

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS SOCIALES
DEPARTAMENTO DE TRABAJO SOCIAL



Introducción A Los Modelos De Ecuaciones Estructurales Y Sus Aplicaciones

TRABAJO PRESENTADO POR:

MSc. YONNY JESÚS ALBORNOZ TORRES

CUMANÁ, Mayo DE 2021

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla los modelos de ecuaciones estructurales, Este es utilizado para constrar modelos que proponen relaciones causales entre las variables presentes en particular en un fenómeno social. Además son una familia de modelos estadísticos multivariantes que permiten estimar el efecto y las relaciones entre multiples variables. Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el Primer capítulo comienza con un fundamento matemático que ayuda a los interesados de las ciencias Sociales a seguir el estudio de los modelos de ecuaciones estructurales. El segundo capítulo hace una introducción a los modelos de ecuaciones estructurales, tales como: la notación de modelos , los modelos de variable latente, los modelos medibles, la varianza muestral y el análisis de rutas. En el tercer capítulo se aborda los modelos de ecuaciones estructurales con variables observables, donde se abordo temas como: la espificación del modelo, la matriz de covarianza implícita, la identificación , la regla t y la estimación. En el cuarto capítulo se desarrolla las aplicaciones de los modelos estructurales.

Agradecimiento

A Cristo, mi mayor hallazgo en esta existencia terrenal.

A mis Padres, mi supremo obsequio.

A mi Esposa, mi preeminente amiga y compañera en la vida universal.

A mi familia y amigos por su fundamento y compañía en el intervalo de tiempo infinito.

Índice general

RESUMEN	II
INTRODUCCIÓN	IX
1. Elementos Matemáticos que Fundamentan los Modelos de Ecuaciones Estructurales	1
1.0.1. Leyes Fundamentales del Álgebra Escalar.	1
1.0.2. Vectores	4
1.0.3. Coseno del Ángulo entre Vectores	11
1.0.4. Proyección	16
1.0.5. Álgebra de Matrices	21
1.0.6. Análisis univariante	27
2. Modelos de Ecuaciones Estructurales	31
2.1. Notación del Modelo:	34
2.1.1. Modelo de Variable Latente:	35
2.1.2. Modelo Medible	42
2.1.3. Modelos Medibles de Ecuaciones Estructurales	46
2.1.4. Covarianza Muestral	49
2.1.5. Análisis de Ruta (Path)	57
3. Modelos de Ecuaciones Estructurales con Variables Observadas	67
3.0.1. Especificación del Modelo	68
3.0.2. Matriz de Covarianza Implícita	74
3.0.3. Identificación	77
3.0.4. Regla t	83
3.1. Estimación	95

4. Aplicaciones de los Modelos de Ecuaciones Estructurales	101
CONCLUSIÓN	113
BIBLIOGRAFÍA	116

Introducción

La sociedad es el conjunto de personas que comparten fines, preocupaciones y costumbres, y que interactúan entre sí, constituyendo una comunidad. También es una entidad poblacional o hábitat, que considera a los habitantes y a su entorno, todo ello interrelacionado con un proyecto común, que les da una identidad de pertenencia.(López, J. 2002).

Es por ello, que la socialización es un proceso complejo de influencias, ambientes culturales, condiciones positivas y negativas y en medio de esa complejidad, el individuo en su interacción social, desde la aparición del hombre en el planeta tierra y su evolución en el tiempo, desde el hombre en las cavernas hasta la construcción de una sociedad, el ser humano construye su propio conocimiento y lo comparte con otros individuos en la colectividad.

Durante este proceso de construcción surgieron necesidades y con ello los conocimientos socialmente edificado a través del tiempo, para aportar soluciones en la evolución de la sociedad. Entre estos conocimientos surgieron las matemáticas y desde entonces ha sostenido una constante evolución. Cada vez son más sus aportes hacia otras ciencias y cada vez más aumenta su campo de estudio.

