}{=} \exp[L_0^m p(L_0)L_1]$ ; al respecto, se asumirá genéricamente  $\alpha_0 + \beta_0 E_0 \neq 0$ . Luego  $a_0 = [C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0]/(\alpha_0 + \beta_0 E_0)$  y  $b_0 = [C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0]/(\alpha_0 E_0^{-1} + \beta_0)$ . La solución del p.v.f. (4.16), al admitir la aproximación asintótica uniforme

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) \sim A_0 + \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 + \beta_0 e^{L_0^m p(L_0)L_1}} e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \\ + \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 e^{-L_0^m p(L_0)L_1} + \beta_0} e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned} \quad (4.23)$$

presenta capas de frontera en los dos extremos del dominio. Se observa que si  $L_1$  tiende al infinito, el valor inicial límite  $y(-1, 0)$  tiende a  $A_0$  eliminando la capa de frontera izquierda, mientras que si  $L_1$  tiende a menos infinito, el valor terminal límite  $y(L(\varepsilon), 0)$  tiende a  $A_0$  eliminando la capa de frontera derecha.



Para poder verificar estos resultados de aproximación asintótica, se va a determinar la solución exacta del p.v.f. (4.16).

Al usar el factor integrante  $\exp\left[\frac{P(-1)-P(x)}{\varepsilon}\right]$  en la e.d.o. del problema (4.16), se obtiene su solución general

$$y(x, \varepsilon) = A(\varepsilon) + c(\varepsilon) e^{[P(x) - P(-1)]/\varepsilon},$$

cuya constante de integración  $c(\varepsilon)$  debe satisfacer la condición de frontera en (4.16); es decir,  $\alpha(\varepsilon)[A(\varepsilon) + c(\varepsilon)] + \beta(\varepsilon)[A(\varepsilon) + c(\varepsilon)E(\varepsilon)] = C(\varepsilon)$ , en virtud de la definición de  $E(\varepsilon)$  en (4.19). Así, la solución exacta del p.v.f. (4.16) es

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= A(\varepsilon) + \frac{C(\varepsilon) - [\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)]A(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)E(\varepsilon)} \exp\left[\frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon}\right] \\ &= A(\varepsilon) + \frac{C(\varepsilon) - [\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)]A(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)E^{-1}(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)} \exp\left[\frac{P(x) - P(L(\varepsilon))}{\varepsilon}\right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Tomando en cuenta el orden de magnitud de  $E(\varepsilon)$  que depende del signo de la diferencia  $P(L_0) - P(-1)$ , se obtiene análogamente a los cálculos anteriores

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + \begin{cases} \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0} e^{\frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 < \widehat{L} \\ \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 + \beta_0 E_0} e^{\frac{P(x) - P(-1)}{\varepsilon}} = \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 E_0^{-1} + \beta_0} e^{\frac{P(x) - P(L(\varepsilon))}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 = \widehat{L} \\ \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\beta_0} e^{\frac{P(x) - P(L(\varepsilon))}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 > \widehat{L}, \end{cases} \quad (4.25)$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Los exponentes se van a simplificar distinguiendo varios rangos de valores para  $x$ .

**Lema 4.1.** *Si  $x \geq -1$  con  $x + 1 = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces*

$$e^{[P(x) - P(-1)]/\varepsilon} \sim e^{-p(-1)(x+1)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.**  $P(x) - P(-1) = P'(-1)(x+1) + O((x+1)^2) = -p(-1)(x+1) + O(\varepsilon^2)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

**Lema 4.2.** Si  $-1 < x \leq 0$  con  $x + 1 \neq O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces

$$e^{[P(x) - P(-1)]/\varepsilon} \sim 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.** Dado cualquier número  $M > 0$  independiente de  $\varepsilon$  y de  $x$ , se tiene  $-1 + M\varepsilon < x \leq 0$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Como  $P$  es decreciente en el intervalo  $[-1, 0]$ , se tiene  $P(x) < P(-1 + M\varepsilon) = P(-1) - p(-1)M\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . Luego  $[P(x) - P(-1)]/\varepsilon < -p(-1)M + O(\varepsilon) < -p(-1)M/2$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. La conclusión sigue.  $\square$

**Lema 4.3.** Si  $0 < x \leq L(\varepsilon)$  cuando  $L_0 < \widehat{L}$ , entonces

$$e^{[P(x) - P(-1)]/\varepsilon} \sim 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.** Como  $P$  es creciente en el intervalo  $[0, L(\varepsilon)]$ , se tiene  $P(x) - P(-1) < P(L(\varepsilon)) - P(-1) < [P(L_0) - P(-1)]/2$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño ( $L_0 < \widehat{L}$  significa  $P(L_0) - P(-1) < 0$ ). Luego,  $e^{[P(x) - P(-1)]/\varepsilon} = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , porque tiende a cero más rápido que  $e^{[P(L_0) - P(-1)]/(2\varepsilon)}$ .  $\square$

**Lema 4.4.** Si  $x \leq L(\varepsilon)$  con  $L(\varepsilon) - x = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces

$$e^{[P(x) - P(L(\varepsilon))]/\varepsilon} \sim e^{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.**  $P(x) - P(L(\varepsilon)) = P'(L(\varepsilon))[x - L(\varepsilon)] + O([x - L(\varepsilon)]^2) = [P'(L_0) + O(\varepsilon)][x - L(\varepsilon)] + O(\varepsilon^2) = L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .  $\square$

**Lema 4.5.** Si  $0 \leq x < L(\varepsilon)$  con  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , entonces

$$e^{[P(x) - P(L(\varepsilon))]/\varepsilon} \sim 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.** Dado cualquier número  $M > 0$  independiente de  $\varepsilon$  y de  $x$ , se tiene  $0 \leq x < L(\varepsilon) - M\varepsilon$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. Como  $P$  es

creciente en el intervalo  $[0, L(\varepsilon)]$ , se tiene  $P(x) < P(L(\varepsilon) - M\varepsilon) = P(L(\varepsilon)) - P'(L(\varepsilon))M\varepsilon + O(\varepsilon^2) = P(L(\varepsilon)) - L_0^m p(L_0)M\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . Luego  $[P(x) - P(L(\varepsilon))]/\varepsilon < -L_0^m p(L_0)M + O(\varepsilon) < -L_0^m p(L_0)M/2$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. La conclusión sigue.  $\square$

**Lema 4.6.** *Si  $-1 \leq x < 0$  cuando  $L_0 > \widehat{L}$ , entonces*

$$e^{[P(x) - P(L(\varepsilon))]/\varepsilon} \sim 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Demostración.** Como  $P$  es decreciente en el intervalo  $[-1, 0]$ , se tiene  $P(x) - P(L(\varepsilon)) < P(-1) - P(L(\varepsilon)) < [P(-1) - P(L_0)]/2$  para todo  $\varepsilon$  suficientemente pequeño ( $L_0 > \widehat{L}$  significa  $P(-1) - P(L_0) < 0$ ). Por lo tanto,  $\exp\{[P(x) - P(L(\varepsilon))]/\varepsilon\} = o(\varepsilon^n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , porque tiende a cero más rápido que  $\exp\{[P(-1) - P(L_0)]/(2\varepsilon)\}$ .  $\square$

Estos lemas permiten simplificar la aproximación asintótica uniforme (4.25):

**Proposición 4.7.** *La solución exacta del p.v.f. (4.16) admite como aproximación uniformemente válida cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$*

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + \begin{cases} \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0} e^{\frac{-p(-1)(x+1)}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 < \widehat{L}, \\ \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 + \beta_0 E_0} e^{\frac{-p(-1)(x+1)}{\varepsilon}} + \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\alpha_0 E_0^{-1} + \beta_0} e^{\frac{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 = \widehat{L}, \\ \frac{C_0 - (\alpha_0 + \beta_0)A_0}{\beta_0} e^{\frac{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 > \widehat{L}. \end{cases} \quad (4.26)$$

**Demostración.** Se parte de las estimaciones (4.25). Para  $x + 1 \neq O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , se tiene  $\exp[-p(-1)(x + 1)/\varepsilon] \sim 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ); luego los Lemas 4.1, 4.2 y 4.3 demuestran el caso  $L_0 < \widehat{L}$ . Para  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , se tiene  $\exp\{L_0^m p(L_0)[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon\} \sim 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ); luego los Lemas 4.4, 4.5 y 4.6 demuestran el caso  $L_0 > \widehat{L}$ . Finalmente, tomando en cuenta lo ya mencionado para  $x + 1 \neq O(\varepsilon)$  y para  $L(\varepsilon) - x \neq O(\varepsilon)$ , los Lemas 4.1 y 4.2 demuestran el caso  $L_0 = \widehat{L}$  para  $x \in [-1, 0]$  y los Lemas 4.4 y 4.5 lo demuestran para  $x \in [0, L(\varepsilon)]$ .  $\square$

La Proposición 4.7 avala precisamente los resultados anteriores de aproximación directa.

Se presenta ahora una ilustración de lo analizado en esta sección con un ejemplo particular.

**Ejemplo 4.1.** El p.v.f.

$$\begin{aligned} \varepsilon y' - (0,06x^3 - 0,24x^2 + 0,33x)\left(y + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) + y(L(\varepsilon), \varepsilon) &= 1, & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned}$$

es del tipo estudiado en esta sección, con  $m = 1$ ,  $A(\varepsilon) = -1/(1 - \varepsilon)$  y  $\alpha(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) = C(\varepsilon) \equiv 1$ , porque el trinomio de segundo grado  $p(x) = 0,06x^2 - 0,24x + 0,33 = 0,06(x - 2)^2 + 0,09$  es positivo para todo  $x$ . Se tiene  $P(2) - P(-1) = \int_{-1}^2 (0,06s^3 - 0,24s^2 + 0,33s) ds = 0,015s^4 - 0,08s^3 + 0,165s^2 \Big|_{-1}^2 = 0,26 - 0,26 = 0$ . Así,  $\widehat{L} = 2$ . Luego, hay dos capas de frontera si  $L(\varepsilon) = 2 + O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , y una sola en caso contrario. Es lo que muestra la Figura 4.1 (página siguiente), con la solución exacta y su aproximación asintótica uniforme al orden uno para varios valores representativos de  $L(\varepsilon)$ .

### 4.3 Sistema de dos ecuaciones

Se va a considerar el p.v.f.

$$\begin{aligned} \varepsilon u'' - xu' + qv &= 0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \varepsilon v'' - xv' + qu &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ u(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & u(L(\varepsilon), \varepsilon) &= B(\varepsilon), \\ v(-1, \varepsilon) &= C(\varepsilon), & v(L(\varepsilon), \varepsilon) &= D(\varepsilon), \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde son dados el número natural  $q$  y las cinco funciones reales analíticas  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$  con  $A_0 \neq 0$ ,  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  con  $B_0 \neq 0$ ,  $C(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i C_i$  con  $C_0 \neq 0$ ,  $D(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i D_i$  con  $D_0 \neq 0$  y  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  con  $L_0 > 0$ .

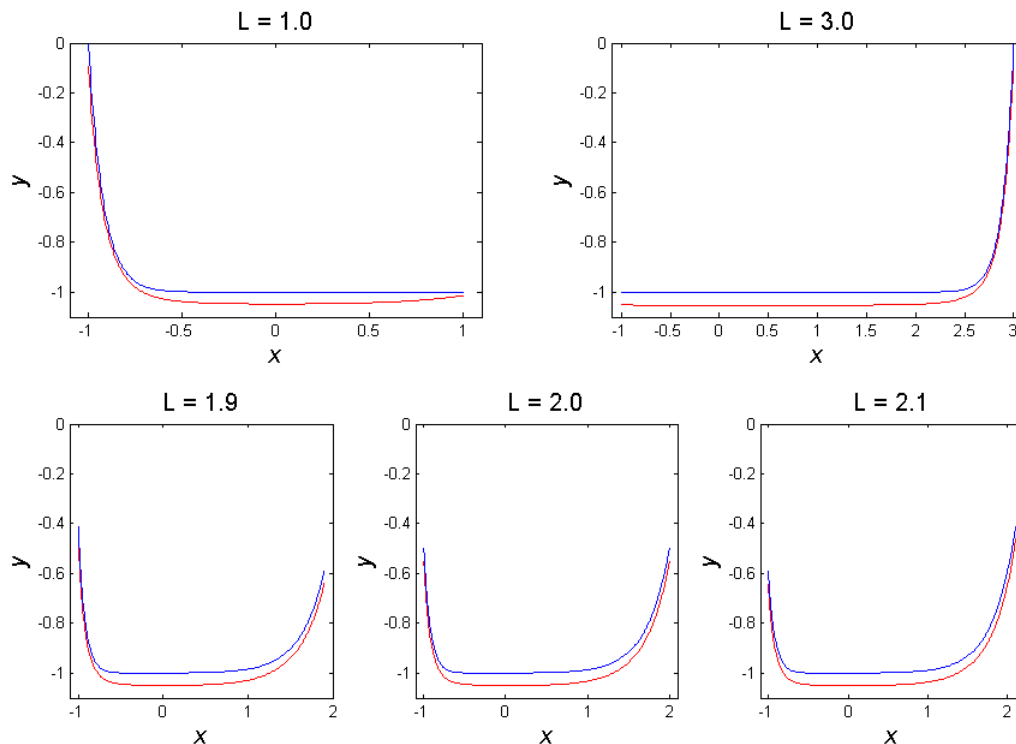


Figura 4.1: Solución (en rojo) y aproximación (en azul) para el Ejemplo 4.1 en los casos  $L(\varepsilon) = 1 < \hat{L}$ ,  $L(\varepsilon) = 3 > \hat{L}$  y  $L(\varepsilon) \simeq 2 = \hat{L}$ . Se usó el valor  $\varepsilon = 0,05$ .

