UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CARACTERIZACIONES DE FUNCIONES ABIERTAS, CERRADAS Y CONTINUAS UTILIZANDO IDEALES TOPOLÓGICOS

(Modalidad: Tesis de Grado)

RAMÓN DAVID DÍAZ YENDYS

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

CUMANÁ, 2021

CARACTERIZACIONES DE FUNCIONES ABIERTAS, CERRADAS Y CONTINUAS UTILIZANDO IDEALES TOPOLÓGICOS

APROBADO POR

Dr. Ennis Rosas

Asesor Académico

Dr. Henry Ramírez

Jurado Principal

MsC. Moisés Rojas

Jurado Principal

DEDICATORIA

A mi familia Díaz Yendis, en especial a mis sobrinos, Daniel Andres, Rubén Darío, Sergio Alejandro y Kevin Samuel, espero servirle de ejemplo para que en el futuro logren todas sus metas.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios por bendecirnos la vida, por ser mi guía y fortaleza en los momentos más difíciles.

A mis padres, Elba Yendis y Ramón Díaz, por su amor y gran apoyo incondicional en toda mi vida.

A mi novia Mónica Guevara por ser mi norte y motivación para continuar. Al profesor Ennis Rafael Rosas, por su gran ayuda como asesor. También al profesor Andrés Malaver. Y por supuesto, a la Universidad de Oriente, en especial al Departamento de Matemáticas por haber compartido sus conocimientos a lo largo de mi preparación profesional.

ÍNDICE

RESUMEN

Dado un espacio topológico (X, τ) sobre el que se considera un ideal $\mathcal{I}$, se estudian y obtienen nuevas caracterizaciones de funciones $\mathcal{I}$ -abiertas, $\mathcal{I}$ -cerradas e $\mathcal{I}$-continuas utilizando el concepto de función local y función inducida $f^{\sharp}$. Se muestra un resultado más fuerte en el caso de topología compatible para funciones $\mathcal{I}$-cerradas que también pueden descartarse en el caso de subconjuntos $*$-densos en si mismos. Se generalizan algunos resultados conocidos y finalmente se dan varias propiedades para las funciones $\mathcal{I}$-continuas en términos de funciones inyectivas y conjuntos saturados.

INTRODUCCIÓN

En [7] Noorie y Bala, para una función $f : X \to Y$, utilizan para cualquier subconjunto E de X, los conjuntos de la forma $f^\sharp(E) = \{f^{-1}(y) : y \in Y \text{ y } f^{-1}(y) \subseteq E\}$, para obtener una interesante y novedosa caracterización de funciones abiertas, cerradas y continuas. Este tipo de conjunto se menciona en el presente trabajo como función inducida y se denota por $f^\sharp$. Por otro lado, el estudio de las propiedades de funciones con respecto a un ideal y una topología son ya conocidos en la literatura. En 1966, Kuratowski [8], utiliza la idea de ideales sobre espacios topológicos, para generalizar la noción de clausura de un conjunto, introduciendo el concepto de función local con respecto a un ideal y una topología. Posteriormente, en 1990, Jankovic y Hamlett [4], estudian ciertas propiedades locales y globales que involucran la noción de ideal sobre un espacio topológico. En particular, estos autores definen el operador clausura de Kuratowski, de la siguiente manera, $cl^*(A) = A \cup A^*$[9], donde A^* es la función local respecto a la topología τ^* inducida en el espacio a través de un ideal y demuestran que la topología τ^* generada por cl^* es más fina que la topología τ del espacio. En 1986, Kanicwski y Piotrowski[5], introducen el concepto de función $\mathcal{I}$-continua y en 1992, Hamlett y Rose[2], introducen el concepto de función $\mathcal{I}$-abierta. En 2006, Sivaraj y Renuka Devi[8], obtienen varias caracterizaciones y propiedades para estos tipos de funciones utilizando conjuntos que resulten de imágenes de f y f^{-1}.

La noción de función local y función inducida mencionadas anteriormente, se utilizan en el texto para obtener nuevas caracterizaciones de funciones $\mathcal{I}$-abiertas, estas caracterizaciones inducen una generalización de los resultados de [8], donde se descarta la hipótesis de biyección y se permite introducir de manera similar la noción de funciones $\mathcal{I}$-cerradas. Para el caso de la topología compatible con un ideal, se dan nuevas caracterizaciones para este tipo de funciones mediante la imagen f y la función local A^*. También se muestra que la condición de compatibilidad se puede descartar utilizando subconjuntos $*$-densos en sí mismos y finalmente se caracterizan las funciones $\mathcal{I}$-continuas en términos de funciones inyectivas y conjuntos saturados.

El aporte principal de este trabajo es la presentación organizada y detallada de resultados relacionados con las nociones de las funciones $\mathcal{I}$-abiertas, $\mathcal{I}$-cerradas e $\mathcal{I}$-continuas. Además, se proporcionan ejemplos e ilustraciones que ayudan a mejorar la comprensión del tema en cuestión.

CAPÍTULO 1
NOCIONES PRELIMINARES

En este capítulo se describirá de manera detallada las nociones básicas estrictamente necesarias para el desarrollo de este trabajo. Se introducen ciertas clases de funciones como lo es la función local y la función inducida $f^\sharp$, y se estudian algunas propiedades relativas a estas clases de funciones que serán empleadas en los próximos capítulos. A lo largo de este documento para un subconjunto A de X, $int(A)$ y $cl(A)$ indicarán el interior de A y la clausura de A en (X, τ), de igual manera, $cl^*(A)$ e $int^*(A)$ indicarán el interior de A y la clausura de A en (X, τ^*) respectivamente y A^C denotará el complemento de A en X. Para más detalles de los temas tratados en este capítulo se recomienda consultar [2], [4], [7] y [8].

Definición 1.1. *Una topología sobre un conjunto X, es una colección τ no vacía de subconjuntos de X que cumple con las siguientes propiedades:*

(1) *$\emptyset$ y X están en τ.*

(2) *La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.*

(3) *La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.*

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico.

Hablando con propiedad, un espacio topológico es un par ordenado (X, τ), formado por un conjunto X y una topología τ sobre X. Si (X, τ) es un espacio topológico, un subconjunto U de X se llamará conjunto abierto de X, si U pertenece a la colección τ. Usando esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X, llamados conjuntos abiertos, tales que $\emptyset$ y X son abiertos, las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Veamos algunos ejemplos de espacios topológicos.

Ejemplo 1.1. *Sea $X \neq \emptyset$, las siguientes colecciones de subconjuntos de X son topologías sobre X.*

(1) *Topología trivial.* $\tau_t = \{\emptyset, X\}$.

(2) *Topología cofinita.* $\tau_{CF} = \{\ O \subseteq X : X - O \text{ finito }\} \cup \{\emptyset\}$.

(3) *Topología conumerable.* $\tau_{CN} = \{O \subseteq X : X - O \text{ numerable }\} \cup \{\emptyset\}$.

(4) *Topología fuerte.* $P_o \in X$ *punto fijo,* $\tau_f = \{O \subseteq X : P_o \notin O \text{ ó } X - O \text{ finito }\}$.

(5) *Topología discreta.* $\tau_d := P(X)$.

Ejemplo 1.2. *Sea X un conjunto de tres elementos, $X = \{a, b, c\}$, la siguiente colección de subconjuntos de X es una topología sobre X, $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}\}$.*

Definición 1.2. *Suponga que τ y τ' son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\tau' \supset \tau$, se dice que τ' es más fina que τ; es decir, τ' contiene propiamente a τ.*

Ejemplo 1.3. *La topología discreta τ_d es más fina que cualquier topología en X, mientras que cualquier topología en X es más fina que la topología trivial τ_t. Obviamente,*

$$\tau_t \subseteq \tau_{CF} \subseteq \tau_{CN} \subseteq \tau_d.$$

A continuación, se introducen algunos conceptos básicos asociados a espacios topológicos.

Definición 1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico, se dice que un subconjunto A de X es un conjunto cerrado si su complemento $X - A$ es un conjunto abierto.*

Ejemplo 1.4. *Considere $\mathbb{R}$ con su topología usual. El subconjuto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es cerrado porque su complemento*

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \text{ es abierto.}$$

Definición 1.4. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Dado un subconjunto* A *de* X*, se define el interior de* A*, denotado por* $int(A)$*, como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en* A*, y la clausura de* A*, denotado por* $cl(A)$ *como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a* A*. Obviamente, el* $int(A)$ *es un conjunto abierto y* $cl(A)$ *es un conjunto cerrado, más aún,*

$$int(A) \subset A \subset cl(A)$$

A *es un conjunto abierto, si y sólo si* $A = int(A)$*, mientras que,* A *es un conjunto cerrado, si y sólo si* $A = cl(A)$*.*

Ejemplo 1.5. *Sea* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, si* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *es el conjunto de los números racionales. Entonces* $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$ *e* $int(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$*, ya que cada intervalo abierto contiene elementos de* $\mathbb{Q}$ *y de* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$*.*

Este ejemplo muestra que:

$$int(A \cup B) \neq int(A) \cup int(B).$$

Para cualesquiera subconjuntos A y B de un espacio topológico (X, τ), los siguientes enunciados se satisfacen:

(1) $int(A) \subset A$.

(2) A es abierto si, y sólo si, $A = int(A)$.

(3) $int(int(A)) = int(A)$.

(4) $A \subset B \Rightarrow int(A) \subset int(B)$.

(5) $int(\emptyset) = \emptyset$, $int(X) = X$.

(6) $int(A) \cap int(B) = int(A \cap B)$.

(7) $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$.

(8) $int(A \cup B) \nsubseteq int(A) \cup int(B)$.

(9) $int(A) = (cl(A^C))^C$.

(10) $cl(\emptyset) = \emptyset$, $cl(X) = X$.

(11) $A \subset cl(A)$.

(12) Si $A \subseteq B$, entonces $cl(A) \subseteq cl(B)$.

(13) $cl(cl(A)) = cl(A)$.

(14) $cl(A \cup B) = cl(A) \cup cl(B)$.

(15) $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$.