Desde sus primeros pasos, la matemática no es ni fue lo que hoy día conocemos como matemática. Esta ciencia incomprendida por muchos, nace por la necesidad del hombre de cuantificar casi todas sus actividades diarias; la agricultura, el comercio, la economía familiar, etc. Cada civilización (egipcios, chinos, romanos, indúes, griegos) le impregnó a la matemática cierto valor cultural propio de sus creencias, de la forma de observar el mundo y las fuerzas que en él se manifiestan.

Así por ejemplo, para los egipcios la existencia del número negativo o del cero era prácticamente imposible, ya que para ellos el número estaba íntimamente relacionado a la cantidad y la medida. Por otro lado, para los indúes la existencia de números negativos representaba un hecho muy normal y acep-

tado por todos, ya que para ellos el número positivo representaba el “bien” la “fuerza positiva” y el número negativo representaba el “mal” la “fuerza negativa opuesta a la positiva”. Los indúes afirmaban que al encontrarse dos “fuerzas” de igual magnitud pero opuestas (el “mal” vs el “bien”) se obtenía el “equilibrio”, se obtenía el número cero.

Ahora bien se debe a los griegos que la matemática se conozca hoy día como la conocemos. En su mundo de ideas, y por darle sentido a la vida: dónde se encuentra el ser, la existencia de lo puro, de lo único, de lo indivisible, impregnaron a la matemática de Leyes y Propiedades e hicieron de ella una ciencia que se construye a partir de axiomas, postulados, teoremas, colorarios. Esto, permitió que la matemática creciera e impregnó al mundo de ella. El aporte de los griegos fue muy beneficioso para el crecimiento de la misma, el único error y no lo cometieron los griegos, fue suponer que para aprender matemáticas se debe comenzar por aprender todos sus axiomas, postulados, teoremas, leyes. . . que explican cómo ella funciona, en lugar de mostrar sus operaciones desde el punto más básico, para luego, en el tiempo, desarrollar esas competencias que permite ver en ella la necesidad de tener que plantear toda esa estructura lógica para poder generalizar sus operaciones, sus propiedades.

Más adelante la teoría de la probabilidad tuvo sus comienzos a principios del siglo XVII como resultado de investigaciones sobre diversos juegos de azar. De entonces acá han contribuido a su perfeccionamiento muchos matemáticos y científicos célebres, pero a pesar de su larga y activa historia, sólo se axiomatizó durante la tercera y cuarta década del sigglo XX. Este desarrollo axiomático, llamado teoría moderna de la probabilidad, precisó los conceptos de la probabilidad y los colocó sobre una firme base matemática.

La importancia de la probabilidad ha crecido enormemente en los últimos años, y hoy aparece, junto con su disciplina gemela, la estadística, en casi todos los campos, como la física, la química, sociología, etc.

La estadística, en muchas investigaciones se aplica pensada en términos de modelos de observación individual, sin embargo se aplica a las técnicas multivariantes como regresión múltiple o ANOVA (Análisis de Varianza), ecuaciones de modelos estructurales, etc.

Los modelos de ecuaciones estructurales, es una técnica de análisis estadístico multivariante utilizada para contrastar modelos que proponen relaciones causales entre las variables. Además son una familia de modelos estadísticos multivariantes que permiten estimar el efecto y las relaciones entre múltiples variables. Por consiguiente en este trabajo se tiene como ob-

jetivo entender los elementos básicos de la matemáticas para comprender los modelos de ecuaciones estructurales y sus aplicaciones, para la elaboración de este trabajo se utilizando las siguientes herramientas tex studio, matlab y el paquete Spss20 y su complemento Amos.

Capítulo 1

Elementos Matemáticos que Fundamentan los Modelos de Ecuaciones Estructurales

El presente estudio de Modelización de Ecuaciones Estructurales requiere del conocimiento preliminar del cálculo como herramienta fundamental para una mejor comprensión del área. En consecuencia, en este capítulo se intentará proporcionar una breve introducción a los temas matemáticos de álgebra moderna, trigonometría, álgebra escalar; con este último término se refiere al álgebra ordinaria aplicable a los números reales, que el lector ya debe estar familiarizado. El uso de este término distingue el álgebra ordinaria de las operaciones con vectores y el álgebra de matriz, que abordaremos en breve.