Una solución exterior  $(U, V)(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (U_i, V_i)(x)$  debe satisfacer

$$\begin{aligned} -xU'_0 + qV_0 = 0 & \quad \text{y} \quad -xU'_{i+1} + qV_{i+1} = -U''_i & \text{para todo } i \geq 0. \\ -xV'_0 + qU_0 = 0 & \quad -xV'_{i+1} + qU_{i+1} = -V''_i \end{aligned}$$

La solución general para el término dominante  $(U_0, V_0)$  sería  $U_0(x) = k_0x^q + \bar{k}_0x^{-q}$ ,  $V_0(x) = k_0x^q - \bar{k}_0x^{-q}$ , pero la regularidad buscada impone  $\bar{k}_0 = 0$  y por lo tanto  $U_0(x) = k_0x^q = V_0(x)$  para todo  $x \in (-1, L(\varepsilon))$ . De igual manera, se obtiene  $U_{i+1} \equiv V_{i+1}$  para todo  $i \geq 0$ , resultando

$$U(x, \varepsilon) = V(x, \varepsilon) = k(\varepsilon)h(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i h(x, \varepsilon),$$

donde  $h$  es la función polinomial introducida en el Lema 3.16, cuya definición con-

vencional es  $h(x, \varepsilon) = (\varepsilon/2)^{q/2} H_q(x/\sqrt{2\varepsilon})$ .

Considerando una capa de frontera en el borde izquierdo con la variable local  $t = (x + 1)/\varepsilon$ , una solución interior  $(u, v)(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i, v_i)(t)$  debe satisfacer  $\ddot{u} + (1 - \varepsilon t)\dot{u} + \varepsilon qv = 0$ ,  $\ddot{v} + (1 - \varepsilon t)\dot{v} + \varepsilon qu = 0$ ,  $(u, v)(0, \varepsilon) = (A, C)(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u, v)(t, \varepsilon) = (k(\varepsilon), k(\varepsilon))h(-1, \varepsilon)$ . En particular, su término dominante está determinado por el sistema desacoplado

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 + \dot{u}_0 &= 0, & u_0(0) &= A_0, & u_0(\infty) &= k_0(-1)^q \\ \ddot{v}_0 + \dot{v}_0 &= 0, & v_0(0) &= C_0, & v_0(\infty) &= k_0(-1)^q \end{aligned}$$

y resulta

$$\begin{aligned} u_0(t) &= k_0(-1)^q + [A_0 - k_0(-1)^q]e^{-t}, \\ v_0(t) &= k_0(-1)^q + [C_0 - k_0(-1)^q]e^{-t}, \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

En particular,  $\dot{u}_0(0) = k_0(-1)^q - A_0$  y  $\dot{v}_0(0) = k_0(-1)^q - C_0$ .

Considerando una capa de frontera en el borde derecho con la variable local  $t = [x - L(\varepsilon)]/\varepsilon$ , una solución interior  $(u, v)(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (u_i, v_i)(t)$  debe satisfacer  $\ddot{u} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]\dot{u} + \varepsilon qv = 0$ ,  $\ddot{v} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]\dot{v} + \varepsilon qu = 0$ ,  $(u, v)(0, \varepsilon) = (B, D)(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (u, v)(t, \varepsilon) = (k(\varepsilon), k(\varepsilon))h(L(\varepsilon), \varepsilon)$ . En particular, su término dominante está determinado por el sistema desacoplado

$$\begin{aligned} \ddot{u}_0 - L_0 \dot{u}_0 &= 0, & u_0(0) &= B_0, & u_0(-\infty) &= k_0 L_0^q \\ \ddot{v}_0 - L_0 \dot{v}_0 &= 0, & v_0(0) &= D_0, & v_0(-\infty) &= k_0 L_0^q \end{aligned}$$

y resulta

$$\begin{aligned} u_0(t) &= k_0 L_0^q + (B_0 - k_0 L_0^q)e^{L_0 t}, \\ v_0(t) &= k_0 L_0^q + (D_0 - k_0 L_0^q)e^{L_0 t}, \quad t \in (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

En particular,  $\dot{u}_0(0) = L_0(B_0 - k_0 L_0^q)$  y  $\dot{v}_0(0) = L_0(D_0 - k_0 L_0^q)$ .

Se está así obteniendo el *ansatz* de aproximación asintótica compuesta cuando

$\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &\sim k_0 x^q + [A_0 - k_0(-1)^q]e^{-(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - k_0 L_0^q)e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}, \\ v(x, \varepsilon) &\sim k_0 x^q + [B_0 - k_0(-1)^q]e^{-(x+1)/\varepsilon} + (D_0 - k_0 L_0^q)e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde la amplitud  $k_0$  de la resonancia está todavía indeterminada.

Ahora para derivar una condición de frontera adicional a partir del sistema (4.27), se hace  $u(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon)\widehat{u}(x, \varepsilon)$  en la primera ecuación, así como  $v(x, \varepsilon) = h(x, \varepsilon)\widehat{v}(x, \varepsilon)$  en la segunda, y se suman los resultados. Tomando en cuenta que  $h$  satisface la ecuación de Hermite singularmente perturbada, se obtiene  $\varepsilon h(\widehat{u}'' + \widehat{v}'') + (2\varepsilon h' - xh)(\widehat{u}' + \widehat{v}') = 0$ . Al multiplicar por el factor no nulo  $h(x, \varepsilon) \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)$ , viene  $[\varepsilon h^2(\widehat{u}' + \widehat{v}') \exp\left(\frac{-x^2}{2\varepsilon}\right)]' = 0$ , lo cual integrado desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$  da  $\varepsilon h^2(L(\varepsilon), \varepsilon)(\widehat{u}' + \widehat{v}')(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = \varepsilon h^2(-1, \varepsilon)(\widehat{u}' + \widehat{v}')(-1, \varepsilon) \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ , de donde  $\{h(L(\varepsilon), \varepsilon)[\varepsilon u'(L(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon v'(L(\varepsilon), \varepsilon)] - \varepsilon h'(L(\varepsilon), \varepsilon)[u(L(\varepsilon), \varepsilon) + v(L(\varepsilon), \varepsilon)]\} \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = \{h(-1, \varepsilon)[\varepsilon u'(-1, \varepsilon) + \varepsilon v'(-1, \varepsilon)] - \varepsilon h'(-1, \varepsilon)[u(-1, \varepsilon) + v(-1, \varepsilon)]\} \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right)$ .

Insertando las derivadas de las funciones interiores, resulta

$$\begin{aligned} [L_0^{q+1}(B_0 + D_0 - 2k_0 L_0^q) + O(\varepsilon)] \exp\left[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}\right] = \\ [2k_0 - (A_0 + C_0)(-1)^q + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{-1}{2\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Se obtiene como amplitud de resonancia al orden uno

$$k_0 = \begin{cases} \frac{B_0 + D_0}{2} L_0^{-q} & \text{si } L_0 < 1, \\ \frac{(A_0 + C_0)(-1)^q + (B_0 + D_0)e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} & \text{si } L_0 = 1, \\ \frac{A_0 + C_0}{2} (-1)^q & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

En particular, suponiendo genéricamente  $(A_0 - C_0)(B_0 - D_0) \neq 0$ , esto implica que

las dos componentes, aunque ambas resonantes, tienen capas de frontera en ambos extremos del dominio, cualquiera que sea la frontera derecha  $L(\varepsilon) > 0$ .

Efectivamente, la aproximación asintótica uniforme (4.28) queda determinada como

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &\sim \left(\frac{B_0+D_0}{2}\right)\left(\frac{x}{L_0}\right)^q + \left[A_0 - \left(\frac{B_0+D_0}{2}\right)\left(\frac{-1}{L_0}\right)^q\right]e^{-(x+1)/\varepsilon} + \left(\frac{B_0-D_0}{2}\right)e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \\ v(x, \varepsilon) &\sim \left(\frac{B_0+D_0}{2}\right)\left(\frac{x}{L_0}\right)^q + \left[C_0 - \left(\frac{B_0+D_0}{2}\right)\left(\frac{-1}{L_0}\right)^q\right]e^{-(x+1)/\varepsilon} + \left(\frac{D_0-B_0}{2}\right)e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \end{aligned}$$

si  $L_0 < 1$ , y como

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &\sim \left(\frac{A_0+C_0}{2}\right)(-x)^q + \left(\frac{A_0-C_0}{2}\right)e^{-(x+1)/\varepsilon} + \left[B_0 - \left(\frac{A_0+C_0}{2}\right)(-L_0)^q\right]e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \\ v(x, \varepsilon) &\sim \left(\frac{A_0+C_0}{2}\right)(-x)^q + \left(\frac{C_0-A_0}{2}\right)e^{-(x+1)/\varepsilon} + \left[D_0 - \left(\frac{A_0+C_0}{2}\right)(-L_0)^q\right]e^{L_0[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \end{aligned}$$

si  $L_0 > 1$ .

Finalmente, cuando  $L_0 = 1$ , se tiene para la primera componente

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &\sim \frac{(A_0 + C_0)(-1)^q + (B_0 + D_0)e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} x^q \\ &\quad + \frac{A_0(1 + 2e^{-L_1}) - C_0 - (B_0 + D_0)(-1)^q e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ &\quad + \frac{B_0(2 + e^{-L_1}) - (A_0 + C_0)(-1)^q - D_0 e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

y para la segunda componente

$$\begin{aligned} v(x, \varepsilon) &\sim \frac{(A_0 + C_0)(-1)^q + (B_0 + D_0)e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} x^q \\ &\quad + \frac{C_0(1 + 2e^{-L_1}) - A_0 - (B_0 + D_0)(-1)^q e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} e^{-(x+1)/\varepsilon} \\ &\quad + \frac{D_0(2 + e^{-L_1}) - (A_0 + C_0)(-1)^q - B_0 e^{-L_1}}{2(1 + e^{-L_1})} e^{[x-L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+). \end{aligned}$$

Para verificar los resultados anteriores, se puede transformar el sistema (4.27) en otro desacoplado mediante el cambio de variables dependientes  $y = u + v$ ,  $z =$



$u - v$ . Se sigue que  $y$  satisface la ecuación de Hermite singularmente perturbada con coeficiente  $q \in \mathbb{N}$ , por lo tanto resonante, y  $z$  satisface la con coeficiente  $-q$  y por lo tanto no resonante (apartando el caso  $q = 0$  para el cual hay desacoplamiento en las ecuaciones originales). Luego  $y$  tiene como aproximación asintótica uniforme la dada en las Proposiciones 3.13, 3.14 y 3.15, reemplazando  $A_0$  por  $A_0 + C_0$  y  $B_0$  por  $B_0 + D_0$ , mientras que para  $z$  se cumple independientemente del valor de  $L_0$ :

$$z(x, \varepsilon) \sim (A_0 - C_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} + (B_0 - D_0)e^{L_0[x - L(\varepsilon)]/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Al hacer  $u = (y + z)/2$  y  $v = (y - z)/2$ , hay coincidencia perfecta para las aproximaciones asintóticas obtenidas en los tres casos.

#### 4.4 Ecuación no lineal

Se va a considerar el p.v.f.

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - xy'^{3/2} &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde las funciones reales analíticas  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$ ,  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  y  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  son tales que  $A_0 < B_0$  y  $L_0 > 0$ .

Se observa que por la presencia del término  $y'^{3/2}$ , la solución es monótona creciente (por eso se impone  $A_0 < B_0$ ) y que el problema es entonces “equivalente” a su inverso, de incógnita  $x = x(y, \varepsilon)$  (ver Bohé [10]). Un par de capas de frontera en los extremos para el p.v.f. (4.29) corresponde a una capa de transición en el interior del dominio  $[A(\varepsilon), B(\varepsilon)]$  para el problema inverso y una sola capa en un extremo corresponde a una capa en el extremo del otro lado.

Una solución exterior  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  ha de satisfacer  $xY_0'^{3/2} = 0$  y

$xY_{i+1}'^{3/2} = Y_i'' = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ ; es pues constante:

$$Y(x, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $k_0 \in [A_0, B_0]$ .

Para revelar alguna capa de frontera en el extremo izquierdo, el cambio de variables

$$t = \frac{x+1}{\varepsilon^2}, \quad y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$$

transforma el problema en el p.v.f. local  $\ddot{z} + (1 - \varepsilon^2 t)\dot{z}^{3/2} = 0$ ,  $z(0, \varepsilon) = A(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, \varepsilon) = k(\varepsilon)$ , con solución dominante  $z_0 = z_0(t)$  tal que  $\ddot{z}_0 + \dot{z}_0^{3/2} = 0$ ,  $z_0(0) = A_0$ ,  $z_0(\infty) = k_0$ ; es decir,

$$z_0(t) = k_0 - \left( \frac{1}{k_0 - A_0} + \frac{t}{4} \right)^{-1} \quad t \in [0, \infty).$$

Se trata entonces de un crecimiento simplemente hiperbólico, en lugar del usual exponencial en los problemas lineales. Se tiene, en particular,  $\dot{z}_0(0) = (k_0 - A_0)^2/4$ .

Para revelar alguna capa de frontera en el extremo derecho, el cambio de variables

$$t = \frac{x - L(\varepsilon)}{\varepsilon^2}, \quad y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t)$$

transforma el problema en el p.v.f. local  $\ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon^2 t]\dot{z}^{3/2} = 0$ ,  $z(0, \varepsilon) = B(\varepsilon)$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} z(t, \varepsilon) = k(\varepsilon)$ , con solución dominante  $z_0 = z_0(t)$  tal que  $\ddot{z}_0 - L_0 \dot{z}_0^{3/2} = 0$ ,  $z_0(0) = B_0$ ,  $z_0(-\infty) = k_0$ ; es decir,

$$z_0(t) = k_0 + \left( \frac{1}{B_0 - k_0} - \frac{L_0^2 t}{4} \right)^{-1} \quad t \in (-\infty, 0];$$

se tiene, en particular,  $\dot{z}_0(0) = L_0^2(B_0 - k_0)^2/4$ .

La aproximación asintótica compuesta resultando de todo lo anterior tiene la

forma

$$y(x, \varepsilon) \sim k_0 - \left( \frac{1}{k_0 - A_0} + \frac{x + 1}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + \left( \frac{1}{B_0 - k_0} + \frac{L_0^2[L(\varepsilon) - x]}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+);$$

depende de la amplitud de resonancia  $k_0$  todavía indeterminada.