(16) $cl(A) \cap cl(B) \nsubseteq cl(A \cap B)$

La definición de clausura de un conjunto no da un método adecuado para encontrar las clausuras de conjuntos específicos, puesto que la colección de todos los conjuntos cerrados en X, como la colección de todos los conjuntos abiertos, es frecuentemente demasiado grande para trabajar con ella. Otro camino para describir la clausura de un conjunto, se da en el siguiente teorema.

Primero se introducirá alguna terminología conveniente. Se dice que un conjunto A intersecta a un conjunto B si $A \cap B$ es un conjunto no vacío.

Teorema 1.1. *Sea A un subconjunto del espacio topológico (X, τ), $x \in cl(A)$ si, y sólo si, para cada conjunto abierto U que contiene a x, el conjunto $U \cap A \neq \emptyset$.*

Prueba:

Suponga que $x \notin cl(A)$, entonces el conjunto $U = X - cl(A)$ es un conjunto abierto que contiene a x y no intersecta al conjunto A. Recíprocamente, si existe un conjunto abierto U que contiene a x y no intersecta al conjunto A, entonces $X - U$ es un conjunto cerrado que contiene al conjunto A. Por definición de clausura, se tiene que el conjunto $X - U$ debe contener a $cl(A)$; sin embargo, x no puede estar en $cl(A)$.

Seguidamente se introduce la noción de ideal sobre un espacio topológico (X, τ).

Definición 1.5. *Un ideal $\mathcal{I}$ sobre un espacio topológico (X, τ) es una colección no vacía de subconjuntos de X, que satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathcal{I}$ (hereditatia).*

(2) *Si $A \in \mathcal{I}$ y $B \in \mathcal{I}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$ (aditiva).*

Ejemplo 1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes colecciones son ideales sobre X:*

(1) *$\{\emptyset\}$ y $P(X) = \{A : A \subseteq X\}$.*

(2) *La colección $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos finitos de (X, τ).*

(3) *La colección $\mathcal{C}$ de todos los subconjuntos contables de (X, τ).*

(4) *La colección $\mathcal{N}$ de todos los subconjuntos nunca densos en (X, τ).*

(5) *La colección $\mathcal{DC}$ de todos los subconjuntos discretos cerrados en X.*

Observe que si $\mathcal{I}$ es un ideal, entonces $\emptyset \in \mathcal{I}$, puesto que $\emptyset \subset A$ para cualquier $A \in \mathcal{I}$.

A lo largo de este trabajo, la terna $(X, \tau, \mathcal{I})$ denotará un espacio topológico (X, τ) junto con ideal $\mathcal{I}$ sobre X y será simplemente llamado un espacio topológico dotado con un ideal.

Definición 1.6. *Sea $f : X \to Y$ cualquier función y A un subconjunto de X. La imagen del subconjunto $A \subset X$, denotado por $f(A)$, se define como el conjunto cuyos elementos son las imágenes de los elementos de A, mediante f, es decir,*

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

O bien,

$$f(A) = \{y \in Y / \ \exists \ x \in A \ y \ f(x) = y\}.$$

De acuerdo con lo anterior,

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists \ x \in A / f(x) = y.$$

Observación 1.1. *Si* $(X, \tau, \mathcal{I})$ *es un espacio topológico dotado con ideal,* (Y, δ) *cualquier espacio topológico y* $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta)$ *cualquier función, entonces* $f(\mathcal{I}) = \{f(I) : I \in \mathcal{I}\}$*, es un ideal en el espacio topológico* (Y, δ) *y se escribirá* $\mathcal{J}$ *en lugar de* $f(\mathcal{I})$*.*

Definición 1.7. *Sea* $f : X \to Y$ *cualquier función y* A *un subconjunto de* Y*. La imagen inversa del subconjunto* $A \subset Y$*, denotado por* $f^{-1}(A)$*, es el conjunto formado por todos los elementos de* X *cuyas imágenes pertenecen al conjunto* A*.*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X / f(x) \in A\}.$$

Es claro que,

$$x \in f^{-1}(A) \Longleftrightarrow f(x) \in A.$$

Definición 1.8. *Sea* A *cualquier subconjunto de* X*, el complemento de* A *denotado por* A^C*, es el conjunto formado por los elementos de* X *que no pertencen a* A*, es decir,*

$$x \in A^C \Longleftrightarrow x \notin A.$$

Para cualesquiera subconjutos A *y* B *de* X*, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(a) $(A^C)^C = A$*.*

(b) $A \subset B$ *entonces,* $B^C \subset A^C$*.*

(c) $A = B$ *entonces,* $B^C = A^C$*.*

(d) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$*.*

(e) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$*.*

Observación 1.2. *El complemento del conjunto vacío es el conjunto universal, es decir,* $\emptyset^C = U$, *y el complemento del conjunto universal es el conjunto vacío esto es,* $U^C = \emptyset$.

Puesto que uno de los objetivos principales de este trabajo es dar nuevas caracterizaciones de las funciones $\mathcal{I}$-abiertas, $\mathcal{I}$-cerradas e $\mathcal{I}$-continuas utilizando ideales topológicos, se introduce el concepto de función local, que será de utilidad en el desarrollo de las siguientes secciones de este capítulo.

Definición 1.9. *Sea* $(X, \tau, \mathcal{I})$ *un espacio topológico dotado con un ideal. Para cada subconjunto* A *de* X, *se define la función local de* A *con respecto a* $\mathcal{I}$ *y* τ *de la siguiente manera:*

$$A^*(\mathcal{I}, \tau) = \{x \in X : U \cap A \notin \mathcal{I}, \text{ para cada } U \in \tau(x)\},$$

donde $\tau(x) = \{U \in \tau : x \in U\}$.

Cuando no exista confusión, se escribirá A^* *en lugar de* $A^*(I, \tau)$.

En el siguiente ejemplo se muestra que, en general, X^* es un subconjunto propio de X.

Ejemplo 1.7. *Sea* $X = \{a, b, c\}$ *con la topología* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ *y el ideal* $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}\}$. *Observe que* $X^* = \{b, c\} \subsetneqq X$.

En el caso que $X^* = X$ se tiene la siguiente definición.

Definición 1.10. *Un espacio topológico* $(X, \tau, \mathcal{I})$ *se dice que es un espacio Hayashi-Samuels (abreviado E.H.S) si* $X^* = X$ *o equivalentemente,* $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$.

La noción de espacio Hayashi-Samuels también se menciona en la literatura denominando al ideal como τ-acotado o codenso.

Teorema 1.2. *Sea* $(X, \tau, \mathcal{I})$ *un espacio topológico dotado de un ideal. Entonces, para cada subconjunto* A *de* X *las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) *Si* $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, *entonces* $A^* = cl(A)$.

(2) *Si* $\mathcal{I} = P(X)$, *entonces* $A^* = \emptyset$.

Prueba:

(1) Suponga que $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, entonces $A^* = \{x \in X : U \cap A \notin \{\emptyset\}$ para cada $U \in \tau(x)\} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset$ para cada $U \in \tau(x)\} = cl(A)$.

(2) Suponga que $\mathcal{I} = P(X)$, entonces $A^* = \{x \in X : U \cap A \notin P(X)$, para cada $U \in \tau(x)\} = \{x \in X : U \cap A \nsubseteq X$, para cada $U \in \tau(x)\} = \emptyset$.

Lema 1.1. *Sea* $(X, \tau, \mathcal{I})$ *un espacio topológico dotado de un ideal. Si* A *y* B *son subconjuntos de* X, *entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(a) *Si* $A \subset B$, *entonces* $A^* \subset B^*$.

(b) $A^* = cl(A^*) \subseteq cl(A)$.

(c) $(A^*)^* \subset A^*$.

(d) $\emptyset^* = \emptyset$.

(e) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$.

(f) *Si* $U \in \tau$, *entonces* $U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subset (U \cap A)^*$

Prueba:

(a) Suponga que $x \notin B^*$, entonces existe $U \in \tau(x)$ tal que $U \cap B \in \mathcal{I}$. Como $A \subset B$, se tiene que $U \cap A \subset U \cap B$. Por la propiedad hereditaria de $\mathcal{I}$, se sigue que $U \cap A \in \mathcal{I}$ y por lo tanto, $x \notin A^*$.

(b) Sea $x \in cl(A^*)$, por el Teorema 1.1, existe un abierto U que contiene a x tal que $U \cap A^* \neq \emptyset$, por lo tanto, existe un punto $y \in U \cap A^*$ tal que $y \in U$ y $y \in A^*$. Como U es un abierto que contiene a x, $U \in \tau(x)$, entonces $U \cap A \notin \mathcal{I}$ y así $x \in A^*$. Por otra parte, dado que $A^* \subset cl(A^*)$, se concluye que $A^* = cl(A^*)$. Para demostrar que $cl(A^*) \subset cl(A)$, suponga que $x \in cl(A^*) = A^*$, entonces $U \cap A \notin \mathcal{I}$ para todo $U \in \tau(x)$, y así $U \cap A^* \neq \emptyset$ para todo $U \in \tau(x)$, por lo que $x \in cl(A)$ y así $cl(A^*) \subseteq cl(A)$.

(c) Por la parte (b), $A^* = cl(A^*) \subseteq cl(A)$ para cada subconjunto A de X. En particular, para A^* se tiene que $(A^*)^* \subset cl(A^*) = A^*$.

(d) Suponga que existe $x \in \emptyset^*$ y sea $U \in \tau(x)$, entonces $U \cap \emptyset \notin \mathcal{I}$, pero como $U \cap \emptyset = \emptyset$, por lo que $\emptyset \notin \mathcal{I}$ y esto es una contradicción, pues $\emptyset \in \mathcal{I}$. Por lo tanto, no existe un elemento $x \in \emptyset^*$ y en consecuencia $\emptyset^* = \emptyset$.