1.0.1. Leyes Fundamentales del Álgebra Escalar.

Las siguientes leyes regulan las operaciones básicas del álgebra escalar como la adición, sustracción, multiplicación y división:

- Ley de cierre para la adición: $a + b$ es un número real único.
- Ley conmutativa para la adición: $a + b = b + a$.
- Ley asociativa por la derecha para la adición: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Ley de cierre para la multiplicación: ab es un número real único.
- Ley conmutativa para la multiplicación: $ab = ba$.

- Ley asociativa por la derecha para la multiplicación: $a(bc) = (ab)c$.
- Ley de Identidad para la adición: Existe un número 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$.
- Ley inversa para la adición: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- Ley de identidad para la multiplicación: Existe un número 1 tal que $a1 = 1a = a$.
- Ley inversa para la multiplicación: $a(1/a) = (1/a)a = 1$.
- Ley distributiva por la derecha: $a(b + c) = ab + ac$.

Las leyes anteriores son suficientes para operar con el sistema de números reales. Sean a y b números reales,

- Propiedades especiales del cero:

$$\frac{0}{a} = 0 \quad ; \quad \frac{a}{0} \text{ indefinido} \quad ; \quad \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

- La regla de los signos para el producto:

$$a(-b) = -(ab) \quad \text{y} \quad (-a)(-b) = +(ab)$$

- La regla de los signos para la división se da como:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{y} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

- La regla de los signos para quitar paréntesis se da como:

$$-(a - b) = -a + b \quad \text{y} \quad -(a + b) = -a - b$$

- Reglas para exponentes.

Si n es un entero positivo, entonces x^n está representada por:

$xx\dots xxx$ con n términos

Si $x^n = a$, entonces a se conoce como la raíz n -ésima de x .

Las siguientes reglas proporcionan el uso de exponentes:

- $x^a x^b = x^{a+b}$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$
- $\left(\frac{x^a}{x^b}\right) = x^{a-b}$

para Resolver las ecuaciones simples.

Sea x una cantidad desconocida y sean a, b, c y d las cantidades conocidas. Entonces, dada la siguiente ecuación,

$$ax + b = cx + d$$

La cantidad desconocida x se puede encontrar aplicando operaciones a ambos lados de la ecuación hasta que sólo x permanece en un lado de la ecuación y las cantidades conocidas en el otro lado. Es decir,

$$ax + b - cx = cx + d - cx \quad \text{al restar, a ambos lados, } cx$$

Se obtiene:

$$ax - cx + b = d$$

Luego al restar, a ambos lados, b

$$ax - cx + b - b = d - b$$

Se tiene:

$$ax - cx = d - b$$

Ahora, se aplica la ley distributiva a la izquierda

$$x(a - c) = d - b$$

A continuación se divide, a ambos lados, por $a - c$

$$\frac{x(a - c)}{a - c} = \frac{d - b}{a - c}$$

Obteniéndose:

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

1.0.2. Vectores

Uno de los propósitos de esta sección es proporcionar los conceptos de algunos elementos abstractos del álgebra moderna. Estas definiciones son herramientas básicas imprescindibles para entender la teoría básica de los modelos de ecuaciones estructurales. Hace muchos años los griegos desarrollaron la geometría elemental. Crearon una manera sistemática de analizar las propiedades de los puntos, las rectas, circunferencias y otras configuraciones. Todo su trabajo fué sintetizado en “los elementos de Euclides”. A continuación Se presentan algunas definiciones; a saber:

Definición 1.0.1 *Un Grupo es un conjunto no vacío, con una operación binaria sobre G , es una función $G \times G \rightarrow G$ existe varias notaciones usadas comunmente para la imagen de (a,b) bajo una operación binaria $a \cdot b$ (una notación multiplicativa), $a + b$ (una notación aditiva), comportándose según las siguientes propiedades:*

- Si a y b son elementos del grupo, entonces $a + b$ y $b + a$ son también elementos del grupo, aunque no necesariamente el mismo elemento (ciere).
- Si a , b y c son elementos del grupo, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Ley asociativa por la derecha).
- Hay un elemento 0 en el grupo tal que para cada a en el grupo $a + 0 = 0 + a = a$ (ley de identidad).
- Para cada a en el grupo hay un elemento $(-a)$ en el grupo tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (ley inversa).