Para derivar una condición de frontera adicional, se divide la e.d.o. en (4.29) por  $-2\varepsilon^2 y'^{3/2}$  para obtener la forma resoluble por cuadratura  $\left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 y'}} \right)' = \frac{-x}{2\varepsilon^2}$ . Al integrar desde  $x = -1$  hasta  $x = L(\varepsilon)$ , se obtiene  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 y'(L(\varepsilon), \varepsilon)}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 y'(-1, \varepsilon)}} = \frac{1 - L^2(\varepsilon)}{4\varepsilon^2}$ , y al usar las derivadas de las soluciones interiores dominantes, resulta

$$\frac{2}{L_0(B_0 - k_0)} - \frac{2}{k_0 - A_0} \sim \frac{1 - L^2(\varepsilon)}{4\varepsilon^2} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

**Lema 4.8.** *La amplitud de resonancia, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , tiene valor al orden uno dado por*

$$k_0 = \begin{cases} B_0 & \text{si } L_0 < 1 \text{ o si } L_0 = 1, L_1 < 0; \\ A_0 & \text{si } L_0 > 1 \text{ o si } L_0 = 1, L_1 > 0; \\ \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{L_2(B_0 - A_0)^2}{16\nu(A_0, B_0, L_2)} & \text{si } L(\varepsilon) \sim 1 + \varepsilon^2 L_2, \end{cases}$$

donde  $\nu(A_0, B_0, L_2) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sqrt{1 + L_2^2(B_0 - A_0)^2/64}$ .

**Demostración.** Si  $L_0 \neq 1$ , la condición es  $\frac{1}{L_0(B_0 - k_0)} - \frac{1}{k_0 - A_0} \sim \frac{1 - L_0^2}{8\varepsilon^2}$ . Luego, tomando en cuenta la diferencia entre  $\infty$  y  $-\infty$ , se deduce que  $k_0 = B_0$  si  $L_0 < 1$  mientras que  $k_0 = A_0$  si  $L_0 > 1$ .

Si  $L_0 = 1$  y  $L_1 \neq 0$ , la condición es  $\frac{1}{B_0 - k_0} - \frac{1}{k_0 - A_0} \sim \frac{-L_1}{4\varepsilon}$ . Tomando de nuevo en cuenta la diferencia entre  $\infty$  y  $-\infty$ , se deduce que  $k_0 = B_0$  si  $L_1 < 0$  mientras que  $k_0 = A_0$  si  $L_1 > 0$ .

Si  $L_0 = 1$  y  $L_1 = 0$ , la condición es  $\frac{1}{B_0 - k_0} - \frac{1}{k_0 - A_0} = -\frac{L_2}{4}$ . La consideración de la variable trasladada  $X \stackrel{\text{def}}{=} k_0 - (A_0 + B_0)/2$  conduce a la ecuación cuadrática  $4L_2X^2 - 32X - L_2(B_0 - A_0)^2 = 0$ . La solución particular  $X = 4\nu(A_0, B_0, L_2)/L_2$

es incorrecta en el caso  $L_2 > 0$  porque se tendría  $B_0 - k_0 = 4[L_2(B_0 - A_0)/8 - \nu(A_0, B_0, L_2)]/L_2 < 0$  cuando haya de ser  $k_0 \leq B_0$  y es incorrecta también en el caso  $L_2 < 0$  porque se tendría  $k_0 - A_0 = 4[|L_2|(B_0 - A_0)/8 - \nu(A_0, B_0, L_2)]/|L_2| < 0$  cuando haya de ser  $A_0 \leq k_0$ . Así, cuando  $L_2 \neq 0$ , se tiene la otra solución particular  $X = 4[1 - \sqrt{1 + L_2^2(B_0 - A_0)^2/64}]/L_2$ . Al utilizar la cantidad conjugada, se obtiene  $X = -L_2(B_0 - A_0)^2[16\nu(A_0, B_0, L_2)]^{-1}$ , expresión que abarca también el caso  $L_2 = 0$  para el cual  $X = 0$ .  $\square$

Se pueden enunciar tres proposiciones ahora.

**Proposición 4.9.** *Si  $L_0 < 1$ , o si  $L_0 = 1$  con  $L_1 < 0$ , la solución del p.v.f. (4.29) se representa uniformemente por la aproximación asintótica*

$$y(x, \varepsilon) \sim B_0 - \left( \frac{1}{B_0 - A_0} + \frac{x + 1}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

*Muestra una sola capa de frontera, a la izquierda, y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor al orden uno impuesto en la frontera derecha.*

**Proposición 4.10.** *Si  $L_0 > 1$ , o si  $L_0 = 1$  con  $L_1 > 0$ , la solución del p.v.f. (4.29) se representa uniformemente por la aproximación asintótica*

$$y(x, \varepsilon) \sim A_0 + \left( \frac{1}{B_0 - A_0} + \frac{L_0^2[L(\varepsilon) - x]}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

*Muestra una sola capa de frontera, a la derecha, y fuera de ella es aproximadamente constante, con el valor al orden uno impuesto en la frontera izquierda.*

Algunos cálculos son útiles antes de enunciar la tercera proposición. Denotando  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} L_2(B_0 - A_0)/8$ , se tiene  $\frac{k_0 - A_0}{B_0 - A_0} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{\nu} \right) = \frac{\nu^2 - \lambda^2}{2\nu(\nu + \lambda)} = \frac{1}{\nu + \lambda}$ ; por lo tanto  $(k_0 - A_0)^{-1} = \frac{\nu}{B_0 - A_0} + \frac{L_2}{8}$ . Luego, como  $(B_0 - k_0)^{-1} - (k_0 - A_0)^{-1} = -L_2/4$  entonces  $(B_0 - k_0)^{-1} = \frac{\nu}{B_0 - A_0} - \frac{L_2}{8}$ .

**Proposición 4.11.** *Si  $L_0 = 1$  y  $L_1 = 0$ , la solución del p.v.f. (4.29) se representa*

uniformemente por la aproximación asintótica

$$y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{L_2(B_0 - A_0)^2}{16\nu} - \left( \frac{\nu}{B_0 - A_0} + \frac{L_2}{8} + \frac{x+1}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} \\ + \left( \frac{\nu}{B_0 - A_0} - \frac{L_2}{8} + \frac{L_0^2[L(\varepsilon) - x]}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $\nu = \nu(A_0, B_0, L_2)$  se definió en el Lema 4.8. Muestra capas de frontera en ambos extremos del dominio y fuera de ellas es aproximadamente constante, con un valor al orden uno que tiende a  $B_0$  cuando  $L_2 \rightarrow -\infty$  y a  $A_0$  cuando  $L_2 \rightarrow \infty$  mientras que es el promedio aritmético de las condiciones de frontera cuando el dominio sea más simétrico con  $L_2 = 0$ .

Para establecer la veracidad de las tres proposiciones, se va a resolver el p.v.f. (4.29) en forma exacta y se va a estimar asintóticamente la expresión paramétrica resultante. Primero se divide la e.d.o. en (4.29) por  $-2\varepsilon y'^{3/2}$  (ya que la derivada no puede anularse) para obtener la forma resoluble por cuadratura  $\left( \frac{1}{\sqrt{y'}} \right)' = \frac{-x}{4\varepsilon}$ . Al integrar, se introduce una constante de integración, necesariamente positiva, que se denotará  $c^2(\varepsilon)$  y se escoge  $c(\varepsilon) > 0$  sin pérdida de generalidad:  $\frac{1}{\sqrt{y'}} = \frac{c^2(\varepsilon) - x^2}{4\varepsilon}$ ; esto equivale a  $y' = \frac{16\varepsilon^2}{[c^2(\varepsilon) - x^2]^2}$ , lo cual integrado desde  $x = -1$  produce

$$y(x, \varepsilon) = A(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left[ \frac{1}{c-x} - \frac{1}{c+x} + \frac{1}{c-1} - \frac{1}{c+1} \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \ln \left| \frac{(c+1)(c+x)}{(c-1)(c-x)} \right| \right], \quad (4.30)$$

donde la dependencia de la constante  $c$  respecto del parámetro  $\varepsilon$  no se indica a partir de ahora para recortar las escrituras. La segunda condición de frontera

$y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon)$  impone una ecuación que determina la constante  $c(\varepsilon)$ :

$$c^2[B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] = 4\varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{c - L(\varepsilon)} - \frac{1}{c + L(\varepsilon)} + \frac{1}{c - 1} - \frac{1}{c + 1} + \frac{1}{c} \left| \frac{(c + 1)[c + L(\varepsilon)]}{(c - 1)[c - L(\varepsilon)]} \right| \right\}. \quad (4.31)$$

La resolución asintótica de esta ecuación (por el método de coeficientes indeterminados) da lugar al lema siguiente.

**Lema 4.12.** *Se cumple cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$*

$$c(\varepsilon) = \begin{cases} 1 + \frac{4\varepsilon^2}{B_0 - A_0} + O(\varepsilon^3) & \text{si } L_0 < 1 \text{ o si } L_0 = 1, L_1 < 0; \\ L(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{L_0^2(B_0 - A_0)} + O(\varepsilon^3) & \text{si } L_0 > 1 \text{ o si } L_0 = 1, L_1 > 0; \\ 1 + 4\varepsilon^2 \left( \frac{\nu}{B_0 - A_0} + \frac{L_2}{8} \right) + O(\varepsilon^3) & \text{si } L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 L_2 + O(\varepsilon^3), \end{cases}$$

donde  $\nu = \nu(A_0, B_0, L_2)$  se definió en el Lema 4.8.

**Demostración.** Al insertar  $c(\varepsilon) = 1 + \frac{4\varepsilon^2}{B_0 - A_0} + O(\varepsilon^3)$  en la ecuación (4.31), se obtiene para el miembro izquierdo  $c^2[B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] = B_0 - A_0 + O(\varepsilon)$  y para el miembro derecho  $\frac{4\varepsilon^2}{c-1} = B_0 - A_0 + O(\varepsilon)$  también, mientras que  $4\varepsilon^2 \left\{ \frac{-1}{c+L(\varepsilon)} - \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c} \ln |(c+1)[c+L(\varepsilon)]| \right\} = O(\varepsilon^2)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |c-1| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ ; la magnitud de los términos faltantes es sensible al valor de  $L_0$ . Si  $L_0 < 1$ , entonces  $\frac{4\varepsilon^2}{c-L(\varepsilon)} = O(\varepsilon^2)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |c-L(\varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$ ; si  $L_0 = 1$  con  $L_1 < 0$ , entonces  $\frac{4\varepsilon^2}{c-L(\varepsilon)} = O(\varepsilon)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |c-L(\varepsilon)| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ . Así queda comprobada la adecuación de la primera expresión para  $c(\varepsilon)$ .

Al insertar  $c(\varepsilon) = L(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{L_0^2(B_0 - A_0)} + O(\varepsilon^3)$  en la ecuación (4.31), se obtiene para el miembro izquierdo  $c^2[B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] = L_0^2(B_0 - A_0) + O(\varepsilon)$  y para el miembro derecho  $\frac{4\varepsilon^2}{c-L(\varepsilon)} = L_0^2(B_0 - A_0) + O(\varepsilon)$  también, mientras que  $4\varepsilon^2 \left\{ \frac{-1}{c+L(\varepsilon)} - \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c} \ln |(c+1)[c+L(\varepsilon)]| \right\} = O(\varepsilon^2)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |c-L(\varepsilon)| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ ; la magnitud de los términos faltantes es sensible al valor de  $L_0$ . Si  $L_0 > 1$ , entonces  $\frac{4\varepsilon^2}{c-1} = O(\varepsilon^2)$  y

$-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |c-1| = O(\varepsilon^2)$ ; si  $L_0 = 1$  con  $L_1 > 0$ , entonces  $\frac{4\varepsilon^2}{c-1} = O(\varepsilon)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |c-1| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ . Así queda comprobada la adecuación de la segunda expresión para  $c(\varepsilon)$ .

Al insertar  $c(\varepsilon) = 1 + 4\varepsilon^2 \left[ \frac{\nu}{B_0 - A_0} + \frac{L_2}{8} \right] + O(\varepsilon^3)$  en la ecuación (4.31), se obtiene para el miembro izquierdo  $c^2[B(\varepsilon) - A(\varepsilon)] = B_0 - A_0 + O(\varepsilon)$  y para el miembro derecho, asumiendo  $L(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 L_2 + O(\varepsilon^3)$ , se tiene  $4\varepsilon^2 \left[ \frac{1}{c-L(\varepsilon)} + \frac{1}{c-1} \right] = \frac{B_0 - A_0}{\nu - L_2(B_0 - A_0)/8} + \frac{B_0 - A_0}{\nu + L_2(B_0 - A_0)/8} + O(\varepsilon) = B_0 - A_0 + O(\varepsilon)$  también; mientras que  $4\varepsilon^2 \left\{ \frac{-1}{c+L(\varepsilon)} - \frac{1}{c+1} + \frac{1}{c} \ln |(c+1)[c+L(\varepsilon)]| \right\} = O(\varepsilon^2)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c} \ln |(c-1)[c-L(\varepsilon)]| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ . Así queda comprobada la adecuación de la tercera expresión para  $c(\varepsilon)$ .  $\square$

Ahora se pueden comprobar las tres proposiciones.