(e) Por la parte (a), se tiene que $A^* \subset (A \cup B)^*$ y $B^* \subset (A \cup B)^*$. Por lo tanto, $A^* \cup B^* \subset (A \cup B)^*$. Ahora para demostrar que $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$, suponga que $x \notin A^* \cup B^*$, entonces existen $U \in \tau(x)$ y $V \in \tau(x)$ tales que, $U \cap A \in \mathcal{I}$ y $V \cap B \in \mathcal{I}$. Puesto que $U \cap V \subset U$, entonces $(U \cap V) \cap A \subset U \cap A$ y como $U \cap A \in \mathcal{I}$ se obtiene que $(U \cap V) \cap A \in \mathcal{I}$. Análogamente, se puede concluir que $(U \cap V) \cap B \in \mathcal{I}$, por lo que $(U \cap V) \cap (A \cup B) = [(U \cap V) \cap A] \cup [(U \cap V) \cap B] \in \mathcal{I}$, es decir, $(U \cap V) \cap (A \cup B) \in \mathcal{I}$, en consecuencia $x \notin (A \cup B)^*$.

(f) Sea $U \in \tau$, $x \in U \cap A^*$ y $V \in \tau$, entonces $x \in (U \cap V)$, $(U \cap V) \in \tau$ y $x \in A^*$, por lo que $V \cap (U \cap A) \notin \mathcal{I}$ y $x \in (U \cap A)^*$. De esta manera, $U \cap A^* \subset (U \cap A)^*$, $U \cap A^* \subset U$ y se concluye que $U \cap A^* \subset U \cap (U \cap A)^*$. Por otra parte, la inclusión $U \cap A \subset A$ implica que $(U \cap A)^* \subset A^*$ y $U \cap (U \cap A)^* \subset U \cap A^*$. Por lo tanto, $U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^* \subset (U \cap A)^*$.

Lema 1.2. *Sea $(X, \tau, \mathcal{I})$ un espacio topológico dotado con ideal y $\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) $(\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\})^* \subset \bigcap\{A_\alpha^* : \alpha \in \Delta\}$.

(2) $(\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\})^* = \bigcup\{A_\alpha^* : \alpha \in \Delta\}$, *si Δ es finito.*

Prueba:

(1) Para cada $\alpha \in \Delta$, se tiene que, $\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\} \subset A_\alpha$ y por la parte (1) del Lema 1.1, $(\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\})^* \subset A_\alpha^*$. Por lo tanto, $(\bigcap\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\})^* \subset \bigcap\{A_\alpha^* : \alpha \in \Delta\}$.

(2) Por la parte (e) del Lema 1.1, se tiene que $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$ para cada par de subconjuntos A y B de X. Luego, si Δ es finito entonces por inducción matemática, se concluye que $(\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Delta\})^* = \bigcup\{A_\alpha^* : \alpha \in \Delta\}$.

Recuerde que si $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de partes de X, el operador clausura de *Kuratowski* es una función $\gamma : P(X) \to P(X)$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\gamma(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Si $A \in P(X)$, entonces $A \subset \gamma(A)$.

(c) si A, $B \in P(X)$, entonces $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cup \gamma(B)$.

(d) Si $A \in P(X)$, entonces $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$.

Además, $\{A \in \mathcal{P}(X) : \gamma(A) = A\}$ es una colección de conjuntos cerrados para una topología sobre X.

Definición 1.11. *Sea $(X, \tau, \mathcal{I})$ un espacio topológico dotado con un ideal. Para cada subconjunto A de X, se define $cl^*(A)$ como la unión de A con A^*, es decir $cl^*(A) = A \cup A^*$.*

Observe que si $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, entonces para cada subconjunto A de X se tiene que $cl^*(A) = A \cup A^* = A \cup cl(A) = cl(A)$.

Proposición 1.1. *cl^* es un operador clausura de Kuratowski.*

Prueba: Se verifica que cl^* satisface las propiedades deseadas:

(a) Puesto que $cl^*(\emptyset) = \emptyset^* \cup \emptyset$ y $\emptyset^* = \emptyset$, entonces $cl^*(\emptyset) = \emptyset$.

(b) Si $A \in P(X)$, entonces $A \subset A^* \cup A = cl^*(A)$.

(c) Si A,$B \in P(X)$, se tiene que $cl^*(A) \cup cl^*(B) = (A \cup A^*) \cup (B \cup B^*) =$ $(A \cup B) \cup (A^* \cup B^*) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^* = cl^*(A \cup B)$.

(d) Si $A \in P(X)$, entonces por la parte (b), $cl^*(A) \subset cl^*(cl^*(A))$. Por otra parte, $cl^*(cl^*(A)) = (cl^*(A))^* \cup cl^*(A) = (A \cup A^*)^* \cup cl^*(A) = A^* \cup (A^*)^* \cup cl^*(A) \subset$ $A^* \cup cl^*(A) = cl^*(A)$. Por lo tanto, $cl^*(cl^*(A)) = cl^*(A)$.

En virtud del teorema anterior, si $(X, \tau, \mathcal{I})$ es un espacio topológico dotado con un ideal, se denota por $\tau^*(\mathcal{I})$ a la topología generada por cl^*, donde τ es la topología original en X, es decir;

$$\tau^*(\mathcal{I}) = \{U \in X : cl^*(X - U) = (X - U)\}.$$

Los elementos de $\tau^*(\mathcal{I})$ son llamados $\tau^*(\mathcal{I})$-abiertos y el complemento de un $\tau^*(\mathcal{I})$-abierto es llamado $\tau^*(\mathcal{I})$-cerrado. Por lo tanto, se define el $int^*(A)$ como la unión de todos los conjuntos abiertos pertenecientes a $\tau^*(\mathcal{I})$ contenidos en A. Cuando no exista confusión, se escribirá simplemente τ^* en lugar de $\tau^*(\mathcal{I})$.

Observe que si $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, entonces $A^* = cl(A)$. Por lo tanto, en este caso $cl^*(A) = cl(A)$ y $\tau^* = \tau$. Si $\mathcal{I} = P(X)$, entonces $A^* = \emptyset$ para cada $A \subseteq X$ y aquí τ^* es la topología discreta y claramente τ^* es más fina que cualquier otra topología en X.

Observación 1.3. *Sea A un subconjunto de X y $(X, \tau, \mathcal{I})$ un espacio topológico dotado con un ideal. Si A es un conjunto τ^*-cerrado en X, entonces $A = cl^*(A)$, mientras que, si A es un conjunto τ^*-abierto en X, entonces $A = int^*(A)$.*

Proposición 1.2. *Un subconjunto A de un espacio topológico $(X, \tau, \mathcal{I})$ es un conjunto τ^*-cerrado en X si, y sólo si, $A^* \subseteq A$.*

Prueba: Suponga que A es un conjunto τ^*-cerrado en X, entonces $cl^*(A) = A$. En consecuencia, $A^* \cup A = A$ y por lo tanto, $A^* \subseteq A$. Recíprocamente, suponga que $A^* \subseteq A$. Puesto que $cl^*(A) = A^* \cup A$ y $A^* \cup A \subset A$. Entonces $cl^*(A) \subset A$. Por la Proposición 1.1, se tiene que $A \subset cl^*(A)$ y así, se obtiene que $cl^*(A) = A$. Esto demuestra que $X - A$ es τ^*-abierto y por lo tanto, A es un conjunto τ^*-cerrado.

Observación 1.4. *Si A es un subconjunto de un espacio topológico $(X, \tau, \mathcal{I})$ dotado de un ideal, entonces del Lema 1.1, se deduce que $(cl^*(A))^* = (A \cup A^*)^* = A^* \cup (A^*)^* \subset A^* \subset cl^*(A)$ y de esta manera, $cl^*(A)$ es un conjunto τ^*-cerrado.*

Proposición 1.3. *Sea $(X, \tau, \mathcal{I})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces $A^* - A$ no contiene ningún conjunto τ^*-abierto no vacío.*

Prueba: Suponga que $A \subset X$ y U es un conjunto τ^*-abierto tal que $U \subset A^* - A$, entonces $U \subset A^* - A \subset X - A$, $A \subset X - U$ y $X - U$ es τ^*-cerrado. Por la parte (c) del Lema 1.1 y la Proposición 1.2, se obtiene que $A^* \subset (X - U)^* \subset X - U$ y así, $U \subset X - A^*$. Puesto que $U \subset A^*$ se tiene que $U \subset (X - A^*) \cap A^* = \emptyset$, por lo que $U = \emptyset$ y de esta manera, $A^* - A$ no contiene ningún conjunto τ^*-abierto no vacío.

A continuación se introduce la noción de función inducida y se estudian algunas propiedades relacionadas a las mismas.

Definición 1.12. *Sea $f : X \to Y$ cualquier función y E cualquier subconjunto de X. Se define la función inducida $f^\sharp$, con respecto a f, de la siguiente manera:*

$$f^\sharp(E) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subseteq E\}.$$

Definición 1.13. *Sea $f : X \to Y$ cualquier función y E cualquier subconjunto de X. Se define $E^\sharp$, de la siguiente manera:*

$$E^\sharp = f^{-1}(f^\sharp(E)).$$

Definición 1.14. *Sea $f : X \to Y$ cualquier función, un subconjunto E de X se llamará subconjunto saturado de X, si $E = E^\sharp$.*

Observación 1.5. *Para cualquier función $f : X \to Y$, $E^\sharp$ es saturado para cualquier subconjunto E de X.*

Lema 1.3. *Sea $f : X \to Y$ cualquier función, si E es cualquier subconjuto de X. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(*a*) *$E^\sharp = \{f^{-1}(y) : y \in Y$ y $f^{-1}(y) \subseteq E\} \subseteq E$.*

(*b*) *$f^\sharp(E^C) = (f(E))^C$ y así, $f^\sharp(E) = (f(E^C))^C$ y $f(E) = (f^\sharp(E^C))^C$.*

(*c*) *Un subconjuto E de X es saturado si y sólo si, $E = E^\sharp$.*

(*d*) *f es una función sobreyectiva si y sólo si $f^\sharp(E) = f(E^\sharp)$.*

(*e*) *$f^\sharp(X) = Y$, $X^\sharp = X$ y $\emptyset^\sharp = \emptyset$.*

(*f*) *Si $A \subset B$, entonces $f^\sharp(A) \subset f^\sharp(B)$.*

(*g*) *$f^\sharp(E) = f^\sharp(E) \cap f(X)$.*

(*h*) *$f^\sharp(\emptyset) = [f(X)]^C$.*

(*i*) *$f^\sharp(E^\sharp) = f^\sharp(E)$.*

(*j*) *$f(E^\sharp) = f^\sharp(E) \cap f(E)$.*

Prueba:

(*a*) Sigue directamente por definición.