Solamente cuatro leyes rigen un grupo, mientras que once leyes deben ser consideradas en el álgebra escalar, conocido en matemáticas como campo. Entre los varios sistemas abstractos de matemáticas, el sistema conocido como espacio vectorial es el más importante para el análisis de factores. Un espacio vectorial consiste en dos conjuntos de objetos matemáticos, un conjunto V de vectores y un conjunto R de elementos de campo, junto a dos operaciones para luego combinarlos. La primera operación es conocida como adición de vectores, donde u, v, w , pertenecen al conjunto V de vectores y cumplen las siguientes propiedades:

- $u + v$ es también un vector definido en V .
- $u + (v + w) = (u + v) + w$
- $(u + v) = (u + w)$
- Existe un vector 0 en V , tal que $u + 0 = 0 + u = u$
- Para cada vector en V , existe un único vector $-u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$

Se puede observar que en la adición de vectores el conjunto V de vectores es un grupo.

La segunda operación proporciona la combinación de los R elementos del campo de escalares con los elementos del conjunto V de vectores y se conoce como multiplicación escalar, ésta debe considerar todos los elementos a, b del campo R de escalares y todos los vectores u, v del conjunto V de vectores, cumpliéndose, así, las siguientes propiedades:

- au es un vector en V .
- $a(u + v) = au + av$
- $(a + b)u = au + bu$
- $a(bu) = ab(u)$
- $1u = u$
- $0u = 0$

Este hecho tiene implicaciones importantes para las estadísticas multivariadas, análisis de factores y en particular, para la modelización de ecuaciones estructurales, porque el concepto vectorial se puede utilizar para unificar el tratamiento de las variables en poblaciones finitas e infinitas. El lector debe tomar en cuenta lo señalado, ya que la idea clave en este trabajo es que, en cualquier análisis lineal de variables de las ciencias conductuales y sociales, las variables pueden ser tratadas como si fueran vectores en un espacio vectorial lineal. La representación concreta de estas variables pueden diferir en varios contextos, es decir, pueden ser n -tuplas o variables aleatorias, pero siempre pueden considerarse vectores.

N-tuplas como vectores En un espacio vectorial de n-tuplas, un vector es un punto en el espacio n-dimensional el cual es representado por un conjunto ordenado de números conocido como n-tupla, que representa las coordenadas del punto.

Ejemplo 1.0.1 *El punto $A = (3, 5, 8)$ es un 3 – tupla que representa un vector en el espacio tridimensional que está a 3 unidades de el origen (del sistema de coordenadas) en la dirección a lo largo del eje x, 5 unidades desde el origen en la dirección del eje y, y 8 unidades desde el origen en la dirección del eje z.*

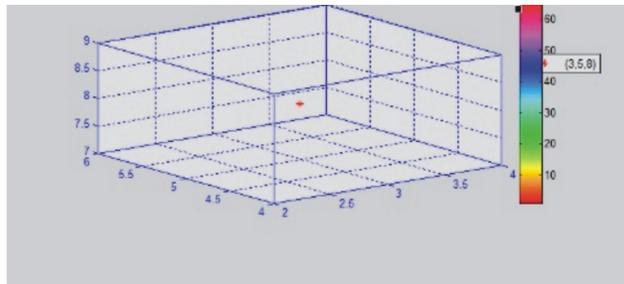


Figura 1.1: PuntoA en 3D

En un espacio vectorial de n-tuplas, se consideran ciertas operaciones que se aplicarán a las n-tuplas que definen los vectores. Estas operaciones definirán la suma, la resta y la multiplicación en el espacio vectorial de n-tuplas.

Igualdad De Vectores

Dos vectores son iguales si ellos tienen las mismas coordenadas.

Ejemplo 1.0.2 *Si $u = (1, 2, 4)$ y $v = (1, 2, 4)$, entonces $u = v$ Una condición necesaria para que dos vectores sean iguales es que tenga en mismo número de coordenadas.*

Ejemplo 1.0.3 Sean $u = (1, 2, 3, 4)$ y $v = (1, 2, 3)$, entonces $u \neq v$.