**Demostración de la Proposición 4.9.** Se inserta  $c(\varepsilon) = 1 + \frac{4\varepsilon^2}{B_0 - A_0} + O(\varepsilon^3)$  en la solución exacta (4.30). Entonces  $A(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-1} \right) = B_0 + O(\varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+x} \right) = -\left( \frac{1}{B_0 - A_0} + \frac{x+1}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon)$ , mientras que  $\frac{4\varepsilon^2}{c^3} \ln \left| \frac{c+x}{c-1} \right| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+1} + \frac{1}{c} \ln |c+1| \right) = O(\varepsilon^2)$ ; si  $L_0 < 1$ , se tiene también  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-x} - \frac{1}{c} \ln |c-x| \right) = O(\varepsilon^2)$  y si  $L_0 = 1$  con  $L_1 < 0$ , se tienen  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-x} \right) = O(\varepsilon)$  y  $-\frac{4\varepsilon^2}{c^3} \ln |c-x| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ . Por lo tanto,  $y(x, \varepsilon) = B_0 - \left( \frac{1}{B_0 - A_0} + \frac{x+1}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon)$  para todo  $x \in [-1, L(\varepsilon)]$ .  $\square$

**Demostración de la Proposición 4.10.** Se inserta  $c(\varepsilon) = L(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{L_0^2(B_0 - A_0)} + O(\varepsilon^3)$  en la solución exacta (4.30). Entonces  $A(\varepsilon) = A_0 + O(\varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-x} \right) = \left( \frac{1}{B_0 - A_0} + \frac{L_0^2[L(\varepsilon)-x]}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon)$ , mientras que  $-\frac{4\varepsilon^2}{c^3} \ln |c-x| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+1} + \frac{1}{c} \ln |c+1| \right) = O(\varepsilon^2)$ ; si  $L_0 > 1$ , se tiene también  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+x} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{c} \ln \left| \frac{c+x}{c-1} \right| \right) = O(\varepsilon^2)$  y si  $L_0 = 1$  con  $L_1 > 0$ , se tienen  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+x} + \frac{1}{c-1} \right) = O(\varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^3} \ln \left| \frac{c+x}{c-1} \right| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ . Por lo tanto,  $y(x, \varepsilon) = A_0 + \left( \frac{1}{B_0 - A_0} + \frac{L_0^2[L(\varepsilon)-x]}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon)$  para todo  $x \in [-1, L(\varepsilon)]$ .  $\square$

**Demostración de la Proposición 4.11.** Se inserta  $c(\varepsilon) = 1 + 4\varepsilon^2 \left( \frac{\nu}{B_0 - A_0} + \frac{L_2}{8} \right) + O(\varepsilon^3)$  en la solución exacta (4.30). Entonces  $A(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-1} \right) = A_0 + \frac{B_0 - A_0}{\nu + L_2(B_0 - A_0)/8} + O(\varepsilon) = A_0 + \frac{B_0 - A_0}{2} \left[ 1 - \frac{L_2(B_0 - A_0)/8}{\nu} \right] + O(\varepsilon)$  puesto que  $\nu^2 - L_2^2(B_0 - A_0)^2/64 = 2\nu$ ; así,  $A(\varepsilon) + \frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-1} \right) = \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{L_2(B_0 - A_0)^2}{16\nu} + O(\varepsilon)$ . Además,  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+x} \right) = -\left( \frac{\nu}{B_0 - A_0} + \frac{L_2}{8} + \frac{x+1}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{1}{c-x} \right) = \left( \frac{\nu}{B_0 - A_0} - \frac{L_2}{8} + \frac{L(\varepsilon)-x}{4\varepsilon^2} \right)^{-1} + O(\varepsilon)$ , mientras que  $\frac{4\varepsilon^2}{c^3} \ln \left| \frac{c+x}{(c-1)(c-x)} \right| = O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$  y  $\frac{4\varepsilon^2}{c^2} \left( \frac{-1}{c+1} + \frac{1}{c} \ln |c+1| \right) = O(\varepsilon^2)$ . Por lo tanto,  $y(x, \varepsilon) =$

$\frac{A_0+B_0}{2} - \frac{L_2(B_0-A_0)^2}{16\nu} - \left(\frac{\nu}{B_0-A_0} + \frac{L_2}{8} + \frac{x+1}{4\varepsilon^2}\right)^{-1} + \left(\frac{\nu}{B_0-A_0} - \frac{L_2}{8} + \frac{L(\varepsilon)-x}{4\varepsilon^2}\right)^{-1} + O(\varepsilon)$  para todo  $x \in [-1, L(\varepsilon)]$ .  $\square$

#### 4.5 Ecuación con un término no local

Se va a considerar un p.v.f. asociado a una ecuación integro-diferencial lineal:

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - xy' + y - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ y(-1, \varepsilon) &= A(\varepsilon), & y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde las funciones reales analíticas  $A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i$ ,  $B(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i$  y  $L(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i L_i$  son tales que  $A_0 \neq B_0$  y  $L_0 > 0$ , y el funcional  $M_\varepsilon$  es el promedio común tal que

$$M_\varepsilon[y] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L(\varepsilon) + 1} \int_{-1}^{L(\varepsilon)} y(s) ds,$$

para cualquier función  $y$  integrable en el intervalo  $[-1, L(\varepsilon)]$ .

Asumiendo por el momento la existencia de una solución  $y$  para el p.v.f. (4.32), con expansión asintótica de su promedio

$$M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] = m(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i m_i \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

se trata de determinar su comportamiento asintótico cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  mediante el método de expansiones asintóticas empatadas.

Una solución exterior  $Y(x, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Y_i(x)$  tiene que satisfacer  $-xY_0' + Y_0 = m_0$  y  $-xY_{i+1}' + Y_{i+1} = m_{i+1} - Y_i''$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , por lo que debe tener la forma

$$Y(x, \varepsilon) = m(\varepsilon) + k(\varepsilon)x \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (m_i + k_i x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

donde  $k_0, k_1, k_2, \dots$  son constantes reales.



En busca de una capa de frontera a la izquierda, el cambio de variables

$$t = \frac{x+1}{\varepsilon}, \quad y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

lleva a la ecuación  $\ddot{z} + (1 - \varepsilon t)\dot{z} + \varepsilon z - \varepsilon m(\varepsilon) = 0$ . En particular, el término dominante, determinado por  $\ddot{z}_0 + \dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = A_0$ ,  $z_0(\infty) = m_0 - k_0$ , es

$$z_0(t) = m_0 - k_0 + (A_0 - m_0 + k_0)e^{-t}.$$

En busca de una capa de frontera a la derecha, el cambio de variables

$$t = \frac{x - L(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad y(x, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i(t) \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+)$$

lleva a la ecuación  $\ddot{z} - [L(\varepsilon) + \varepsilon t]\dot{z} + \varepsilon z - \varepsilon m(\varepsilon) = 0$ . En particular, el término dominante, determinado por  $\ddot{z}_0 - L_0 \dot{z}_0 = 0$ ,  $z_0(0) = B_0$ ,  $z_0(-\infty) = m_0 + k_0 L_0$ , es

$$z_0(t) = m_0 + k_0 L_0 + (B_0 - m_0 - k_0 L_0)e^{L_0 t}.$$

Una aproximación asintótica compuesta cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  tiene la forma

$$y(x, \varepsilon) \sim m_0 + k_0 x + (A_0 - m_0 + k_0) e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} + (B_0 - m_0 - k_0 L_0) e^{\frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon}}.$$

Contiene dos constantes indeterminadas,  $m_0$  y  $k_0$ , pero una de ellas tiene un significado condicionante:  $m_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)]$ . Este límite se puede calcular usando la aproximación obtenida; viene la identidad  $m_0 = m_0 + k_0(L_0 - 1)/2$ . Por lo tanto, si  $L_0 \neq 1$ , entonces  $k_0 = 0$  y la aproximación se reduce a

$$y(x, \varepsilon) \sim m_0 + (A_0 - m_0) e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} + (B_0 - m_0) e^{\frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),$$

con todavía la constante  $m_0$  indeterminada.

Si  $L_0 = 1$ , se va a precisar el término siguiente de cada solución interior, para después aplicar la definición de  $m_1$  y dejar una sola constante indeterminada.

En la capa de frontera izquierda, tal término siguiente tiene que satisfacer  $\dot{z}_1 + \dot{z}_1 = t\dot{z}_0 - z_0 + m_0$  con  $z_1(0) = A_1$ . Luego, tiene la forma  $z_1(t) = a_1 + k_0t + (A_1 - a_1)e^{-t} + (A_0 - m_0 + k_0)(2t + t^2/2)e^{-t}$ , donde  $a_1$  es una constante de integración que se va a determinar por empate según la regla de Van Dyke. Por una parte,  $(Y_0 + \varepsilon Y_1)(x) = m_0 + k_0x + \varepsilon m_1 + \varepsilon k_1x = m_0 - k_0 + k_0\varepsilon t + \varepsilon m_1 - \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_1 t = m_0 - k_0 + \varepsilon(k_0t + m_1 - k_1) + O(\varepsilon^2) = m_0 - k_0 + k_0(x+1) + \varepsilon m_1 - \varepsilon k_1 + O(\varepsilon^2) = m_0 + k_0x + \varepsilon(m_1 - k_1) + O(\varepsilon^2)$ . Por otra parte,  $(z_0 + \varepsilon z_1)(t) = m_0 - k_0 + (A_0 - m_0 + k_0)e^{-t} + \varepsilon a_1 + \varepsilon k_0t + \varepsilon(A_1 - a_1)e^{-t} + \varepsilon(A_0 - m_0 + k_0)(2t + t^2/2)e^{-t} = m_0 - k_0 + (A_0 - m_0 + k_0)e^{-(x+1)/\varepsilon} + \varepsilon a_1 + k_0(x+1) + \varepsilon(A_1 - a_1)e^{-(x+1)/\varepsilon} + (A_0 - m_0 + k_0)[2(x+1) + (x+1)^2/(2\varepsilon)]e^{-(x+1)/\varepsilon} = m_0 + k_0x + \varepsilon a_1 + O(\varepsilon^2)$ . Da lugar el empate si y sólo si  $a_1 = m_1 - k_1$ . Así,  $z_1(t) = m_1 - k_1 + k_0t + (A_1 - m_1 + k_1)e^{-t} + (A_0 - m_0 + k_0)(2t + t^2/2)e^{-t}$ .

En la capa de frontera derecha (cuando  $L_0 = 1$ ), el término de orden  $\varepsilon$  tiene que satisfacer  $\dot{z}_1 - \dot{z}_1 = (L_1 + t)\dot{z}_0 - z_0 + m_0$  con  $z_1(0) = B_1$ . Luego, tiene la forma  $z_1(t) = b_1 + k_0t + (B_1 - b_1)e^t + (B_0 - m_0 - k_0)[(L_1 - 2)t + t^2/2]e^t$ , donde  $b_1$  es una constante de integración que se va a determinar por empate según la regla de Van Dyke. Por una parte,  $(Y_0 + \varepsilon Y_1)(x) = m_0 + k_0x + \varepsilon m_1 + \varepsilon k_1x = m_0 + k_0 + k_0\varepsilon L_1 + k_0\varepsilon t + \varepsilon m_1 + \varepsilon k_1 + O(\varepsilon^2) = m_0 + k_0 + k_0\varepsilon L_1 + k_0(x - 1 - \varepsilon L_1) + \varepsilon m_1 + \varepsilon k_1 + O(\varepsilon^2) = m_0 + k_0x + \varepsilon(m_1 + k_1) + O(\varepsilon^2)$ . Por otra parte,  $(z_0 + \varepsilon z_1)(t) = m_0 + k_0 + (B_0 - m_0 - k_0)e^t + \varepsilon b_1 + \varepsilon k_0t + \varepsilon(B_1 - b_1)e^t + \varepsilon(B_0 - m_0 - k_0)[(L_1 - 2)t + t^2/2]e^t = m_0 + k_0 + \varepsilon b_1 + k_0(x - 1 - \varepsilon L_1) + O(\varepsilon^2) = m_0 + k_0x + \varepsilon(b_1 - k_0L_1) + O(\varepsilon^2)$ . Da lugar el empate si y sólo si  $b_1 = m_1 + k_1 + k_0L_1$ . Así,  $z_1(t) = m_1 + k_1 + k_0L_1 + k_0t + (B_1 - m_1 - k_1 - k_0L_1)e^t + (B_0 - m_0 - k_0)[(L_1 - 2)t + t^2/2]e^t$ .

Una aproximación asintótica compuesta hasta el orden  $\varepsilon$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  es

$$\begin{aligned}
y(x, \varepsilon) &\sim m_0 + k_0x + \varepsilon m_1 + \varepsilon k_1x \\
&+ (A_0 - m_0 + k_0) e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} + (B_0 - m_0 - k_0) e^{\frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon}} \\
&+ \varepsilon(A_1 - m_1 + k_1) e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} + \varepsilon(B_1 - m_1 - k_1 - k_0L_1) e^{\frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon}} \\
&+ (A_0 - m_0 + k_0) \left[ 2(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2\varepsilon} \right] e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} \\
&+ (B_0 - m_0 - k_0) \left\{ (L_1 - 2)[x - L(\varepsilon)] + \frac{[x - L(\varepsilon)]^2}{2\varepsilon} \right\} e^{\frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Al estimar su promedio se obtiene  $m_0 + \varepsilon m_1 = m_0 + \frac{\varepsilon}{2}k_0L_1 + \varepsilon m_1 + \frac{\varepsilon}{2}(A_0 - m_0 + k_0) + \frac{\varepsilon}{2}(B_0 - m_0 - k_0)$ , de lo cual resulta la identidad  $2m_0 = A_0 + B_0 + k_0L_1$ . Así, si  $L_0 = 1$ , se tiene la aproximación

$$\begin{aligned}
y(x, \varepsilon) &\sim \frac{A_0 + B_0}{2} + k_0 \frac{L_1}{2} + k_0x + \left[ \frac{A_0 - B_0}{2} + k_0 \left( 1 - \frac{L_1}{2} \right) \right] e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} \\
&+ \left[ \frac{B_0 - A_0}{2} - k_0 \left( 1 + \frac{L_1}{2} \right) \right] e^{\frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+),
\end{aligned}$$

con todavía la constante  $k_0$  indeterminada.

Para extraer una condición de frontera adicional, se puede primero derivar la e.d.o. en (4.32), obteniéndose la ecuación  $\varepsilon y''' - xy'' = 0$ , la cual equivale a  $[\varepsilon y'' \exp(\frac{-x^2}{2\varepsilon})]' = 0$ . Por lo tanto, ha de cumplirse  $\varepsilon^2 y''(L(\varepsilon), \varepsilon) \exp[\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}] = \varepsilon^2 y''(-1, \varepsilon) \exp(\frac{-1}{2\varepsilon})$ . Al usar las derivadas segundas de las soluciones interiores dominantes, se sigue la condición

$$L_0^2(B_0 - m_0) + O(\varepsilon) = [A_0 - m_0 + O(\varepsilon)] \exp\left[\frac{L^2(\varepsilon) - 1}{2\varepsilon}\right]$$

cuando  $L_0 \neq 1$ , y

$$\frac{B_0 - A_0}{2} - k_0 \left( 1 + \frac{L_1}{2} \right) + O(\varepsilon) = \left[ \frac{A_0 - B_0}{2} + k_0 \left( 1 - \frac{L_1}{2} \right) + O(\varepsilon) \right] \exp[L_1 + O(\varepsilon)]$$

cuando  $L_0 = 1$ . Resultan entonces

$$m_0 = \begin{cases} B_0 & \text{cuando } L_0 < 1; \\ A_0 & \text{cuando } L_0 > 1; \end{cases}$$

y cuando  $L_0 = 1$ ,

$$k_0 = \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \quad \text{si } L_1 \neq \pm L^*,$$

donde  $L^* \simeq 2,4$  y  $-L^*$  son las soluciones de la ecuación  $L(1 - e^L) + 2(1 + e^L) = 0$ .

Se puede ahora enunciar lo siguiente.