(*b*) $y \in (f(E))^C \Leftrightarrow y \notin f(E) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \notin E \Leftrightarrow f^{-1}(y) \subseteq E^C \Leftrightarrow y \in f^\sharp(E^C)$, por lo tanto, $f^\sharp(E^\sharp) = (f(E))^C$.

$y \notin (f(E^C))^C \Leftrightarrow y \in f(E^C) \Leftrightarrow f^{-1}(y) \in E^C \Leftrightarrow f^{-1}(y) \nsubseteq E \Leftrightarrow y \notin f^\sharp(E)$, así $f^\sharp(E) = (f(E^C))^C$, por otro lado, $(f^\sharp(E^C))^C = ((f(E))^C)^C = f(E)$,

(*c*) ($\Rightarrow$) Por la Definición 1.13, $E^\sharp = f^{-1}(f^\sharp(E))$, ahora utilizando la parte (*b*) se tiene que, $f^{-1}(f^\sharp(E)) = f^{-1}[(f(E^C))^C] = [f^{-1}(f(E^C))]^C = (E^C)^C = E$. De esta manera, se concluye que $E^\sharp = E$.
($\Leftarrow$) Sigue directamente de la Observación 1.5.

(*d*) $f(E^\sharp) = f[f^{-1}(f^\sharp(E))]$, por Definición 1.13, puesto que f es una función sobreyectiva, se tiene que, $f[f^{-1}(f^\sharp(E))] = f^\sharp(E)$, por lo tanto, $f(E^\sharp) = f^\sharp(E)$. Recíprocamente, considere $E = X$ por hipótesis, se tiene que $f^\sharp(X) = f(X^\sharp)$, por la parte (e), se obtiene que, $Y = f^\sharp(X) = f(X^\sharp) = f(X)$. De esta manera se tiene que $f(X) = Y$ y esto demuestra que f es una función sobreyectiva.

(e) Utilizando la parte (b), $f^\sharp(X) = (f(X^C))^C$, luego de la Observación 1.2, se obtiene que, $f(X^C) = f(\emptyset)$, así, $f^\sharp(X) = (f(\emptyset))^C = Y$.

Como $f^\sharp(X) = Y$, entonces esto implica que, $f^{-1}(f^\sharp(X)) = f^{-1}(Y) = X$. Por otra parte, utilizando la Definición 1.13, se tiene que $f^{-1}(f^\sharp(X)) = X^\sharp$, por lo tanto, $X^\sharp = X$.

Dado que el conjunto $\emptyset$ está incluido en cualquier otro conjunto, se tiene que $\emptyset \subset \emptyset^\sharp$. Ahora por la parte (a), se obtiene que $\emptyset^\sharp \subset \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset = \emptyset^\sharp$.

(f) Sea $y \in f^\sharp(A)$, entonces se tiene que para todo $y \in Y$, $f^{-1}(y) \subseteq A$, puesto que $A \subseteq B$, implica que, $f^{-1}(y) \subseteq B$, por lo tanto, $y \in f^\sharp(B)$ para todo $y \in Y$. En consecuencia $f^\sharp(A) \subseteq f^\sharp(B)$.

(g) Por Definición 1.13 y de la parte (e), se tiene que, $f^\sharp(E) \cap f(X) = f^\sharp(E) \cap f(X^\sharp) = f^\sharp(E) \cap f(f^{-1}(f^\sharp(X)) = f^\sharp(E) \cap f^\sharp(X) = f^\sharp(E) \cap Y = f^\sharp(E)$.

(h) De la Observación 1.2 y de la parte (b), se tiene que, $[f(X)]^C = f^\sharp(X^C) = f^\sharp(\emptyset)$.

(i) Utilizando la Definición 1.13, $f^\sharp(E^\sharp) = f^\sharp[f^{-1}(f^\sharp(E))]$, luego por (b) y las propiedades del complemento, se tiene que
$f^\sharp[f^{-1}(f^\sharp(E))] = f^\sharp[f^{-1}[(f(E^C))^C]] = f^\sharp[f^{-1}(f(E^C))]^C = f^\sharp[(E^C)^C] = f^\sharp(E)$. En consecuencia $f^\sharp(E^\sharp) = f^\sharp(E)$.

(j) $f(E^\sharp) = f(f^{-1}(f^\sharp(E)) = f^\sharp(E)$, por la parte (i), $f^\sharp(E) = f^\sharp(E^\sharp)$, por lo tanto $f(E^\sharp) = f^\sharp(E^\sharp)$, luego, $f(E^\sharp) \cap f(E) = f^\sharp(E^\sharp) \cap f(E)$. Ahora dado que $f(E^\sharp) \subseteq f(E)$, se tiene que, $f(E^\sharp) = f^\sharp(E^\sharp) \cap f(E)$, nuevamente por la parte (i), se concluye que $f(E^\sharp) = f^\sharp(E) \cap f(E)$.

Definición 1.15. *Un subconjuto A de un espacio topológico $(X, \tau, \mathcal{I})$ dotado de un ideal se dice:*

(a) $\mathcal{I}$-denso, si $A^* = X$.

(b) $*$-denso en si mismo, si $A \subseteq A^*$.

Ejemplo 1.8. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ y el ideal $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}\}$. Si $A = \{b, c, d\}$, entonces $A^* = \{a, b, c, d\} = X$.*

Ejemplo 1.9. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{d\}, \{a, c, d\}, X\}$ y el ideal $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$, el subconjunto $A = \{a\}$ es un subconjunto $*$-denso en si mismo, pues $A \subseteq A^*$.*

Definición 1.16. *Sea $(X, \tau, \mathcal{I})$ un espacio topológico dotado con un ideal, se dice que $\mathcal{I}$ es compatible con respecto a τ, denotado por $\tau \sim \mathcal{I}$, si para cada subconjunto A de X cada punto de A existe un abierto U tal que $U \cap A \in \mathcal{I}$, entonces $A \in \mathcal{I}$.*

Lema 1.4. *Sea $(X, \tau, \mathcal{I})$ un espacio topológico dotado de un ideal y sea A cualquier subconjunto de X, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(a) $A^*(\mathcal{I}, \tau) = A^*(\mathcal{I}, \tau^*(\mathcal{I}))$.

(b) $\tau \sim \mathcal{I}$ si y sólo si, A - $A^* \in \mathcal{I}$.

(c) $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$ si y sólo si, $X = X^*$.

Este resultado está demostrado en [4].

CAPÍTULO 2
FUNCIONES $\mathcal{I}$-ABIERTAS

En este capítulo, se estudia la noción de función $\mathcal{I}$-abierta introducida por Hamlett y Rose en [2], y se dan varias caracterizaciones y propiedades relacionadas con este tipo de noción usando la función inducida $f^\sharp$, la imagen directa f y la imagen inversa f^{-1}.

Definición 2.1. *Se dice que una función $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$, es una función $\mathcal{I}$-abierta si la imagen de cada subconjunto abierto en X, es un subconjunto δ^*-abierto en Y o equivalentemente, $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ es una función $\mathcal{I}$-abierta si y soló si, $f : (X, \tau) \to (Y, \delta^*)$ es abierto.*

Ejemplo 2.1. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{d\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}, X\}$, $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y $\delta = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, Y\}$. Si se define $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ por $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = b$ y $f(d) = a$ con $\mathcal{J} = f(\mathcal{I}) = P(Y)$, entonces, δ^* es la topología discreta. Claramente f es una función $\mathcal{I}$-abierta, pues la imagen de cada subconjunto abierto en X es un subconjunto δ^*-abierto en Y.*

En [8], se muestra para una función biyectiva $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$, f es una función $\mathcal{I}$-abierta si, y soló si, $f^{-1}(B^*) \subseteq (f^{-1}(B))^*$. Ahora el siguiente teorema muestra que la condicion de biyección no es necesaria para mostrar lo establecido en [8].

Teorema 2.1. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ cualquier función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es una función $\mathcal{I}$-abierta.*

(b) *$(f^\sharp(A))^* \subseteq f^\sharp(A^*)$ para cada subconjunto A de X.*

(c) *$f^{-1}(B^*) \subseteq (f^{-1}(B))^*$ para cada subconjunto B de Y.*

(d) $f^{-1}(cl^*(B)) \subseteq cl(f^{-1}(B))$ *para cada subconjunto* B *de* Y.

(e) $cl^*(f^\sharp(A)) \subseteq f^\sharp(cl(A))$ *para cada subconjunto* A *de* X.

(f) Para cada subconjunto cerrado F *en* X, $f^\sharp(F)$ *es un subconjunto* δ^**-cerrado en* Y.

Prueba:

$(a) \Rightarrow (b)$: Sea A un subconjunto de X y $y \notin f^\sharp(A^*)$. Entonces por la Definición 1.12, se tiene que $f^{-1}(y) \nsubseteq A^*$, por lo tanto existe un punto $x \in f^{-1}(y)$ tal que $x \notin A^*$. Ahora usando la Definición 1.9, de A^*, se tiene que existe un abierto U en X, tal que $U \cap A \in \mathcal{I}$, esto implica que $f(U \cap A) \in f(\mathcal{I})$. Pero $f(U) \cap f^\sharp(A) \subseteq f(U \cap A)$, de aquí, $f(U) \cap f^\sharp(A) \in f(\mathcal{I})$, puesto que f es una función $\mathcal{I}$-abierta, se tiene que $f(U)$ es un conjunto δ^*-abierto en Y para cada abierto U en X. Así, $y \notin (f^\sharp(A))^*$. Por lo tanto, para cada subconjuto A de X se tiene que $(f^\sharp(A))^* \subseteq f^\sharp(A^*)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea B un subconjunto de Y y considere $A = f^{-1}(B)$, sustituyendo en (b), se tiene que $[f^\sharp(f^{-1}(B))]^* \subseteq f^\sharp[(f^{-1}(B))^*]$, como $B \subseteq f^\sharp(f^{-1}(B))$, entonces $B^* \subseteq [f^\sharp(f^{-1}(B))]^* \subseteq f^\sharp[(f^{-1}(B))^*]$, esto implica que $f^{-1}(B^*) \subseteq f^{-1}[f^\sharp[(f^{-1}(B))^*]]$, por la Definición 1.13, se tiene que $f^{-1}[f^\sharp[(f^{-1}(B))^*]] = ((f^{-1}(B))^*)^\sharp$. Del Lema 1.3(a), se concluye que $f^{-1}(B^*) \subseteq (f^{-1}(B))^*$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Para cada subconjunto B de Y, $f^{-1}(cl^*(B)) = f^{-1}(B \cup B^*) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B^*) \subseteq f^{-1}(B) \cup (f^{-1}(B))^* = cl^*(f^{-1}(B)) \subseteq cl(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $f^{-1}(cl^*(B)) \subseteq cl(f^{-1}(B))$.