De hecho, cuando dos vectores tienen diferentes números de coordenadas, se refieren a un orden diferente de n -tuplas y no se pueden comparar o agregar.

Escalares y Vectores

Los vectores componen un sistema completo en sí mismos. Pero son de un orden diferente al del álgebra que normalmente se tratan cuando se usan números reales. Algunas veces introducimos números reales en el sistema de vectores. Cuando nosotros hacemos esto, llamamos a los números reales escalares. En nuestro esquema de notación, distinguimos los escalares de los vectores al escribir los escalares en cursiva y los vectores en minúsculas negrita. Así $a \neq \mathbf{a}$.

En la notación vectorial, con mayor frecuencia se consideran los vectores en abstracto. Entonces, en lugar de usar números reales para representar las coordenadas de los vectores, se usan cantidades escalares expresadas algebraicamente.

Ejemplo 1.0.4 Sea un vector general \mathbf{a} de cinco dimensiones, este se puede escribir como: $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

Multiplicación de un Vector por un Escalar.

Sea \mathbf{a} un vector tal que $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y λ un escalar, entonces la operación $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{c}$ se produce otro vector \mathbf{c} tal que: $\mathbf{c}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$

Ejemplo 1.0.5 Sea $\mathbf{a}=(1, 3, 4, 5)$ y $\lambda = 2$, entonces $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}$ así se tiene: $\mathbf{c}=2\mathbf{a}=(2, 6, 8, 10)$

Adición de Vectores

Si $\mathbf{r}=(1, 3, 2)$ y $\mathbf{g}=(2, 1, 5)$, su suma es denotada por $\mathbf{r} + \mathbf{g}$, es otro vector \mathbf{h} , $\mathbf{h}=(1, 3, 2) + (2, 1, 5)=(3, 4, 7)$

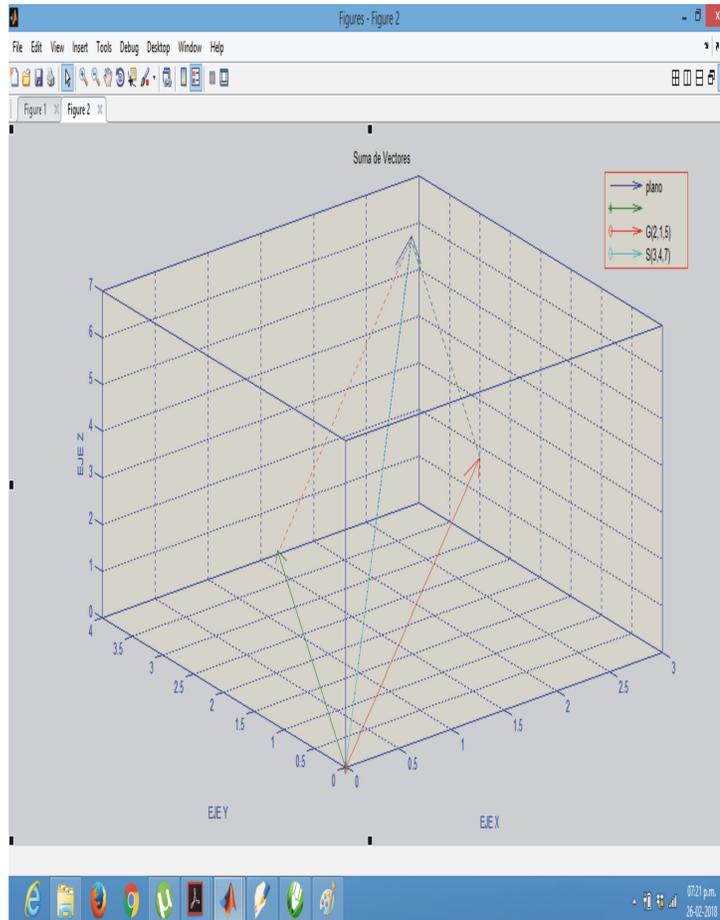


Figura 1.2:

Producto Escalar de Vectores

En algunos espacios vectoriales, además de las dos operaciones de adición de vectores y multiplicación escalar, se define una tercera operación conocida como el producto escalar de dos vectores (escrito como $\mathbf{x}\mathbf{y}$ para cada par de vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , que asocia un escalar con cada par de vectores). Esta operación tiene las siguientes propiedades abstractas, dada que \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} son vectores arbitrarios y a es un escalar arbitrario.