**Proposición 4.13.** *El comportamiento asintótico cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  de la solución del p.v.f. (4.32) viene dado en primera aproximación por*

$$y(x, \varepsilon) \sim \begin{cases} B_0 + (A_0 - B_0) e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 < 1; \\ \frac{A_0(1+e^{L_1}-L_1e^{L_1})+B_0(1+e^{L_1}+L_1)}{L_1(1-e^{L_1})+2(1+e^{L_1})} + \frac{(B_0-A_0)(1+e^{L_1})}{L_1(1-e^{L_1})+2(1+e^{L_1})} x & \text{si } L_0 = 1 \\ + \frac{(A_0-B_0)L_1}{L_1(1-e^{L_1})+2(1+e^{L_1})} e^{-\frac{x+1}{\varepsilon}} + \frac{(A_0-B_0)L_1e^{L_1}}{L_1(1-e^{L_1})+2(1+e^{L_1})} e^{\frac{x-L(\varepsilon)}{\varepsilon}} & \text{y } L_1 \neq \pm L^*; \\ A_0 + (B_0 - A_0) e^{\frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon}} & \text{si } L_0 > 1. \end{cases}$$

**Nota.** Si  $(L_0, L_1) = (1, 0)$ , se tiene  $y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0+B_0}{2} + \left(\frac{B_0-A_0}{2}\right)x$  y no hay capas de frontera al orden uno. De hecho, si  $L(\varepsilon) \equiv 1$ , es solución exacta  $y(x, \varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)+B(\varepsilon)}{2} + \left[\frac{B(\varepsilon)-A(\varepsilon)}{2}\right]x$ .

Para darle validez a la Proposición 4.13, hay que analizar directamente el p.v.f. (4.32), dejando la estimación asintótica para cuando se tenga suficiente información exacta sobre su solución.

Primero, conviene convertir la ecuación integro-diferencial en una diferencial ordinaria, eliminando de ella el término no local haciéndolo pasar a las condiciones asociadas.

**Proposición 4.14.** *El p.v.f. (4.32) es equivalente al problema con condición no local*

$$\begin{aligned} \varepsilon z'' - xz' + z &= 0, & -1 \leq x \leq L(\varepsilon), \\ M_\varepsilon[z(\cdot, \varepsilon)] &= 0, & \\ z(L(\varepsilon), \varepsilon) - z(-1, \varepsilon) &= B(\varepsilon) - A(\varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (4.33)$$

en el sentido de que existe una biyección entre los conjuntos de soluciones de los dos problemas (posiblemente reducidos a una sola función cada uno).

**Demostración.** Si una función  $y$  es solución del p.v.f. (4.32), entonces la función  $z \stackrel{\text{def}}{=} y - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)]$  es claramente solución del problema (4.33), mientras que si una función  $z$  es solución del problema (4.33), entonces la función

$$y \stackrel{\text{def}}{=} z + \frac{A(\varepsilon) + B(\varepsilon)}{2} - \frac{z(L(\varepsilon), \varepsilon) + z(-1, \varepsilon)}{2}$$

es solución del p.v.f. (4.32) ya que, como  $M_\varepsilon[z(\cdot, \varepsilon)] = 0$ , la identidad  $M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] = \frac{A(\varepsilon)+B(\varepsilon)}{2} - \frac{z(L(\varepsilon), \varepsilon)+z(-1, \varepsilon)}{2}$  implica que la función  $y$  satisface la e.d.o. y además se tienen las dos condiciones  $y(L(\varepsilon), \varepsilon) - y(-1, \varepsilon) = z(L(\varepsilon), \varepsilon) - z(-1, \varepsilon) = B(\varepsilon) - A(\varepsilon)$  e  $y(L(\varepsilon), \varepsilon) + y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon) + B(\varepsilon)$ , las cuales equivalen a las impuestas en la frontera  $y(-1, \varepsilon) = A(\varepsilon)$  e  $y(L(\varepsilon), \varepsilon) = B(\varepsilon)$ .

Por otra parte, la composición de las dos correspondencias así definidas da, en un orden y en el otro, la identidad respectiva:  $y \mapsto y - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] \mapsto y - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] + \frac{A(\varepsilon)+B(\varepsilon)}{2} - \frac{y(L(\varepsilon), \varepsilon) - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)] + y(-1, \varepsilon) - M_\varepsilon[y(\cdot, \varepsilon)]}{2} = y$ ;  $y \mapsto z + \frac{A(\varepsilon)+B(\varepsilon)}{2} - \frac{z(L(\varepsilon), \varepsilon)+z(-1, \varepsilon)}{2} \mapsto z + \frac{A(\varepsilon)+B(\varepsilon)}{2} - \frac{z(L(\varepsilon), \varepsilon)+z(-1, \varepsilon)}{2} - M_\varepsilon[z(\cdot, \varepsilon) + \frac{A(\varepsilon)+B(\varepsilon)}{2} - \frac{z(L(\varepsilon), \varepsilon)+z(-1, \varepsilon)}{2}] = z$ . Así, las aplicaciones son inversas una de la otra y, por lo tanto, biyectivas.  $\square$

La solución general de la e.d.o. singularmente perturbada de Hermite en (4.33) es  $z(x, \varepsilon) = c_1(\varepsilon)\psi(x, \varepsilon) + c_2(\varepsilon)x$ , donde la función de Kummer par  $\psi$ , en este caso especial, está definida simplemente por

$$\psi(x, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} x \int_0^x \exp\left(\frac{s^2}{2\varepsilon}\right) ds - \varepsilon \exp\left(\frac{x^2}{2\varepsilon}\right),$$

para todo  $x \in [-1, L(\varepsilon)]$ .

Se tiene una solución  $z$  al problema (4.33) si y sólo si el par de constantes  $(c_1, c_2)(\varepsilon)$  satisface el sistema algebraico

$$\begin{cases} M_\varepsilon[\psi(\cdot, \varepsilon)]c_1(\varepsilon) + \frac{1}{2}[L(\varepsilon) - 1]c_2(\varepsilon) = 0 \\ [\psi(L(\varepsilon), \varepsilon) - \psi(1, \varepsilon)]c_1(\varepsilon) + [L(\varepsilon) + 1]c_2(\varepsilon) = B(\varepsilon) - A(\varepsilon). \end{cases} \quad (4.34)$$

En particular, si  $L(\varepsilon) \equiv 1$  entonces  $M_\varepsilon[\psi(\cdot, \varepsilon)] \neq 0$  implica  $c_1(\varepsilon) \equiv 0$ , lo cual conlleva  $c_2(\varepsilon) = \frac{B(\varepsilon) - A(\varepsilon)}{2}$ : existe la única solución  $z(x, \varepsilon) = \frac{B(\varepsilon) - A(\varepsilon)}{2}x$ , a la cual corresponde la única solución del p.v.f. (4.32)  $y(x, \varepsilon) = \frac{B(\varepsilon) - A(\varepsilon)}{2}x + \frac{A(\varepsilon) + B(\varepsilon)}{2}$ , lo cual confirma lo mencionado anteriormente y establece la unicidad.

Mediante un cambio del orden de las integraciones, se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} [L(\varepsilon) + 1]M_\varepsilon[\psi(\cdot, \varepsilon)] &= \int_0^{L(\varepsilon)} \left[ \frac{L^2(\varepsilon) - s^2}{2} - \varepsilon \right] \exp\left(\frac{s^2}{2\varepsilon}\right) ds \\ &\quad + \int_0^1 \left( \frac{1 - s^2}{2} - \varepsilon \right) \exp\left(\frac{s^2}{2\varepsilon}\right) ds, \end{aligned}$$

para la cual el método de Laplace suministra la aproximación asintótica

$$[L(\varepsilon) + 1]M_\varepsilon[\psi(\cdot, \varepsilon)] = [L_0^{-3}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)] e^{\frac{L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} + [\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)] e^{\frac{1}{2\varepsilon}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

También por dicho método se obtiene

$$\psi(L(\varepsilon), \varepsilon) - \psi(1, \varepsilon) = [L_0^{-2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)] e^{\frac{L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} - [\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)] e^{\frac{1}{2\varepsilon}} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Si primero se supone  $L_0 < 1$ , entonces la evaluación del sistema algebraico (4.34) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  da

$$\begin{cases} \varepsilon^3 e^{\frac{1}{2\varepsilon}} \left[ \frac{1}{L_0 + 1} + O(\varepsilon) \right] c_1(\varepsilon) + \left[ \frac{L_0 - 1}{2} + O(\varepsilon) \right] c_2(\varepsilon) = 0 \\ \varepsilon^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}} [-1 + O(\varepsilon)] c_1(\varepsilon) + [L_0 + 1 + O(\varepsilon)] c_2(\varepsilon) = B_0 - A_0 + O(\varepsilon), \end{cases}$$

con determinante  $\Delta(\varepsilon) \sim \frac{1}{2}(L_0 - 1)\varepsilon^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ); como es diferente de cero, existe una solución y una sola para el problema (4.33) e igualmente para el p.v.f. (4.32). La solución del sistema satisface  $c_1(\varepsilon) \sim (A_0 - B_0)\varepsilon^{-2} e^{\frac{-1}{2\varepsilon}}$  y  $c_2(\varepsilon) \sim 2(B_0 - A_0)(L_0^2 - 1)^{-1}\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), lo cual implica la aproximación asintótica

$$z(x, \varepsilon) \sim (A_0 - B_0)\varepsilon^{-2} e^{\frac{-1}{2\varepsilon}} \psi(x, \varepsilon) + 2(B_0 - A_0)(L_0^2 - 1)^{-1}\varepsilon x \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\psi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  y  $z(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\psi(x, \varepsilon) \sim x^{-2}\varepsilon^2 \exp(\frac{x^2}{2\varepsilon})$ , por lo que  $z(x, \varepsilon) \sim (A_0 - B_0)x^{-2} \exp(\frac{x^2-1}{2\varepsilon}) + O(\varepsilon) \sim (A_0 - B_0) \exp(-\frac{x+1}{\varepsilon}) + O(\varepsilon)$  y esta última expresión abarca también el caso  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ . Volviendo a la incógnita  $y$ , como  $z(L(\varepsilon), \varepsilon) + z(-1, \varepsilon) \sim A_0 - B_0$ , se obtiene  $y(x, \varepsilon) \sim (A_0 - B_0) \exp(-\frac{x+1}{\varepsilon}) + O(\varepsilon) + \frac{A_0+B_0}{2} - \frac{A_0-B_0}{2} \sim B_0 + (A_0 - B_0) \exp(-\frac{x+1}{\varepsilon})$ , lo cual demuestra la parte correspondiente de la Proposición 4.13.

Si ahora se supone  $L_0 > 1$ , entonces la evaluación del sistema algebraico (4.34) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  da

$$\begin{cases} \varepsilon^3 e^{\frac{L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [L_0^{-3}(L_0 + 1)^{-1} + O(\varepsilon)] c_1(\varepsilon) + [(L_0 - 1)/2 + O(\varepsilon)] c_2(\varepsilon) = 0 \\ \varepsilon^2 e^{\frac{L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} [L_0^{-2} + O(\varepsilon)] c_1(\varepsilon) + [L_0 + 1 + O(\varepsilon)] c_2(\varepsilon) = B_0 - A_0 + O(\varepsilon), \end{cases}$$

con determinante  $\Delta(\varepsilon) \sim \frac{1}{2}(1 - L_0)L_0^{-2}\varepsilon^2 e^{\frac{L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ); como es diferente de cero, existe una solución y una sola para el problema (4.33) e igualmente para el p.v.f. (4.32). La solución del sistema satisface  $c_1(\varepsilon) \sim (B_0 - A_0)L_0^2\varepsilon^{-2} e^{\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}}$  y  $c_2(\varepsilon) \sim 2(A_0 - B_0)L_0^{-1}(L_0^2 - 1)^{-1}\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), lo cual implica la aproximación asintótica

$$z(x, \varepsilon) \sim (B_0 - A_0)L_0^2\varepsilon^{-2} e^{\frac{-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}} \psi(x, \varepsilon) + 2(A_0 - B_0)L_0^{-1}(L_0^2 - 1)^{-1}\varepsilon x \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+).$$

Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\psi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  y  $z(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\psi(x, \varepsilon) \sim x^{-2}\varepsilon^2 \exp(\frac{x^2}{2\varepsilon})$ , por lo que  $z(x, \varepsilon) \sim (B_0 - A_0)L_0^2x^{-2} \exp[\frac{x^2-L^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}] + O(\varepsilon) \sim (B_0 - A_0) \exp(\frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon}) + O(\varepsilon)$  y esta última expresión abarca también el caso

$x = O(\sqrt{\varepsilon})$ . Volviendo a la incógnita  $y$ , como  $z(L(\varepsilon), \varepsilon) + z(-1, \varepsilon) \sim B_0 - A_0$ , se obtiene  $y(x, \varepsilon) \sim (B_0 - A_0) \exp\left(\frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) + \frac{A_0+B_0}{2} - \frac{B_0-A_0}{2} \sim A_0 + (B_0 - A_0) \exp\left(\frac{L_0[x-L(\varepsilon)]}{\varepsilon}\right)$ , lo cual demuestra la parte correspondiente de la Proposición 4.13.