$(d) \Rightarrow (e)$: Sea A un subconjunto de X y considere el subconjunto $B = f^\sharp(A)$, sustituyendo en (d), observe que $f^{-1}(cl^*(f^\sharp(A))) \subseteq cl(f^{-1}(f^\sharp(A)))$. Como $f^{-1}(f^\sharp(A)) = A^\sharp$, por la Definición 1.13, entonces $cl(f^{-1}(f^\sharp(A))) \subseteq cl(A^\sharp)$, por la parte (a) y (f) del Lema 1.3, se tiene que $f^\sharp(f^{-1}(cl^*(f^\sharp(A)))) \subseteq f^\sharp(cl(A))$, como

$A \subseteq f^\sharp(f^{-1}(A))$ para cada subconjunto A de X, se concluye que $cl^*(f^\sharp(A)) \subseteq f^\sharp(cl(A))$.

$(e) \Rightarrow (f)$: Sea F cualquier subconjunto cerrado en X. Entonces $cl(F) = F$, sustituyendo en (e), implica que $cl^*(f^\sharp(F)) \subseteq f^\sharp(F)$. Por lo tanto, $f^\sharp(F)$ es un conjunto δ^*-cerrado en Y.

$(f) \Rightarrow (a)$: Sea U un subconjunto abierto en X, entonces U^C es un subconjunto cerrado en X. Por hipótesis, se tiene que $f^\sharp(U^C)$ es un conjunto δ^*-cerrado en Y, por el Lema 1.3(b), $f^\sharp(U^C) = (f(U))^C$. Por lo tanto, $f(U)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y. De esta manera se concluye que f es una función $\mathcal{I}$-abierta.

Corolario 2.1. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función sobreyectiva. Entonces f es una función $\mathcal{I}$-abierta si y sólo si, para cada subconjunto cerrado F de X, $f(F^\sharp)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y.*

Prueba: De la equivalencia (a) y (f) del Teorema 2.1, se tiene que f es una función $\mathcal{I}$-abierta si, y sólo si, para cada subconjunto cerrado F de X, $f^\sharp(F)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Puesto que f es una función sobreyectiva, entonces del Lema 1.3(d), se tiene que $f^\sharp(F) = f(F^\sharp)$. Por lo tanto, $f(F^\sharp)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y.

Corolario 2.2. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ cualquier función dotada de un ideal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es una función $\mathcal{I}$-abierta.

(b) La imagen de cada subconjunto τ^*-abierto en X, es un subconjunto δ^*-abierto en Y.

(c) Para cada subconjunto F τ^*-cerrado en X, $f^\sharp(F)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y.

Prueba:

$(a) \Rightarrow (b)$: Sea U cualquier subconjunto τ^*-abierto en X, entonces U^C es un subconjunto τ^*-cerrado en X. Por la Proposición 1.2, se tiene que $(U^C)^* \subseteq U^C$. Considerando el conjunto $A = U^C$ y sustituyendo en la equivalencia (a) y (b) del Teorema 2.1, se tiene que $(f^\sharp(U^C))^* \subseteq f^\sharp((U^C)^*) \subseteq f^\sharp(U^C)$, nuevamente por la Proposición 1.2, se obtiene que $f^\sharp(U^C)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Del Lema 1.3(b), $f^\sharp(U^C) = (f(U))^C$, Por lo tanto, $f(U)$ es un conjunto δ^*-abierto en Y.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea F cualquier subconjunto τ^*-cerrado en X, entonces F^C es un conjunto τ^*-abierto en X, utilizando la hipótesis, se tiene que $f(F^C)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y. Del Lema 1.3(b), $f^\sharp(F) = (f(F^C))^C = Y - f(F^C)$. Por lo tanto, $f^\sharp(F)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea F un subconjunto abierto en X, entonces F^C es cerrado en X, como $\tau \subseteq \tau^*$, se tiene que F^C es un subconjunto τ^*-cerrado en X. Por hipótesis y la parte (b) del Lema 1.3, se tiene que $f^\sharp(F^C) = (f(A))^C$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Por lo tanto, $f(A)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y. Esto demuestra que f es una función $\mathcal{I}$-abierta.

Corolario 2.3. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función $\mathcal{I}$-abierta, entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(a) *La imagen inversa de cada subconjunto $\mathcal{J}$-denso en Y, es un subconjunto $\mathcal{I}$-denso en X.*

(b) *La imagen inversa de cada subconjunto $*$-denso en si mismo en Y, es un subconjunto $*$-denso en si mismo en X.*

Prueba:

(a) Sea B un subconjunto $\mathcal{J}$-denso en Y, por la Definición 1.15(a), $B^* = Y$, esto implica que $f^{-1}(B^*) = f^{-1}(Y) = X$, por lo tanto, $f^{-1}(B^*) = X$. De la equivalencia (a) y (c) del Teorema 2.1, se obtiene que $X = f^{-1}(B^*) \subseteq (f^{-1}(B))^*$, de aquí, $X \subseteq X^*$. Como X^* es un subconjunto propio de X, se tiene que $X^* = X$, de esta manera, $(f^{-1}(B))^* = X$. Por lo tanto, se concluye que $f^{-1}(B)$ es un subconjunto $\mathcal{I}$-denso en X.

(b) Sea B un subconjunto $*$-denso en Y, por la Definición 1.15(b), $B \subseteq B^*$, esto implica que $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B^*)$, de la equivalencia (a) y (b) del Teorema 2.1, se tiene que $f^{-1}(B^*) \subseteq (f^{-1}(B))^*$, así, $f^{-1}(B) \subseteq (f^{-1}(B))^*$. Por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es un subconjunto $*$-denso en X.

Teorema 2.2. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función $\mathcal{I}$-abierta y $\delta \cap \mathcal{J} = \{\emptyset\}$, entonces $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$.*

Prueba: Considere el subconjunto $B = Y$. Sustituyendo en la equivalencia (a) y (c) del Teorema 2.1, se obtiene que $f^{-1}(Y^*) \subseteq (f^{-1}(Y))^*$. Como $\delta \cap \mathcal{J} = \{\emptyset\}$, del Lema 1.4(c), se tiene que $Y = Y^*$, por lo tanto, $f^{-1}(Y) \subseteq (f^{-1}(Y))^*$, de aquí, $X \subseteq X^*$, dado que $X^* \subseteq X$, entonces $X^* = X$. Nuevamente del Lema 1.4(c), se concluye que $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$.

En [8], para las funciones biyectivas, los conceptos de funciones $\mathcal{I}$-abiertas e $\mathcal{I}$-cerradas coinciden, sin embargo como hemos generalizado dicho teorema y hemos eliminado la condición innecesaria de biyección, se procede a introducir de manera similar la función $\mathcal{I}$-cerrada y se darán varias caracterizaciones y propiedades relacionadas con esta noción.

2.1 Funciones $\mathcal{I}$-cerradas

Definición 2.2. *Se dice que una función $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ es una función $\mathcal{I}$-cerrada, si la imagen de cada subconjunto cerrado en X, es un subconjunto δ^*-cerrado en Y o equivalentemente, $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ es $\mathcal{I}$-cerrada si y sólo si, $f : (X, \tau) \to (Y, \delta^*)$ es cerrado.*

Teorema 2.3. *Toda función cerrada es una función $\mathcal{I}$-cerrada.*

Prueba:

Sea f cualquier función cerrada, entonces para todo subconjunto cerrado F en X, $f(F)$ es un subconjunto cerrado en Y. Como δ^* es más fina que δ, es decir, $\delta \subseteq \delta^*$, se tiene que $f(F)$ es un subconjunto δ^*- cerrado en Y. Por lo tanto, f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.

El siguiente ejemplo muestra que la suficiencia del teorema anterior no es necesariamente cierta.

Ejemplo 2.2. *Sea $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{c\}, X\}$, $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ y $\delta = \{\emptyset, Y\}$. Si se define $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ por $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ y $f(c) = 1$ con $\mathcal{J} = f(\mathcal{I}) = P(Y)$ entonces $\delta^*(\mathcal{J})$ es la topología discreta. Claramente f es una función $\mathcal{I}$-cerrada, pues para los conjuntos $\emptyset$, X, $\{a, b\}$ cerrados en X, $f(X) = f(\{a, b, c\}) = \{0, 1\}$, $f(\emptyset) = \emptyset$ y $f(\{a, b\}) = 0$ son conjuntos δ^*-cerrados en Y. Ahora observe que f no es una función cerrada, pues el subconjunto $\{a, b\}$ es un cerrado en X, pero $f(\{a, b\}) = \{0\}$ no es un subconjunto cerrado en Y.*

Teorema 2.4. *Para cualquier función $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.*

(b) *Para cada subconjunto A de X, $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl(A))$.*

(c) *Para cada subconjunto A de X, $f^\sharp(int(A)) \subseteq int^*(f^\sharp(A))$.*

(d) *Para cada subconjunto abierto U de X, $f^\sharp(U)$ es un conjunto δ^*-abierto en Y.*

Prueba:

$(a) \Rightarrow (b)$: Sea A un subconjunto cerrado en X, entonces $A = cl(A)$, puesto que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada se tiene que $f(cl(A))$ es un subconjunto δ^*-cerrada en Y, Por lo tanto, $cl^*(f(cl(A)) \subseteq f(cl(A))$. De esta manera se concluye que $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl(A))$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea A un subconjunto de X, utilizando el Lema 1,3(b), se tiene que $f^\sharp(int(A)) \subseteq (f^\sharp(int(A)^C)]^C = int^*(f^\sharp(A))$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Sea U un subconjunto abierto en X, entonces $U = int(U)$. Sustituyendo en (c), se tiene que $f^\sharp(U) \subseteq int^*(f^\sharp(U))$, de aquí, $f^\sharp(U) = int^*(f^\sharp(U))$, por lo tanto, $f^\sharp(U)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y.