- $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x} = a$, a es escalar (Simetría)
- $\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}$ (Linealidad respecto al primer factor)

- $\mathbf{x}(a\mathbf{y}) = a\mathbf{x}\mathbf{y}$ (Homogenidad)
- $\mathbf{x}\mathbf{x} \geq 0$; $\mathbf{x}\mathbf{x} = 0$ implica que $\mathbf{x} = 0$ (Positividad)

Cuando el producto escalar se define en un espacio vectorial, el espacio vectorial es conocido como un espacio vectorial unitario. En un espacio vectorial unitario es posible establecer la longitud de un vector así como el coseno del ángulo entre pares de vectores. El análisis factorial, así como otros análisis lineales multivariados se ocupa exclusivamente de espacios vectoriales unitarios. Ahora consideraremos la definición del producto escalar para un espacio vectorial de n-tuplas. Sea \mathbf{a} el vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y sea $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$; entonces el producto vectorial de \mathbf{a} y \mathbf{b} , escrito $\mathbf{a}\mathbf{b}$, es la suma de los productos de los componentes correspondientes de los vectores, es decir:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.0.6 Sea $\mathbf{a} = (2, 7, 9)$ y $\mathbf{b} = (3, 5, 5)$ $\mathbf{a}\mathbf{b} = (2 \cdot 3 + 7 \cdot 5 + 9 \cdot 5)$
 $\mathbf{a}\mathbf{b} = (6 + 35 + 45) = 86$

La ecuación 1.1 se puede reescribir como:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad (1.2)$$

Norma y Distancia Entre Vectores

Ahora es posible introducir una noción de tamaño de un vector y de distancia de dos vectores.

Definición 1.0.2 La norma (de modo más preciso, la norma euclídeana) de un vector $\mathbf{x} \in R^n$, denotada por $\|\mathbf{x}\|$, como $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$

En concreto si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se tiene $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

El teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

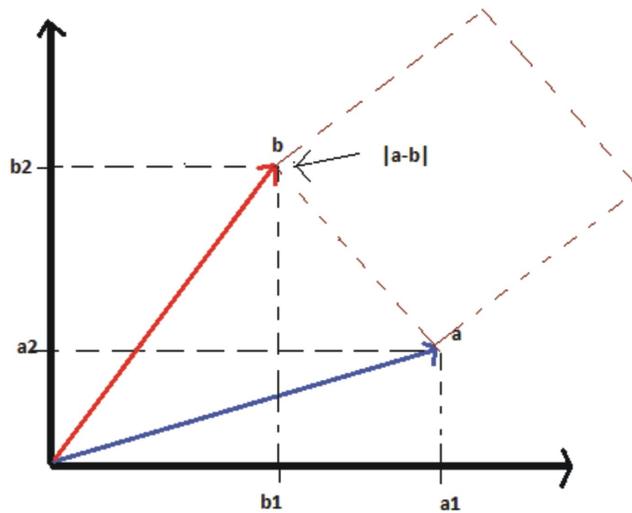


Figura 1.3: distancia

Este teorema es la base para encontrar la distancia entre dos puntos vectoriales. Se define la distancia entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , escritos como:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \left[\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

ahora se consideran \mathbf{a} y \mathbf{b} son ambos vectores con n componentes. Esto significa que se encuentran la suma de las diferencias cuadradas con las componentes correspondientes de los dos vectores y luego tomar la raíz cuadrada de eso.