Si finalmente se supone  $L_0 = 1$  con  $L_1 \neq \pm L^*$ , entonces la evaluación del sistema algebraico (4.34) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  da

$$\begin{cases} \varepsilon^3 e^{\frac{1}{2\varepsilon}} [(1 + e^{L_1})/2 + O(\varepsilon)] c_1(\varepsilon) + [\varepsilon L_1/2 + O(\varepsilon^2)] c_2(\varepsilon) = 0 \\ \varepsilon^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}} [e^{L_1} - 1 + O(\varepsilon)] c_1(\varepsilon) + [2 + O(\varepsilon)] c_2(\varepsilon) = B_0 - A_0 + O(\varepsilon), \end{cases}$$

con determinante  $\Delta(\varepsilon) \sim [1 + e^{L_1} + L_1(1 - e^{L_1})/2] \varepsilon^3 e^{\frac{1}{2\varepsilon}}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ); como es diferente de cero si  $L_1 \neq \pm L^*$ , existe una solución y una sola para el problema (4.33) e igualmente para el p.v.f. (4.32). La solución del sistema satisface  $c_1(\varepsilon) \sim \frac{L_1(A_0 - B_0)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \varepsilon^{-2} e^{\frac{-1}{2\varepsilon}}$  y  $c_2(\varepsilon) \sim \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})}$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), lo cual implica la aproximación asintótica cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$

$$z(x, \varepsilon) \sim \frac{L_1(A_0 - B_0)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \varepsilon^{-2} e^{\frac{-1}{2\varepsilon}} \psi(x, \varepsilon) + \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x.$$

Si  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\psi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  y  $z(x, \varepsilon) = \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x + O(\varepsilon)$ . Si  $x \neq O(\sqrt{\varepsilon})$ , entonces  $\psi(x, \varepsilon) \sim x^{-2} \varepsilon^2 \exp\left(\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$  y  $z(x, \varepsilon) \sim \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x + \frac{L_1(A_0 - B_0)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x^{-2} \exp\left(\frac{x^2 - 1}{2\varepsilon}\right) \sim \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x + \frac{L_1(A_0 - B_0)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \exp\left(-\frac{x+1}{\varepsilon}\right) + \frac{L_1(A_0 - B_0)e^{L_1}}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \exp\left[\frac{x - L(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]$  y esta última expresión abarca también el caso  $x = O(\sqrt{\varepsilon})$ . Volviendo a la incógnita  $y$ , como  $z(L(\varepsilon), \varepsilon) + z(-1, \varepsilon) \sim \frac{L_1(A_0 - B_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})}$ , viene  $y(x, \varepsilon) \sim \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x + \frac{L_1(A_0 - B_0)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \exp\left(-\frac{x+1}{\varepsilon}\right) + \frac{L_1(A_0 - B_0)e^{L_1}}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \exp\left[\frac{x - L(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] + \frac{A_0 + B_0}{2} - \frac{1}{2} \frac{L_1(A_0 - B_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})}$ . Así,  $y(x, \varepsilon) \sim \frac{A_0(1 + e^{L_1} - L_1 e^{L_1}) + B_0(1 + e^{L_1} + L_1)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} + \frac{(B_0 - A_0)(1 + e^{L_1})}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} x + \frac{L_1(A_0 - B_0)}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \exp\left(-\frac{x+1}{\varepsilon}\right) + \frac{L_1(A_0 - B_0)e^{L_1}}{L_1(1 - e^{L_1}) + 2(1 + e^{L_1})} \exp\left[\frac{x - L(\varepsilon)}{\varepsilon}\right]$ , lo cual termina de demostrar la Proposición 4.13.



#### 4.6 Ecuación en derivadas parciales

Se considera el p.v.f. elíptico en un rectángulo del plano  $xy$

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - xu_x - yu_y &= 0, & -1 \leq x \leq L, & \quad -1 \leq y \leq M, \\ u(-1, y, \varepsilon) &= A(y, \varepsilon), & u(L, y, \varepsilon) &= B(y, \varepsilon), \\ u(x, -1, \varepsilon) &= C(x, \varepsilon), & u(x, M, \varepsilon) &= D(x, \varepsilon), & 0 < \varepsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde están dadas las dos constantes positivas  $L$  y  $M$  aquí independientes del parámetro de perturbación  $\varepsilon$ , y las funciones reales analíticas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  las cuales satisfacen condiciones de consistencia entre sí:  $A(-1, \varepsilon) = C(-1, \varepsilon)$ ,  $B(M, \varepsilon) = D(L, \varepsilon)$ ,  $A(M, \varepsilon) = D(-1, \varepsilon)$  y  $B(-1, \varepsilon) = C(L, \varepsilon)$ .

Con el objeto de aplicar el método de expansiones asintóticas empataadas, se empieza buscando una función regular que satisfaga la ecuación reducida. La convergencia, en una región “exterior”, de la solución del p.v.f. (4.35) hacia la de un problema reducido apropiado, está bien establecida para los p.v.f. de su clase (Lions [111]).

Las soluciones no constantes de la ecuación hiperbólica  $xU_x + yU_y = 0$ , del tipo  $f(-y/x)$  en el triángulo  $-1 \leq x \leq y \leq -Mx$ , del tipo  $f(-x/y)$  en el triángulo  $-1 \leq y \leq x \leq -Ly$ , del tipo  $f(Ly/x)$  en el triángulo  $-x \leq Ly \leq Mx \leq ML$  y del tipo  $f(Mx/y)$  en el triángulo  $-y \leq Mx \leq Ly \leq LM$ , implican una singularidad en el origen del plano, punto de retorno de la ecuación. Por lo tanto, para poder ser regular, la solución exterior es de la forma

$$U(x, y, \varepsilon) = k(\varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i k_i \quad (x, y) \in (-1, L) \times (-1, M),$$

donde los términos  $k_i$  son constantes reales.

Esto implica desde ya que si ninguna de las funciones dadas  $A$ ,  $B$ ,  $C$  o  $D$  es constante, se pueden esperar cuatro capas de frontera, una en cada lado del rectángulo.

La averiguación de una capa de frontera en el lado oeste del rectángulo pasa por la sustitución de la coordenada  $x$  en una vecindad del borde  $x = -1$  por la variable local  $t = (x + 1)/\varepsilon$ . El problema correspondiente es

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \varepsilon^2 u_{yy} + (1 - \varepsilon t)\dot{u} - \varepsilon y u_y &= 0, & 0 \leq t < \infty, & -1 \leq y \leq M, \\ u(0, y, \varepsilon) &= A(y, \varepsilon), & \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, y, \varepsilon) &= k(\varepsilon). \end{aligned}$$

El término dominante local debe satisfacer

$$\ddot{u}_0 + \dot{u}_0 = 0, \quad u_0(0, y) = A_0(y), \quad u_0(\infty, y) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$u_0(t, y) = k_0 + [A_0(y) - k_0]e^{-t}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad -1 \leq y \leq M.$$

Procediendo de manera similar para el lado sur del rectángulo con la nueva variable local  $t = (y + 1)/\varepsilon$ , se obtiene

$$u_0(x, t) = k_0 + [C_0(x) - k_0]e^{-t}, \quad -1 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Para el lado este, la variable local es  $t = (x - L)/\varepsilon$  y el problema correspondiente es

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \varepsilon^2 u_{yy} - (L + \varepsilon t)\dot{u} - \varepsilon y u_y &= 0, & -\infty < t \leq 0, & -1 \leq y \leq M, \\ u(0, y, \varepsilon) &= B(y, \varepsilon), & \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t, y, \varepsilon) &= k(\varepsilon). \end{aligned}$$

El término dominante local debe satisfacer

$$\ddot{u}_0 - L\dot{u}_0 = 0, \quad u_0(0, y) = B_0(y), \quad u_0(-\infty, y) = k_0;$$

por lo tanto, resulta

$$u_0(t, y) = k_0 + [B_0(y) - k_0]e^{Lt}, \quad -\infty < t \leq 0, \quad -1 \leq y \leq M.$$

Procediendo de manera similar para el lado norte del rectángulo con la nueva variable local  $t = (y - M)/\varepsilon$ , se obtiene

$$u_0(x, t) = k_0 + [D_0(x) - k_0]e^{Mt}, \quad -1 \leq x \leq L, \quad -\infty < t \leq 0.$$

De todo lo anterior, se desprende un *ansatz* de aproximación asintótica compuesta al orden uno,

$$\begin{aligned} u(x, y, \varepsilon) \sim & k_0 + [A_0(y) - k_0]e^{-(x+1)/\varepsilon} + [C_0(x) - k_0]e^{-(y+1)/\varepsilon} \\ & + [B_0(y) - k_0]e^{L(x-L)/\varepsilon} + [D_0(x) - k_0]e^{M(y-M)/\varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow 0^+), \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde la constante real  $k_0$  quedó sin determinar.

Se recurre entonces a derivar una condición adicional a partir de la ecuación en derivadas parciales. Al multiplicarla por el factor no nulo  $\exp(-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon})$  se obtiene la ley de conservación

$$\left( \varepsilon u_x e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon}} \right)_x + \left( \varepsilon u_y e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon}} \right)_y = 0.$$

Integrando respecto de  $x$  entre  $-1$  y  $L$ , y respecto de  $y$  entre  $-1$  y  $M$ , viene la nueva condición de frontera

$$\begin{aligned} \int_{-1}^M \left[ \varepsilon u_x(L, y, \varepsilon) e^{-\frac{L^2}{2\varepsilon}} - \varepsilon u_x(-1, y, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}} dy \\ + \int_{-1}^L \left[ \varepsilon u_y(x, M, \varepsilon) e^{-\frac{M^2}{2\varepsilon}} - \varepsilon u_y(x, -1, \varepsilon) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}} \right] e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Se pueden usar las soluciones interiores dominantes para estimar los integran-

dos:

$$\int_{-1}^M \left\{ L[B_0(y) - k_0]e^{\frac{-L^2}{2\varepsilon}} + [A_0(y) - k_0]e^{\frac{-1}{2\varepsilon}} \right\} e^{\frac{-y^2}{2\varepsilon}} dy \\ + \int_{-1}^L \left\{ M[D_0(x) - k_0]e^{\frac{-M^2}{2\varepsilon}} + [C_0(x) - k_0]e^{\frac{-1}{2\varepsilon}} \right\} e^{\frac{-x^2}{2\varepsilon}} dx \sim 0.$$

Al aplicar el método de Laplace y simplificando por  $\sqrt{2\pi\varepsilon}$ , se sigue finalmente la condición

$$L[B_0(0) - k_0]e^{\frac{-L^2}{2\varepsilon}} + M[D_0(0) - k_0]e^{\frac{-M^2}{2\varepsilon}} + [A_0(0) + C_0(0) - 2k_0]e^{\frac{-1}{2\varepsilon}} \sim 0.$$

La indeterminación queda entonces resuelta de la manera siguiente.

$$k_0 = \begin{cases} B_0(0) & \text{si } L < \min\{M, 1\}, \\ D_0(0) & \text{si } M < \min\{L, 1\}, \\ [B_0(0) + D_0(0)]/2 & \text{si } L = M < 1, \\ [A_0(0) + C_0(0)]/2 & \text{si } 1 < \min\{L, M\}, \\ [A_0(0) + B_0(0) + C_0(0)]/3 & \text{si } L = 1 < M, \\ [A_0(0) + C_0(0) + D_0(0)]/3 & \text{si } M = 1 < L, \\ [A_0(0) + B_0(0) + C_0(0) + D_0(0)]/4 & \text{si } L = M = 1. \end{cases}$$

Estos resultados son consistentes con lo obtenido por Grasman y Matkowsky [46] usando su método de cálculo variacional. El valor de la constante  $k_0$  (valor límite de la solución en todo el interior del rectángulo) está determinado por el o los puntos más cercanos al origen-punto de retorno, puntos de contacto con la frontera del círculo interior al rectángulo centrado en el origen y de radio máximo: según los valores de  $L$  y  $M$ , son uno o varios de los puntos  $(0, -1)$ ,  $(L, 0)$ ,  $(0, M)$  y  $(-1, 0)$ , en los cuales están impuestos los valores  $C(0, \varepsilon)$ ,  $B(0, \varepsilon)$ ,  $D(0, \varepsilon)$  y  $A(0, \varepsilon)$ , respectivamente.

---

## CONCLUSIÓN

Los problemas que exhiben el fenómeno de resonancia de Ackerberg y O'Malley representan un reto difícil para el científico interesado en conocer el comportamiento preciso de sus soluciones y su dependencia del parámetro pequeño  $\varepsilon$ , debido al fracaso del método de expansiones asintóticas empataadas que, en las demás situaciones, le aporta toda la información que busca. Las alternativas de resolución ofrecidas en la literatura especializada involucran alejarse del análisis asintótico estándar, sin ofrecer demostración rigurosa de la validez de los resultados así conseguidos.

El método presentado en este trabajo representa una alternativa más asequible porque se ha visto que involucra los mismos procedimientos básicos que se emplean de manera rutinaria en el manejo de las ecuaciones diferenciales ordinarias clásicas.

El Capítulo 3 ha evidenciado la efectividad del método, porque ha considerado prácticamente todos los problemas cuyo carácter resonante en el sentido de Ackerberg y O'Malley haya sido debidamente demostrado en la literatura y se comprobaron todos los resultados específicos. También el método ha resultado versátil, ya que ha sido capaz de resolver los casos excepcionales de supersensibilidad.

Finalmente, es interesante notar, en particular en base al Capítulo 4, que la idea desarrollada en este trabajo puede ser aprovechada de manera más general en otros problemas asintóticos donde aparentemente sobre un grado de libertad.

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Abramowitz & I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, Nueva York (1972).
- [2] R.C. Ackerberg & R.E. O'Malley, Jr. Boundary layer problems exhibiting resonance. *Stud. Appl. Math.* **49**(3): 277–295 (1970).
- [3] A. Acosta & M. Lizana. *Introducción a la Teoría Geométrica de Perturbaciones Singulares para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas (1990).
- [4] L. Álvarez Díaz & A.P. Rodríguez Santiesteban. The operator decomposition method for the numerical solution of a class of singularly perturbed problems. *Notas de Matemática* **124**, Departamento de Matemática, Universidad de Los Andes, Mérida (1993).
- [5] J.R. Astudillo. *Las Funciones Circulares, Hiperbólicas y Elípticas Fundamentadas en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2006).
- [6] J.R. Astudillo. *Sobre un Modelo para Dos Poblaciones, con Transiciones Dinámicas entre Competencia, Parasitismo y Mutualismo*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2013).
- [7] A. Baricz, D.J. Maširević & T.K. Pogány. *Series de Bessel and Kummer-Type Functions*. Springer (2017).
- [8] C.M. Bender & S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, Nueva York (1978).
- [9] N. Bleistein & R.A. Handelsman. *Asymptotic Expansions of Integrals*. Dover, Nueva York (1986).
- [10] A. Bohé. Free layers in a singularly perturbed boundary value problem. *SIAM J. Appl. Anal.* **21**(5): 1264–1280 (1990).
- [11] A. Bohé. The existence of supersensitive boundary value problems. *Meth. Appl. Anal.* **3**: 318–334 (1996).
- [12] A.W. Bush. *Perturbation Methods for Engineers and Scientists*. CRC Press, Boca Raton (1992).
- [13] G.F. Carrier & C.E. Pearson. *Ordinary Differential Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1991).