$(d) \Rightarrow (a)$: Sea F un subconjunto cerrado en X, entonces F^C es un subconjunto abierto en X. Por hipótesis, se tiene que $f^\sharp(F^C)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y, por Lema 1.3(b), $f^\sharp(F^C) = (f(F))^C$. Por lo tanto, $f(F)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Esto demuestra que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.

Corolario 2.4. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ cualquier función. Entonces la imagen de cualquier subconjunto τ^*-cerrado en X, es un subconjuto δ^*-cerrado en Y si, y sólo si, $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl^*(A))$ para cualquier subconjunto A de X.*

Prueba:

$(\Rightarrow)$: Sea A un subconjunto τ^*-cerrado en X, entonces $A = cl^*(A)$. Utilizando la hipótesis, implica que $f(cl^*(A))$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y, por lo tanto, $cl^*(f(cl^*(A))) \subseteq f(cl^*(A))$, así, $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl^*(A))$.

$(\Leftarrow)$: Sea A un subconjunto τ^*-cerrado en X, entonces $cl^*(A) \subseteq A$. Utilizando la hipótesis, se tiene que $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl^*(A)) \subseteq f(A)$. Por lo tanto, $cl^*(f(A)) \subseteq f(A)$. De esta manera se concluye que $f(A)$ es un subconjuto δ^*-cerrado en Y.

Corolario 2.5. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función sobreyectiva. Entonces f es una función $\mathcal{I}$-cerrada si, y sólo si, para cada subconjunto abierto U de X, $f(U^\sharp)$ es δ^*-abierto en Y .*

Prueba:

De la equivalencia (a) y (d) del Teorema 2.4, se tiene que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada, si para cada subconjunto abierto U de X, $f^\sharp(U)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y. Puesto que f es una función sobreyectiva, del Lema 1.3(d), se tiene que $f^\sharp(U) = f(U^\sharp)$. Por lo tanto, para cada subconjunto abierto U de X, $f(U^\sharp)$ es un subconjunto δ^*-abierto en Y.

El siguiente ejemplo exhibe que la condición de sobreyectividad en el corolario anterior no puede ser omitida.

Ejemplo 2.3. *Sea* $X = \{a, b, c\}$*,* $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$*,* $Y = \{0, 1, 2\}$ *y* $\delta = \{\emptyset, \{0, 2\}, Y\}$*. Si se define* $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ *por* $f(a) = 1$*,* $f(b) = 2$ *y* $f(c) = 1$*, con* $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{1\}\}$*. Entonces* $\delta^* = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 2\}, \{0, 1\}, X\}$*, ahora se verifica que* f *es una función* $\mathcal{I}$*-cerrada que no es sobreyectiva pues,* $f^\sharp(\{a, c\}) = (0, 1) \neq 1 = f(\{a, c\}^\sharp)$*, y para todo subconjunto* $\{a, b\}$*,* $\{b\}$ *y* $\{a\}$ *cerrado en* X*, se tiene que* $f(\{a, b\}) = \{1, 2\}$*,* $f(b) = 2$ *y* $f(a) = 1$ *son subconjuntos* δ^**-cerrados en* Y*. Pero el subconjunto* $f(\{a, c\}^\sharp) = 1$ *no es un conjunto* δ^**-abierto en* Y*.*

El siguiente teorema muestra que si $\mathcal{I}$ es compatible con respecto a τ y f es una función $\mathcal{I}$-cerrada, entonces f es equivalente a decir que, $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$ para cada subconjunto A de X. Este resultado es más fuerte.

Teorema 2.5. *Sea* $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ *cualquier función. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

(a) *Si* f *es una función* $\mathcal{I}$*-cerrada y* $\tau \sim \mathcal{I}$*, entonces* $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$ *para cada subconjunto* A *de* X*.*

(b) *Si* $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$ *para cada subconjunto* A *de* X*, entonces la imagen de cada conjunto* τ^**-cerrado en* X *es conjunto* δ^**-cerrado en* Y *y por lo tanto,* f *es una función* $\mathcal{I}$*-cerrada.*

Prueba:

(a) Para cualquier subconjunto A de X, $A = (A - A^*) \cup (A \cap A^*)$. Por el Lema 1.1(e), se tiene que
$(f(A))^* = (f((A - A^*) \cup (A \cap A^*)))^* = (f(A - A^*))^* \cup (f(A \cap A^*))^*$, así,
$(f(A))^* \subseteq (f(A - A^*))^* \cup (f(A^*))^*$. Como $\tau \sim \mathcal{I}$, del Lema 1.4(b), se tiene que $A - A^* \in \mathcal{I}$, esto implica que $f(A - A^*) \in f(\mathcal{I})$. Luego $(f(A - A^*))^* = \emptyset$, por lo tanto, $(f(A))^* \subseteq (f(A^*))^*$. Puesto que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada y A^* es cerrado,

se tiene que $f(A^*)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Por la Proposición 1.2, se tiene que $(f(A))^* \subseteq (f(A^*))^* \subseteq f(A^*)$. De esta manera se concluye que $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$.

(b) Para cualquier subconjunto A de X, $cl^*(f(A)) = f(A) \cup (f(A))^*$. Por hipótesis, se tiene que $cl^*(f(A)) \subseteq f(A) \cup f(A^*) = f(A \cup A^*) = f(cl^*(A))$, por lo tanto, $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl^*(A))$. Esto implica por el Corolario 2.4, que la imagen de cada conjunto τ^*-cerrado en X es un conjunto δ^*-cerrado en Y. De aquí, $f(cl^*(A)) \subseteq f(cl(A))$, así, $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl(A))$, de la equivalencia (a) y (b) del Teorema 2.4, se concluye que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.

Corolario 2.6. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ cualquier función y $\tau \sim \mathcal{I}$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) *f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.*

(b) *$(f(A))^* \subseteq f(A^*)$ para cada subconjunto A de X.*

(c) *La imagen de cada conjunto τ^*-cerrado en X es δ^*-cerrado en Y.*

Prueba:

$(a) \Rightarrow (b)$: Para cualquier subconjunto A de X, $A = (A - A^*) \cup (A \cap A^*)$. Por el Lema 1.1(e), se tiene que
$(f(A))^* = (f((A - A^*) \cup (A \cap A^*)))^* = (f(A - A^*))^* \cup (f(A \cap A^*))^*$, así,
$(f(A))^* \subseteq (f(A - A^*))^* \cup (f(A^*))^*$. Como $\tau \sim \mathcal{I}$, del Lema 1.4(b), se tiene que $A - A^* \in \mathcal{I}$, esto implica que $f(A - A^*) \in f(\mathcal{I})$. Luego $(f(A - A^*))^* = \emptyset$, por lo tanto, $(f(A))^* \subseteq (f(A^*))^*$. Puesto que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada y A^* es cerrado, se tiene que $f(A^*)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Por la Proposición 1.2, se tiene que $(f(A))^* \subseteq (f(A^*))^* \subseteq f(A^*)$. De esta manera se concluye que $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea A cualquier subconjunto τ^*-cerrado en X. Por la Proposición 1.2, se tiene que $A^* \subseteq A$, esto implica que $f(A^*) \subseteq f(A)$, utilizando la hipótesis, se obtiene que $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$, de aquí, $(f(A))^* \subseteq f(A)$. Aplicando nuevamente la Proposición 1.2, se concluye que $f(A)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y.

$(c) \Rightarrow (a)$. Del Corolario 2.4, $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl^*(A))$, luego por hipótesis, $f(cl^*(A))$ es un conjunto δ^*-cerrado en Y, esto implica que $f(cl^*(A)) \subseteq f(cl(A))$, de tal forma que $cl^*(f(A)) \subseteq f(cl(A))$. De la equivalencia (a) y (b) del Teorema 2.4, se concluye que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.

El siguiente teorema muestra que la condición de compatibilidad en el Teorema 2.5(a), puede ser cambiada por subconjuntos $*$-densos en si mismos de X.

Teorema 2.6. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ cualquier función. Sí f es una función $\mathcal{I}$-cerrada, entonces $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$, para cada subconjunto A $*$-denso en sí mismo de X.*

Prueba:

Sea A un subconjunto $*$-denso en sí mismo de X. Por Definición 1.15(b), $A \subseteq A^*$, esto implica que $f(A) \subseteq f(A^*)$, del Lema 1.1(a), se tiene que $[f(A)]^* \subseteq [f(A^*)]^*$. Puesto que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada y A^* es un subconjunto cerrado en X, entonces $f(A^*)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y. Por la Proposición 1.2, se tiene que $[f(A^*)]^* \subseteq f(A^*)$. Por lo tanto, $[f(A)]^* \subseteq f(A^*)$.

Corolario 2.7. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función biyectiva. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es una función $\mathcal{I}$-abierta.*

(b) *$(f(A))^* \subseteq f(A^*)$ para cada subconjunto A de X.*

(c) *f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.*

Prueba:

$(a) \Rightarrow (b)$: Puesto que f es una función biyectiva, entonces para cualquier subconjunto A de X, se tiene que $f^\sharp(A) = f(A)$. Sustituyendo en la equivalencia (a) y (b) del Teorema 2.1, se obtiene que $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea A cualquier subconjunto cerrado en X. Dado que $\tau \subseteq \tau^*$, se tiene que A es un conjunto τ^*-cerrado en X. Aplicando la Proposición 1.2, se tiene que $A^* \subseteq A$, esto implica que $f(A^*) \subseteq f(A)$, luego por hipótesis, $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$, por lo tanto, $(f(A))^* \subseteq f(A)$, de esta manera se tiene que $f(A)$ es un subconjunto δ^*-cerrado en Y y en consecuencia se demuestra que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sea F cualquier subconjunto cerrado en X, dado que f es una función $\mathcal{I}$-cerrada y sobreyectiva, se tiene que $f^\sharp(F) = f(F)$ es un conjunto δ^*-cerrado en Y. Ahora de la equivalencia (a) y (f) del Teorema 2.1, se obtiene el resultado.