- [14] M. Cavani. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. IV T-ForMa, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2003).
- [15] K.W. Chang & F.A. Howes. *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application*. Springer-Verlag, Nueva York (1984).
- [16] L.P. Cook & W. Eckhaus. Resonance in a boundary value problem of singular perturbation type. *Stud Appl. Math.* **52**(2): 129–139 (1973).
- [17] E.T. Copson. *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press, Cambridge (1976).
- [18] L.J. Córdova Díaz. *Interacción de Solitones cuyas Diferencias de Altura son Parámetros Pequeños*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2003).
- [19] L. Córdova & J. Laforgue. Interacción de tres solitones KdV con diferencias de altura pequeñas. Trabajo presentado en el II Congreso Internacional de Simulación Numérica y Computacional, Universidad De Oriente, Cumaná (2007).
- [20] J. Cronin & R.E. O’Malley, Jr. *Analyzing Multiscale Phenomena Using Singular Perturbation Methods*. American Mathematical Society, Providence (1999).
- [21] N.G. de Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Dover, Nueva York (1981).
- [22] P.P.N. de Groen. A singular perturbation problem of turning point type. En: W. Eckhaus (editor) *New Developments in Differential Equations*: 117–124. North-Holland, Amsterdam (1976).
- [23] P.P.N. de Groen. Spectral properties of second-order singularly perturbed boundary value problems with turning points. *J. Math. Anal. Appl.* **57**: 119–149 (1977).
- [24] P.P.N. de Groen. The nature of the “Ackerberg-O’Malley resonance”. En: W. Eckhaus & E.M. de Jager (editores) *Differential Equations and Applications*: 85–92. North-Holland, Amsterdam (1978).
- [25] P.P.N. de Groen. The nature of resonance in a singular perturbation problem of turning point type. *SIAM J. Math. Anal.* **11**(1): 1–22 (1980).
- [26] P.P.N. de Groen. The singularly perturbed turning-point problem: a spectral approach. En: R.E. Meyer & S.V. Parter (editores) *Singular Perturbations and Asymptotics*: 149–172. Academic Press, Nueva York (1980).
- [27] E.M. de Jager & J. Furu. *The Theory of Singular Perturbations*. North-Holland, Amsterdam (1996).

- [28] P. De Maesschalck. Ackerberg-O'Malley resonance in boundary value problems with a turning point of any order. *Comm. Pure Appl. Anal.* **6**(2): 311–333 (2007).
- [29] R.B. Dingle. *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Academic Press, Londres (1973).
- [30] F.W. Dorr. Some examples of singular perturbation problems with turning points. *SIAM J. Math. Anal.* **1**(2): 141–146 (1970).
- [31] F.W. Dorr, S.V. Parter & L.F. Shampine. Applications of the maximum principle to singular perturbation problems. *SIAM Review* **15**: 43–88 (1973).
- [32] W. Eckhaus. *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*. North-Holland, Amsterdam (1973).
- [33] W. Eckhaus. *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations*. North-Holland, Amsterdam (1979).
- [34] W. Eckhaus. Fundamental concepts of matching. *SIAM Review* **36**(3): 431–439 (1994).
- [35] A. Erdélyi. *Asymptotic Expansions*. Dover, Nueva York (1956).
- [36] L.E. Fraenkel. On the method of matched asymptotic expansions. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **65**(1): 209–231 & 233–261 (1969).
- [37] A. Fruchard & R. Schäfke. Overstability and resonance. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **53**(1): 227–264 (2003).
- [38] A. Fruchard & R. Schäfke. Classification of resonant equations. *J. Diff. Equa.* **207**: 360–391 (2004).
- [39] A. Fruchard & R. Schäfke. *Composite Asymptotic Expansions*. Springer-Verlag, Berlín Heidelberg (2013).
- [40] J. Fu-ru. On the boundary value problems for a class of ordinary differential equations with turning points. *Appl. Math. Mech.* **1**(2): 211–223 (1980).
- [41] J. Fu-ru. On necessary conditions for resonance in turning point problems for ordinary differential equations. *Appl. Math. Mech.* **10**(4): 289–296 (1989).
- [42] J. Fu-ru. On the boundary value problems for ordinary differential equations with turning points. *Appl. Math. Mech.* **12**(2): 121–129 (1991).
- [43] A. Georgescu. *Asymptotic Treatment of Differential Equations*. Chapman & Hall, Londres (1995).



- [44] M. Georgiou & W.E. Olmstead. Some Fredholm equations with boundary layer resonance. *J. Appl. Math. Physics (ZAMP)* **42**: 460–467 (1991).
- [45] G.-M. Gie, M. Hamouda, C.-Y. Jung & R.M. Temam. *Singular Perturbations and Boundary Layers*. Springer, Cham (2018).
- [46] J. Grasman & B.J. Matkowsky. A variational approach to singularly perturbed boundary value problems for ordinary and partial differential equations with turning points. *SIAM J. Appl. Math.* **32**(3): 588–597 (1977).
- [47] J. Grasman & O.A. van Herwarden. *Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Applications*. Springer, Berlín (1999).
- [48] I.d.V. Guerra. *Solución de Problemas con Valores en la Frontera Mediante el Método de Disparo Lineal*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (1999).
- [49] M. Hermann & M. Saravi. *A First Course in Ordinary Differential Equations: Analytical and Numerical Methods*. Springer, New-Delhi (2014).
- [50] E.J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [51] M.H. Holmes. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, Nueva York (2013).
- [52] P.-F. Hsieh & Y. Sibuya. *Basic Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Nueva York (1999).
- [53] A.M. Il'in. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*. American Mathematical Society, Providence (1992).
- [54] H. Jeffreys. *Asymptotic Approximations*. Oxford University Press, Oxford (1968).
- [55] F.-r. Jiang & Q.-n. Jin. Asymptotic solutions of boundary value problems for third-order ordinary differential equations with turning points. *Appl. Math. Mech.* **22**(4): 394–403 (2001).
- [56] R.S. Johnson. *Singular Perturbation Theory: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*. Springer, Boston (2005).
- [57] C.-Y. Jung & R. Temam. Asymptotic analysis for singularly perturbed convection-diffusion equations with a turning point. *J. Math. Phys.* **48**, 065301 (2007).

- [58] W.L. Kath, C. Knessl & B.J. Matkowsky. A variational approach to nonlinear singularly perturbed boundary-value problems. *Stud. Appl. Math.* **77**: 61–88 (1987).
- [59] W.G. Kelley & A.C. Peterson. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. Springer, Nueva York (2010).
- [60] J. Kevorkian & J.D. Cole. *Perturbation Methods in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Nueva York (1981).
- [61] J. Kevorkian & J.D. Cole. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. Springer-Verlag, Nueva York (1996).
- [62] A.C. King, J. Billingham & S.R. Otto. *Differential Equations: Linear, Non-linear, Ordinary, Partial*. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [63] N. Kopell. A geometric approach to boundary layer problems exhibiting resonance. *SIAM J. Appl. Math.* **37**(2): 436–458 (1979).
- [64] N. Kopell. The singularly perturbed turning-point problem: a geometric approach. En: R.E. Meyer & S.V. Parter (editores) *Singular Perturbations and Asymptotics*: 173–190. Academic Press, Nueva York (1980).
- [65] H.-O. Kreiss. Resonance for singular perturbation problems. *SIAM J. Appl. Math.* **41**(2): 331–344 (1981).
- [66] H.O. Kreiss & S.V. Parter. Remarks on singular perturbations with turning points. *SIAM J. Math. Anal.* **5**(2): 230–251 (1974).
- [67] J. Laforgue. *Using Exponential Asymptotics to Study the Metastability and Supersensitivity of Shocks and Transition Layers*. Disertación doctoral, Departamento de Matemáticas Aplicadas, Universidad de Washington, Seattle (1994).
- [68] J. Laforgue. Movimiento exponencialmente lento de una capa interior de transición en un modelo con reacción, convección y difusión. Trabajo presentado en las VIII Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana, Universidad Central de Venezuela, Caracas (1995).
- [69] J. Laforgue. Estructuras contrastadas metaestables para una ecuación biestable singularmente perturbada. Trabajo presentado en el Seminario del Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Universidad de Los Andes, Mérida (1995).
- [70] J. Laforgue. Supersensibilidad de la capa interior de transición en un modelo con reacción, convección y difusión. Trabajo presentado en la VI Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad Simón Bolívar, Caracas (1995).

- [71] J. Laforgue. Sobre un modelo sencillo de transición de fases. En: A.D. Rueda, J. Guíñez & G. Oquendo (editores) *Segundo Coloquio sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Mayo 1995 I*: 27–32. La Universidad del Zulia, Maracaibo (1996).
- [72] J. Laforgue. Metastable dynamics for integrodifference model in ecology. Trabajo presentado en el Encuentro sobre Asintótica Exponencial y Ecuación Diferencial, Centro Internacional de Encuentros Matemáticos, Marseille-Luminy, Francia (1996).
- [73] J. Laforgue. Agregación metaestable en un modelo con tiempo discreto. *Divulg. Math.* **5**(1/2): 21–27 (1997).
- [74] J. Laforgue. Frente e impulso metaestables con una ecuación cuántica singularmente perturbada. *Saber* **9**(2): 14–18 (1997).
- [75] J. Laforgue. Metaestabilidad y supersensibilidad para la resonancia de capas de frontera. Trabajo presentado en las X Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana, Universidad Simón Bolívar, Caracas (1997).
- [76] J. Laforgue. Resonancia y evolución metaestable para la ecuación de Hermite. Trabajo presentado en la III Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad de Carabobo, Valencia (1997).
- [77] J. Laforgue. Odd-order turning point: resonance and dynamic metastability. En: A.D. Rueda & J. Guíñez (editores) *Tercer Congreso sobre Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Mayo 1997 II*: 17–23. La Universidad del Zulia, Maracaibo (1998).
- [78] J. Laforgue. Supersensibilidad en un modelo de agregación con tiempo discreto. *Divulg. Math.* **6**(2): 113–119 (1998).
- [79] J. Laforgue. Exponential closeness to a repelling slow river and supersensitive shock or corner layers. Trabajo presentado en el Encuentro sobre Asintóticas para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Centro Internacional de Encuentros Matemáticos, Marseille-Luminy, Francia (1998).
- [80] J. Laforgue. Uso de un método tipo WKB en el estudio de la onda metaestable para una clase de ecuaciones de evolución dominadas por la convección, Trabajo presentado en la III Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad Rafael Bellosillo Chacín, Maracaibo (1998).
- [81] J. Laforgue. Determinación de las soluciones asintóticas no quiméricas mediante un estudio de dinámica metaestable. Trabajo presentado en las XII Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana, Universidad Central de Venezuela, Caracas (1999).

- [82] J. Laforgue. Resolución de problemas de perturbaciones singulares. Conferencia plenaria en el III Encuentro Nacional de Profesores de Matemáticas de los Institutos Universitarios de Tecnología y Colegios Universitarios de Venezuela, I.U.T.-Cumaná (1999).
- [83] J. Laforgue. Estudio asintótico de un impulso metaestable para una ecuación con un término no local. *Pro Math.* **14**(27-28): 13–23 (2000).
- [84] J. Laforgue. Sobre el modelo para autocatalisis de Gray y Scott (en una dimensión espacial). Trabajo presentado en las XIII Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana, Universidad de Carabobo, Valencia (2000).
- [85] J. Laforgue. Cálculo asintótico y numérico de la interfase metaestable para la ecuación  $\varepsilon^2 u_{xx} + \varepsilon uu_x + u(1 - u^2)$ . Trabajo presentado en la L Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad Simón Bolívar, Caracas (2000).
- [86] J. Laforgue. *Frentes de Onda Casi Estacionarios en un Modelo General de Difusión, Convección y Reacción: Análisis Asintóticos y Resultados Numéricos*. Trabajo de Ascenso, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2001).
- [87] J. Laforgue. Metastability in singularly perturbed problem. Trabajo presentado en el VI Simposio de Matemática y IV Conferencia Italo-Latinoamericana de Matemática Aplicada e Industrial, Palacio de Convenciones, La Habana, Cuba (2001).
- [88] J. Laforgue. Interfase casi estacionaria con la ecuación de Cahn e Hilliard. Trabajo presentado en el IV Congreso Científico, Universidad De Oriente, Cumaná (2001).
- [89] J. Laforgue. Estudio de un frente de onda casi estacionario. Trabajo presentado en las XIV Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana, Universidad Centro Occidental “Lisandro Alvarado”, Barquisimeto (2001).
- [90] J. Laforgue. Análisis asintótico y numérico de un frente de onda casi estacionario, en una ecuación de reacción, advección y difusión. Trabajo presentado en el Taller de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Centro de Investigaciones de Matemática Aplicada, La Universidad del Zulia, Maracaibo (2001).
- [91] J. Laforgue. Capa de transición con dinámica algebraicamente metaestable. Trabajo presentado en la LI Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal (2001).

- [92] J. Laforgue. Interfases casi estacionarias con una generalización de la ecuación de Cahn e Hilliard. Trabajo presentado en las XV Jornadas de Matemáticas de la Asociación Matemática Venezolana, La Universidad del Zulia, Maracaibo (2002).
- [93] J. Laforgue. *Métodos de Perturbaciones para Ecuaciones Algebraicas y Diferenciales*. XI T-ForMa, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2011).
- [94] J.G. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. Supersensitive boundary value problems. En: H.G. Kaper & M. Garbey (editores) *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*: 215–223. Kluwer, Dordrecht (1993).
- [95] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. The supersensitivity of the shock layer location for Burger's equation. Trabajo presentado en las I Jornadas Panamericanas de Matemáticas Aplicadas y Computacionales, Universidad Simón Bolívar, Caracas (1993).
- [96] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. On the motion of viscous shocks and the supersensitivity of their steady-state limits. *Meth. Appl. Anal.* **1**(4): 465–487 (1994).
- [97] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. Shock layer movement for Burgers equation. *SIAM J. Appl. Math.* **55**(2): 332–347 (1995).
- [98] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. Viscous shock motion for advection-diffusion equations. *Stud. Appl. Math.* **95**(2): 147–170 (1995).
- [99] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. On a Metastable, supersensitive travelling front for parabolic equations. Trabajo presentado en el Encuentro sobre Problemas y Métodos en Perturbaciones Singulares, Centro Internacional de Encuentros Matemáticos, Marseille-Luminy, Francia (1995).
- [100] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. On the metastable and supersensitive motion of shocks for viscous conservation laws in one space dimension. En: T.S. Angell, L.P. Cook, R.E. Kleinman & W.E. Olmstead (editores) *Nonlinear Problems in Applied Mathematics*: 169–176. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1996).
- [101] J.G.L. Laforgue & R.E. O'Malley, Jr. Exponential asymptotics, the viscous Burgers equation, and standing wave solutions for a reaction-advection-diffusion model. *Stud. Appl. Math.* **102**(2): 137–172 (1999).
- [102] J.G.L. Laforgue, R.E. O'Malley, Jr. & M.J. Ward. Metastable travelling wave solutions of singularly perturbed reaction-diffusion equations. *Euro. J. Appl. Math.* **9**(4): 397–416 (1998).

- [103] P. Lagerstrom. *Matched Asymptotic Expansions - Ideas and Techniques*. Springer-Verlag, Nueva York (1988).
- [104] P.A. Lagerstrom & R.G. Casten. Basic concepts underlying singular perturbation techniques. *SIAM Review* **14**(1): 63–120 (1972).
- [105] W.D. Lakin. Boundary value problems with a turning point. *Stud. Appl. Math.* **51**(3): 261–275 (1972).
- [106] C.G. Lange. On spurious solutions of singular perturbation problems. *Stud. Appl. Math.* **68**: 227–257 (1983).
- [107] J.-Y. Lee & M.J. Ward. On the asymptotic and numerical analyses of exponentially ill-conditioned singularly perturbed boundary value problems. *Stud. Appl. Math.* **94**: 271–326 (1995).
- [108] G.N. Lewis. Turning point problems and resonance. *IMA J. Appl. Math.* **28**: 169–183 (1982).
- [109] C.H. Lin. The sufficiency of Matkowsky-condition in the problem of resonance. *Trans. Amer. Math. Soc.* **278**(2): 647–670 (1983).
- [110] P. Lin & R.E. O’Malley, Jr. The numerical solution of a challenging class of turning point problems. *SIAM J. Sci. Comput.* **25**(3): 927–941 (2003).
- [111] J.L. Lions. *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*. Springer-Verlag, Berlín Heidelberg (1973).
- [112] M. Lizana. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Universidad de Los Andes, Mérida (2000).
- [113] S.A. Lomov. *Introduction to the General Theory of Singular Perturbations*. American Mathematical Society, Providence (1992).
- [114] A.D. MacGillivray. A method for incorporating transcendently small terms into the method of matched asymptotic expansions. *Stud. Appl. Math.* **99**: 285–310 (1997).
- [115] B.J. Matkowsky. On boundary layer problems exhibiting resonance. *SIAM Review* **17**(1): 82–100 (1975). Errata. *SIAM Review* **18**(1): 112–112 (1976).
- [116] R. McKelvey & R. Bohac. Ackerberg-O’Malley resonance revisited. *Rocky Mountain J. Math.* **6**: 637–650 (1976).
- [117] R.E. Meyer & S.V. Parter. *Singular Perturbations and Asymptotics*. Academic Press, Nueva York (1980).

- [118] M.d.V. Millán Guardia. *El Método de Euler Cuando el Problema de Valor Inicial Tiene Múltiples Soluciones*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2007).
- [119] M.d.V. Millán Guardia. *Método Numérico de las Características*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2011).
- [120] J.J.H. Miller. *Singular Perturbation Problems in Chemical Physics: Analytic and Computational Methods*. John Wiley & Sons, Nueva York (1997).
- [121] J.D. Murray. *Asymptotic Analysis*. Springer-Verlag, Nueva York (1984).
- [122] A.H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons, Nueva York (1981).
- [123] J.C. Neu. *Singular Perturbation in the Physical Sciences*. American Mathematical Society, Providence (2015).
- [124] K. Nijjima. On the behavior of solutions of a singularly perturbed boundary value problem with a turning point. *SIAM J. Math. Anal.* **9**(2): 298–311 (1978).
- [125] K. Nijjima. Approximate solutions of singular perturbation problems with a turning point. *Funkcialaj Ekvacioj* **24**: 259–280 (1981).
- [126] F.W.J. Olver. *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, Nueva York (1974).
- [127] F.W.J. Olver. Uniform asymptotic expansions and singular perturbations. *SIAM-AMS Proceedings* **10**: 105–117 (1976).
- [128] F.W.J. Olver. Sufficient conditions for Ackerberg-O'Malley resonance. *SIAM J. Math. Anal.* **9**(2): 328–355 (1978).
- [129] R.E. O'Malley, Jr. Topics in singular perturbations. *Advances in Math.* **2**: 365–470 (1968).
- [130] R.E. O'Malley, Jr. On boundary value problems for a singularly perturbed differential equation with a turning point. *SIAM J. Math. Anal.* **1**(4): 479–490 (1970).
- [131] R.E. O'Malley, Jr. *Introduction to Singular Perturbations*. Academic Press, Nueva York (1974).
- [132] R.E. O'Malley, Jr. *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Nueva York (1991).

- [133] R.E. O'Malley, Jr. Stiff differential equations and singular perturbations. Australian National University, Mathematics Research Report No. **MRR 032-96** (1996).
- [134] R.E. O'Malley, Jr. *Thinking About Ordinary Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [135] R.E. O'Malley, Jr. Figuring out singular perturbations after a first course in ODEs. En: J. Cronin & R.E. O'Malley, Jr. (editores) *Analyzing Multiscale Phenomena Using Singular Perturbation Methods* – A.M.S. (American Mathematical Society) Short Course January 5-6, 1998 Baltimore, Maryland. *Proceed. Symposia Appl. Math.* **56**: 1–22 (1999).
- [136] R.E. O'Malley, Jr. Mahony's intriguing stiff equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **40**: 469–474 (1999).
- [137] R.E. O'Malley, Jr. Give your ODEs a singular perturbation! *J. Math. Anal. Appl.* **251**: 433–450 (2000).
- [138] R.E. O'Malley, Jr. Naive singular perturbation theory. *Math. Models Meth. Appl. Sci.* **11**(1): 119–131 (2001).
- [139] R.E. O'Malley, Jr. Singularly perturbed linear two-point boundary value problems. *SIAM Review* **50**(3): 459–482 (2008).
- [140] R.E. O'Malley. *Historical Developments in Singular Perturbations*. Springer, Cham (2014).
- [141] R.E. O'Malley, Jr. & E. Kirkinis. A survey in mathematics for industry: Two-timing and matched asymptotic expansions for singular perturbation problems. *Euro. J. Appl. Math.* **22**(6): 613–629 (2011).
- [142] R.E. O'Malley, Jr. & M.J. Ward. Exponential asymptotics, boundary layer resonance, and dynamic metastability. En: L.P. Cook, V. Roytburd & M. Tulin (editores) *Mathematics is for Solving Problems*: 189–203. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1996).
- [143] W. Paulsen. *Asymptotic Analysis and Perturbation Theory*. CRC Press, Boca Raton (2014).
- [144] C.E. Pearson. On a differential equation of boundary layer type. *J. Math. Phys.* **47**: 134–154 (1968).
- [145] C.E. Ramos Velásquez. *Enfoque de la Teoría de Perturbaciones Singulares para la Hipótesis del Estado Casi Estacionario de la Bioquímica*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2007).



- [146] C.E. Ramos Velásquez. *Generalización de la Cinética de Michaelis y Menten en Caso Cooperativo y en Caso Competitivo: Fundamento en Perturbaciones Singulares*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2012).
- [147] J.C. Ramos Fernández. *Existencia de Soluciones con Capas de Frontera para Sistemas Casilineales Débilmente Acoplados*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2000).
- [148] J. Ramos & J. Laforgue. Capas de choque para un problema vectorial con un parámetro pequeño. Trabajo presentado en la III Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad de Carabobo, Valencia (1997).
- [149] J. Ramos & J. Laforgue. Un teorema para la existencia de soluciones vectoriales con capas de frontera alternas. *Saber* **13**(2): 127–132 (2001).
- [150] L.G. Reyna & M.J. Ward. On exponential ill-conditioning and interior layer behavior. *J. Num. Func. Anal. Optim.* **16**(4): 475–500 (1995).
- [151] O.M. Serrano Sucre. *Comportamiento de las Soluciones en Modelos de Crecimiento con Coeficientes Variables*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2018).
- [152] E. Shchepakina, V. Sobolev & M.P. Mortell. *Singular Perturbations: Introduction to System Order Reduction Methods with Applications*. Springer, Cham (2014).
- [153] B.K. Shivamoggi. *Perturbation Methods for Differential Equations*. Birkhäuser, Boston (2003).
- [154] Y. Sibuya. A theorem concerning uniform simplification at a transition point and the problem of resonance. *SIAM J. Math. Anal.* **12**(5): 653–668 (1981).
- [155] G.F. Simmons & S.G. Krantz. *Differential Equations: Theory, Technique and Practice*. McGraw-Hill, Nueva York (2007).
- [156] L.A. Skinner. Uniform solution of boundary layer problems exhibiting resonance. *SIAM J. Appl. Math.* **47**(2): 225–231 (1987).
- [157] L.A. Skinner. *Singular Perturbation Theory*. Springer, Nueva York (2011).
- [158] D.R. Smith. *Singular-Perturbation Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [159] R. Srinivasan. A variational principle for the Ackerberg-O'Malley resonance problem. *Stud. Appl. Math.* **79**: 271–289 (1988).

- [160] Y.A. Subero Santana. *Sobre un Modelo Ecológico para Colonias de Abejas Sometidas a Estrés No Letal*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2017).
- [161] Á.L. Torcatt Sánchez. *Un Modelo en Perturbaciones Singulares: El Problema de Lagerstrom*. Trabajo de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad De Oriente, Cumaná (2004).
- [162] Á. Torcatt & J. Laforgue. Problemas de perturbación irregular. Trabajo presentado en la L Convención Anual de la Asociación Venezolana para el Avance de la Ciencia, Universidad Simón Bolívar, Caracas (2000).
- [163] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, Stanford (1975).
- [164] A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov & L.V. Kalachev. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1995).
- [165] F. Verhulst. *Methods and Applications of Singular Perturbations - Boundary Layers and Multiscale Dynamics*. Springer, Nueva York (2005).
- [166] M.J. Ward. Eliminating indeterminacy in singularly perturbed boundary value problems with translation invariant potentials. *Stud. Appl. Math.* **87**: 95–134 (1992).
- [167] M.J. Ward. Exponential asymptotics and convection-diffusion-reaction models. En: J. Cronin & R.E. O'Malley, Jr. (editores) *Analyzing Multiscale Phenomena Using Singular Perturbation Methods* – A.M.S. (American Mathematical Society) Short Course January 5-6, 1998 Baltimore, Maryland. *Proceed. Symposia Appl. Math.* **56**: 151–184 (1999).
- [168] W.R. Wasow. *On Boundary Layer Problems in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Disertación doctoral, New York University, Nueva York (1941). Reimpresión: MRC Technical Summary Report #2244, Mathematics Research Center, Universidad de Wisconsin, Madison (1981).
- [169] W.R. Wasow. *Linear Turning Point Theory*. Springer-Verlag, Nueva York (1984).
- [170] W.R. Wasow. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Dover, Nueva York (1987).
- [171] A.M. Watts. A singular perturbation problem with a turning point. *Bull. Austral. Math. Soc.* **5**: 61–73 (1971).

- [172] M. Williams. Another look at Ackerberg-O'Malley resonance. *SIAM J. Appl. Math.* **41**(2): 288–293 (1981).
- [173] M. Williams. Asymptotic exit time distributions. *SIAM J. Appl. Math.* **42**(1): 149–154 (1982).
- [174] R. Wong. *Asymptotic Approximations of Integrals*. Academic Press, San Diego (1989).
- [175] R. Wong & H. Yang. On the Ackerberg-O'Malley resonance. *Stud. Appl. Math.* **110**: 157–179 (2003).
- [176] E. Zauderer. Boundary value problems for a second order differential equation with a turning point. *Stud. Appl. Math.* **51**(4): 411–413 (1972).
-

## HOJA DE METADATOS

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 1/6

<b>Título</b>	RESOLUCIÓN DE LA INDETERMINACIÓN EN LA RESONANCIA DE ACKERBERG Y O'MALLEY
<b>Subtítulo</b>	

### Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Laforgue, Jacques Gaston	CVLAC	13.498.503
	e-mail	laforgue007@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

### Palabras o frases claves:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Perturbaciones Singulares
Expansiones Asintóticas Empatadas

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 2/6

### Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias Básicas	Matemáticas

### Resumen (abstract):

Se presenta, en su contexto, un método nuevo y simple (basado en técnicas clásicas de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) para resolver la indeterminación sobre la amplitud de la resonancia de capa de frontera que ocurre al aplicarse el método de expansiones asintóticas empatadas al problema singularmente perturbado correspondiente.

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 3/6

**Contribuidores:**

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

**Fecha de aprobación:**

Año Mes Día

2020		
------	--	--

**Lenguaje:** spa

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
ASCENSO-Titular-JGL.pdf	Application/pdf

Alcance:

Espacial: \_\_\_\_\_ Nacional \_\_\_\_\_ (Opcional)

Temporal: \_\_\_\_\_ Temporal \_\_\_\_\_ (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo:

\_\_\_\_\_ Ascenso en el escalafón \_\_\_\_\_

Nivel Asociado con el Trabajo: \_\_\_\_\_ Profesor Titular \_\_\_\_\_

Área de Estudio: \_\_\_\_\_ Matemáticas \_\_\_\_\_

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

\_\_\_\_\_ Universidad de Oriente Núcleo de Sucre \_\_\_\_\_



Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
CONSEJO UNIVERSITARIO  
RECTORADO

CUN°0975

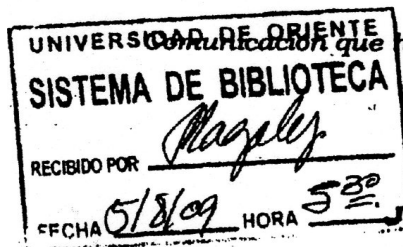
Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano  
**Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ**  
Vicerrector Académico  
Universidad de Oriente  
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Leído el oficio SIBI - 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.



Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

**JUAN A. BOLANOS CUNTELO**  
Secretario



C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/manuja

Apartado Correos 094 / Telfa: 4008042 - 4008044 / 8008045 Telefax: 4008043 / Cumaná - Venezuela

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 6/6

**Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009):**

“Los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo del Núcleo respectivo, quién deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización.”



---

Dr. Jacques G. Laforgue

Autor