CAPÍTULO 3
FUNCIONES $\mathcal{I}$-CONTINUAS

En este capítulo, se estudia la noción de función $\mathcal{I}$-continua intruducida por Kanicwski y Piotrowski en [5], y se dan varias caracterizaciones relacionadas a este tipo de noción en términos de funciones inyectivas y conjuntos saturados.

Definición 3.1. *Se dice que una función $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta)$, es una función $\mathcal{I}$-continua, si la imagen inversa de cada subconjunto abierto en Y, es un subconjunto τ^*-abierto en X. Equivalentemente, $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta)$ es $\mathcal{I}$-continua si y sólo si, $f : (X, \tau^*(\mathcal{I})) \to (Y, \delta)$ es continua.*

Ejemplo 3.1. *Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a, c\}, X\}$, $\delta = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{c\}\}$, $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{b\}\}$ y $\tau^* = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\}\}$. Si $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ es la función identidad, claramente f es una función $\mathcal{I}-$continua, ya que $f^{-1}(\{a\}) = \{a\}$, $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, b\}$ y $f^{-1}(\{a, c\}) = \{a, c\}$ son conjuntos $\tau^*(\mathcal{I})$-abiertos en X.*

Teorema 3.1. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ con $\mathcal{J} = f(\mathcal{I})$ una función inyectiva e $\mathcal{I}$-continua, entonces $(f^{-1}(B))^* \subseteq f^{-1}(B^*)$ para todo subconjunto B de Y.*

Prueba:

Sea B un subconjunto de Y y $x \notin f^{-1}(B^*)$. Por Definición 1.7, se tiene que $f(x) \notin B^*$, de aquí, existe un abierto $f(U)$ en Y, tal que $f(U) \cap B \in \mathcal{J} = f(\mathcal{I})$, esto implica que $f^{-1}(f(U) \cap B) \in f^{-1}(f(\mathcal{I}))$, luego, $f^{-1}(f(U)) \cap f^{-1}(B) \in f^{-1}(f(\mathcal{I}))$, puesto que f es una función inyectiva, se tiene que $U \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{I}$. Así, $x \notin (f^{-1}(B))^*$, por lo tanto para todo subconjunto B de Y, $(f^{-1}(B))^* \subseteq f^{-1}(B^*)$.

Los siguientes teoremas que se muestran a continuación, caracterizan a las funciónes $\mathcal{I}$-continuas y a su vez generalizan los resultados de los Teoremas 2.13 y 2.14, de [7].

Teorema 3.2. *Una función* $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$*, es una función* $\mathcal{I}$*-continua si, y sólo si, para cada subconjunto* A *de* X*,* $int(f^\sharp(A)) \subseteq f^\sharp(int^*(A))$*.*

Prueba: Se sabe que f es una función $\mathcal{I}$-continua si y sólo si, para cada subconjuto A de X, $f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A))$. Del Lema 1.3(b), se tiene que, $[f^\sharp((cl_X(A))^C)]^C \subseteq cl_Y((f^\sharp(A^C))^C)$, pero $cl_Y((f^\sharp(A^C))^C) = (f^\sharp(int_X(A^C)))^C$, por lo tanto, $f(cl_X(A)) \subseteq cl_Y(f(A))$, si y sólo si, $int_Y(f^\sharp(A^C)) \subseteq f^\sharp(int_X(A^C))$, como esto es valido para cualquier subconjunto A de X, se tiene que, $int_Y(f^\sharp(A)) \subseteq f^\sharp(int_X(A^*))$, pero $int_X(A^*) = int^*(A)$, así, $int(f^\sharp(A)) \subseteq f^\sharp(int^*(A))$.

Teorema 3.3. *Sea* $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ *una función sobreyectiva. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) f *es una función* $\mathcal{I}$*-continua.*

(b) $int(f(A^\sharp)) \subseteq f(int^*(A))^\sharp)$ *para cada subconjunto* A *de* X*.*

(c) $A^\sharp$ *es un subconjunto* τ^**-abierto en* X*, siempre que* $f(A^\sharp)$ *es abierto en* Y*.*

(d) *Para cada conjunto saturado* E *en* X*,* E *es* τ^**-abierto en* X *siempre que* $f(E)$ *es abierto en* Y*.*

(e) *Para cada conjunto saturado* E *de* X*,* E *es un conjunto* τ^**-cerrado en* X *siempre que* $f(E)$ *es cerrado en* Y*.*

Prueba:

$(a) \Rightarrow (b)$: Sea B cualquier subconjunto abierto en Y, puesto que f es una función $\mathcal{I}$-continua, se tiene que el subconjunto $A = f^{-1}(B)$ es un conjunto τ^*-abierto en X, además se tiene que $A = int^*(A)$, sustituyendo en el Teorema 3.2, observe que, $int(f^\sharp A)) \subseteq f^\sharp(A)$, luego como f es una función sobreyectiva, del Lema 1.3(d), se tiene que $int(f(A^\sharp)) \subseteq f^\sharp(A) = f(A^\sharp)$, por lo tanto, $int(f(A^\sharp)) \subseteq f(int^*(A))^\sharp)$.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sea $f(A^\sharp)$ un subconjunto abierto en Y, dado que f es una función sobreyectiva, del Lema 1.3(d), se tiene que $f^\sharp(A) = f(A^\sharp)$. Sustituyendo en (b), implica que, $int(f^\sharp(A)) \subseteq f^\sharp[(int^*(A))]$. Por el Teorema 3.2, se tiene que f es una función $\mathcal{I}$-continua, por lo tanto, para el subconjunto $f(A^\sharp)$ abierto en Y, $f^{-1}f(A^\sharp)$ es un subconjunto τ^*-abierto en X, luego como $f^{-1}(f(A^\sharp)) = f^{-1}(f^\sharp(A))$, por la Definición 1.13, se tiene que $f^{-1}(f^\sharp(A)) = A^\sharp$, por lo tanto, $A^\sharp$ es un subconjunto τ^*-abierto para cada subconjunto A de X.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $f(E)$ un subconjunto abierto en Y para cualquier subconjunto saturado E de X, del Lema 1.3(c), se tiene que $E^\sharp = E$, por lo tanto, $f(E^\sharp)$ es un subconjunto abierto en Y. Aplicando la hipótesis, se obtiene que $E^\sharp = E$ es un conjunto τ^*-abierto en X. Esto demuestra (d).

$(d) \Rightarrow (e)$: Sea $f(E)$ un subconjunto cerrado en Y para cualquier subconjunto saturado E de X, entonces $[f(E)]^C$ es abierto en Y, del Lema 1.3(b), se tiene que $[f(E)]^C = f^\sharp(E^C)$. Puesto que f es una función sobreyectiva, del Lema 1.3(d), se obtiene que $f^\sharp(E^C) = f[(E^C)^\sharp]$. Como E es un subconjunto saturado en X, entonces $(E^C)^\sharp = E^C$, Así, $f[(E^C)^\sharp] = f[(E^C)]$. Dado que (E^C) es un conjunto τ^*-abierto X se concluye que E es un conjunto τ^*-cerrado.

$(e) \Rightarrow (a)$: Sea $f(E)$ cualquier subconjunto cerrado en Y, entonces $(f(E))^C$ es un subconjunto abierto en Y para cada conjunto saturado en X. De la parte (b) del Lema 1.3, se tiene que $(f(E))^C = f^\sharp(E^C)$. Puesto que f es una función sobreyectiva, del Lema 1.3(d), se obtiene que $f^\sharp(E^C) = f[(E^C)^\sharp]$, como E es un subconjunto saturado en X, $(E^C)^\sharp = E^C$, así, $f^\sharp(E^C) = f[(E^C)^\sharp] = f(E^C)$, esto implica que, $f^{-1}(f^\sharp(E^C)) = f^{-1}[f(E^C)] = E^C$, como E es un conjunto τ^*-cerrado en X por hipótesis, entonces, $f^{-1}(f^\sharp(E^C)) = E^C$ es un conjunto τ^*-abierto en X. Por lo tanto, f es una función $\mathcal{I}$-continua.

Teorema 3.4. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función $\mathcal{I}-$continua e inyectiva. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) $f(A^*) \subseteq (f(A))^*$ *para cada subconjunto A de X.*

(b) $f^\sharp(A^*) \subseteq (f^\sharp(A))^*$ *para cada subconjunto A de X.*

(c) La imagen inversa de cada subconjuto δ^*-abierto en Y es τ^*-abierto en X.

Prueba:

(a) Sea A un subconjunto de X, y considere el subconjunto $B = f(A)$, sustituyendo en el Teorema 3.1, se tiene que $(f^{-1}(f(A)))^* \subseteq f^{-1}((f(A))^*)$. Como $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, entonces $A^* \subseteq (f^{-1}(f(A)))^* \subseteq f^{-1}((f(A))^*)$. Así, $f(A^*) \subseteq (f(A))^*$.

(b) Como f es una función inyetiva, entonces $f^\sharp(A) = f(A) \cup (f(X))^C$ para cada subconjunto A de X. Se domostrará que $f(A^*) \cup (f(X))^C \subseteq (f(A))^* \cup ((f(X))^C)^*$, en efecto. Utilizando la parte (a), solo se necesitará verificar que $(f(X))^C \subseteq ((f(X))^C)^*$. Veamos, sea $y \notin ((f(X))^C)^*$. Entonces existe un abierto W en Y tal que $W \cap (f(X))^C) \in f(\mathcal{I})$, es decir, $W \cap (f(X))^C) = f(I)$ para algún $I \in \mathcal{I}$ y así, $W \cap (f(X))^C) = \emptyset$ ó $W \subseteq f(X)$. Por lo tanto $y \in (f(X))$ ó $y \notin (f(X))^C$. En consecuencia $f^\sharp(A^*) \subseteq (f^\sharp(A))^*$ para cada subconjunto A de X.

(c) Sea W un subconjunto δ^*-abierto en Y. Entonces W^C es un subconjunto δ^*-cerrado en Y, usando la Proposición 1.2, $(W^C)^* \subseteq W^C$, ahora, por el Teorema 3.1 y tomando el subconjunto $B = W^C$, se tiene que $(f^{-1}(W^C))^* \subseteq f^{-1}((W^C)^*)$, así, $(f^{-1}(W^C))^* \subseteq f^{-1}(W^C)$. Por lo tanto,$((f^{-1}(W))^C)^* \subseteq (f^{-1}(W))^C$, nuevamente por la Proposición 1.2, se tiene que, $(f^{-1}(W))^C$ es τ^*-cerrado para cada subconjunto de X, así, $f^{-1}(W)$ es τ^*-abierto para cada subconjunto de X, El siguiente ejemplo muestra que la condición de inyección no puede ser eliminada en el teorema anterior.

Ejemplo 3.2. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{d\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}, X\}$, $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$, $Y = \{a, b, c\}$ y $\delta = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, Y\}$. Si se define $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ por $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = b$ y $f(d) = a$ con $\mathcal{J} = f(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Entonces,*

$\tau^*(\mathcal{I}) = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$ *y* $\delta^*(\mathcal{J}) = P(Y)$*. f es una función $\mathcal{I}$-continua pues, $f^{-1}(\{a\}) = \{d\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$, $f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, d\}$ y $f^{-1}(\{b, c\}) = \{a, b\}$ son conjunto τ^*-abiertos en X, pero f no es inyectiva* *ya que $a \neq c$ pero $f(a) = f(c)$. Ahora tomando el subconjunto $A = \{a\}$ de X, $A^* = \{a, b, c\}$. También $f^\sharp(A^*) = f(A^*) = \{b, c\}$ y $(f^\sharp(A))^* = (f(A))^* = \emptyset$. Por lo tanto, $f^\sharp(A^*) \nsubseteq (f^\sharp(A))^*$ y $f(A^*) \nsubseteq (f(A))^*$. Así, $\{c\}$ es un subconjunto $\delta^*(\mathcal{J})-$abierto en Y pero $f^{-1}\{c\} = \{b\}$ no es un subconjunto $\tau^*(\mathcal{I})$-abiero en X.*

El siguiente ejemplo muestra que si f no es $\mathcal{I}$-continua, la parte (b) del Teorema 3.4 se mantiene.

Ejemplo 3.3. *Sea $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$, $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ y $\delta = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, Y\}$. Si se define $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ por $f(a) = 2$, $f(b) = 1$ con $\mathcal{J} = f(\mathcal{I}) = \{\emptyset\}$. Ahora $0 \in f^\sharp(A)$ y $\{0\}^* = Y$, Entonces $(f^\sharp(A))^* = Y$ para cada subconjunto A de X. De aquí, $f^\sharp(A^*) \subseteq (f^\sharp(A))^*$ para cada subconjunto A de X. Pero f no es $\mathcal{I}$-continua ya que $\{0, 1\}$ es abierto en Y y $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{b\}$ no es τ^*-abierto en X.*

Corolario 3.1. *Sea $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ una función inyectiva. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) La imagen $\sharp$ de cada subconjunto $\mathcal{I}$-denso en X, es un subconjunto $\mathcal{J}$-denso en Y.

(b) La imagen $\sharp$ de cada subconjunto $*$-denso en si mismo de X, es un subconjunto $*$-denso en si mismo en Y

Prueba:

(a) Sea A un subconjunto $\mathcal{I}$-denso en X. Entonces por Definición 1.15(a), se tiene que $A^* = X$. Sustituyendo en el Teorema 3.4(b), se obtiene que $f^\sharp(X) \subseteq (f^\sharp(A))^*$. Del Lema el 1.3(f), implica que $f^\sharp(X) = Y$, por lo tanto, $(f^\sharp(A))^* = Y$. Asi, $f^\sharp(A)$ es un subconjunto $\mathcal{J}$-denso en Y.

(b) Sea A un subconjunto $*$-denso en X. Entonces por Definición 1.15(b), $A \subseteq A^*$, del Lema 1.3(f), se tiene que $f^\sharp(A) \subseteq f^\sharp(A^*)$. Por el Teorema 3.4(b), se obtiene que

$f^\sharp(A^*) \subseteq (f^\sharp(A))^*$. Por lo tanto, $f^\sharp(A) \subseteq (f^\sharp(A))^*$. Y así, $f^\sharp(A)$ es un subconjunto $*$-denso en Y.

Teorema 3.5. *Si $f : (X, \tau, \mathcal{I}) \to (Y, \delta, \mathcal{J})$ es una función $\mathcal{I}-$continua e inyectiva y $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$ entonces $\delta \cap \mathcal{J} = \{\emptyset\}$.*

Prueba: Considere el subconjunto $A = X$. Sustituyendo en el del Teorema 3.4(b), implica que $f^\sharp(X^*) \subseteq (f^\sharp(X))^*$. Luego por hipótesis $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$, del Lema 1.4(c), se tiene que $f^\sharp(X) \subseteq (f^\sharp(X))^*$. Como $f^\sharp(X) = Y$, según Lema 1.3(f), entonces $Y \subseteq Y^*$, de aquí $Y = Y^*$. Nuevamente del Lema 1.4(c), se concluye que $\delta \cap \mathcal{J} = \{\emptyset\}$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un estudio detallado de las nociones de funciones $\mathcal{I}$-abiertas e $\mathcal{I}$-continuas, se dieron nuevas caracterizaciones de las misma utilizando la función local y el la función inducida, se descartó la hipótesis de biyección propuesta en los resultados de [8] y se pudo introducir de manera similar la noción de función $\mathcal{I}$-cerrada, de igual manera, se introdujeron conceptos como conjuntos $\mathcal{J}$-densos y $*$-densos en si mismo, y se pudo mostrar que en el caso de la topología compatible para las funciones $\mathcal{I}$-cerradas, las hipótesis pudieron ser cambiadas, finalmente para las funciones $\mathcal{I}$-continuas se obtuvieron nuevos resultados mediante las funciones inyectivas y los conjuntos saturados.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. Dontchev, M. Ganster and D. Rose. 1999. Ideal resolvability. *Topology and its Applications*, **93**, 1-16. http://dx.doi.org/10.1016/S0166-8641(97)00257-5.

[2] T.R. Hamlett and D. Rose. 1992. Local compactness with respect to an ideal. *Kyungpook Math. J.* **32**, 31-43.

[3] E. Hayashi. 1964. Topologies defined by local properties. *Math. Ann.* **156**, 205-215. http://dx.doi.org/10.1007/BF01363287.

[4] D. Jankovi'c and T.R. Hamlett. 1990. New topologies from old via ideals. *The American Mathematical Monthl*, **97**, 295-310. http://dx.doi.org/10.2307/2324512.

[5] J. Kanicwski and Z.Piotrowski. 1986. Concerning continuity apart from a meager set. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**, 324-328.

[6] K. Kuratowski. 1966. *Topology.* Volumen I. Academic Press. New York.

[7] N.S. Noorie and R. Bala. 2008. Some characterizations of open, closed and continuous mappings. *Int. J. Math. Mathematical Sci.*, Article ID527106, 5 paginas. http://dx.doi.org/10.1155/2008/527106.

[8] D. Sivaraj and V. Renuka Devi. 2006. ∗-homeomorphism. *Italian J. Pure and Appl.Maths.*, **20**.

[9] R. Vaidyanathswamy. 1945. The localisation theory in set topology. *Proc. Indian Acad.Sci.*, **20**, 51-61.

[10] R. Vaidyanathswamy. 1946. *Set Topology.* Chelsea Publishing Company. New York.

HOJA DE METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 1/6

Título	CARACTERIZACIONES DE FUNCIONES ABIERTAS, CERRADAS Y CONTINUAS UTILIZANDO IDEALES TOPOLÓGICOS
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Díaz Yendys, Ramón David	CVLAC	23.582.407
	e-mail	ramonddiaz93@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

función I-abierta, función I-cerrada, función I-continua, conjunto *-denso,
espacio topológico, ideal topológico, conjunto saturado, operador,
función local, función inducida

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	Matemáticas

Resumen (abstract):

Dado un espacio topológico (X, τ) sobre el que se considera un ideal $\mathcal{I}$, se estudian y obtienen nuevas caracterizaciones de funciones $\mathcal{I}$ -abiertas, $\mathcal{I}$ -cerradas e $\mathcal{I}$-continuas utilizando el concepto de función local y función inducida $f^{\sharp}$. Se muestra un resultado más fuerte en el caso de topología compatible para funciones $\mathcal{I}$-cerradas que también pueden descartarse en el caso de subconjuntos $*$-densos en si mismos. Se generalizan algunos resultados conocidos y finalmente se dan varias propiedades para las funciones $\mathcal{I}$-continuas en términos de funciones inyectivas y conjuntos saturados.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Rosas, Ennis	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☒ JU ☐
	CVLAC	4.049.607
	e-mail	ennisrafael@gmail.com
	e-mail	
Ramírez, Henry	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒
	CVLAC	12.666.890
	e-mail	hlramirezy6@gmail.com
	e-mail	
Rojas, Moisés	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒
	CVLAC	24.691.979
	e-mail	rojasmoises022@gmail.com
	e-mail	
	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☐
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2021	07	15

Lenguaje: spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
tesis-diazr.pdf	Aplication/pdf

Alcance:

Espacial: Nacional

Temporal: Temporal

Título o Grado asociado con el trabajo:

Licenciado en Matemáticas

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciado

Área de Estudio: Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

Universidad de Oriente

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 5/6

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda ***"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009".***

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
SISTEMA DE BIBLIOTECA
RECIBIDO POR
FECHA 5/8/09 HORA 5:30

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLAÑOS CURVELO
Secretario

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE ORIENTE SECRETARÍA CONSEJO UNIVERSITARIO

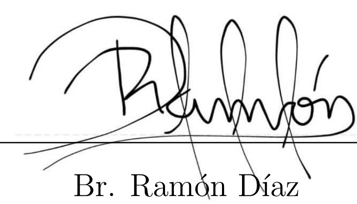
C.C: *Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.*

JABC/YGC/maruja

Apartado Correos 094 / Telfs: 4008042 - 4008044 / 8008045 Telefax: 4008043 / Cumaná - Venezuela

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009): "Los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo del Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización."



Br. Ramón Díaz

Autor

Dr. Ennis Rosas

Tutor