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Longitud de un Vector

Usando la Ecuación 1.3, se puede encontrar una ecuación para la longitud de un vector, que es, la distancia de su punto desde el origen del sistema de coordenadas. Se define el vector cero como: $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, entonces

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{0}\| = \left[\sum_{i=1}^n (a_i - 0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Otra definición de Multiplicación Escalar

La multiplicación escalar de vectores viene dada por la fórmula:

$$\mathbf{ab} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad (1.5)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores. En otras palabras, el producto escalar de un vector por otro vector es equivalente al producto de las longitudes de los dos vectores por el coseno del ángulo entre ellos.

1.0.3. Coseno del Ángulo entre Vectores

Ya que se tiene planteado el concepto del coseno del ángulo entre vectores. Se debe considerar el significado de la función coseno como otra importante función trigonométrica.

En la siguiente Figura hay un triángulo rectángulo donde θ es el valor del ángulo entre la base del triángulo y la hipotenusa. Si designamos el lado opuesto al ángulo θ como a , la longitud de la base como b , y la longitud del hipotenusa como c , las proporciones de estos lados entre sí dan las siguientes funciones trigonométricas:

- $\text{tang}(\theta) = \frac{a}{b}$
- $\text{sen}(\theta) = \frac{a}{c}$
- $\text{cos}(\theta) = \frac{b}{c}$

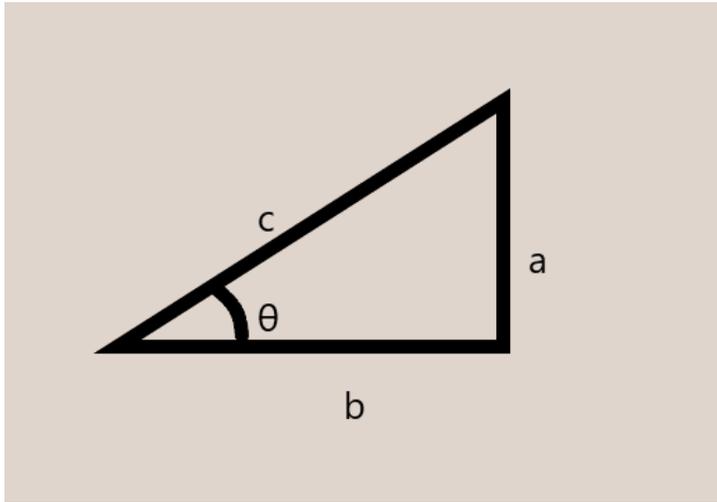


Figura 1.4: Triángulo Rectángulo

La reflexión sobre el asunto mostrará que estas razones están completamente determinadas por el valor del ángulo θ en el triángulo rectángulo y son independientes del tamaño del triángulo.

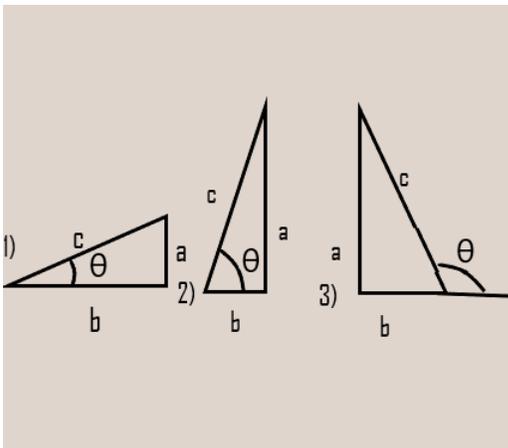


Figura 1.5: Triángulos Rectángulos

Observe qué sucede con el valor de $\cos(\theta)$ cuando θ está cerca de 0 y cuando θ está cerca de 90. En la figura 1.5(1), se ilustra un triángulo en el que el ángulo θ está cerca de 0. De ahí el valor de $\cos(\theta)$ como la razón de $\frac{b}{c}$ está cerca de 1,00.

En la figura 1.5(2), se ilustra un triángulo en el cual el ángulo θ está cerca de 90. En este caso, la longitud b es bastante pequeña en relación con la longitud de c . Por lo tanto, el valor de $\cos(\theta)$ está cerca de 0.

En la Figura 1.5(3), ilustra un triángulo en el que el ángulo es mayor que 90. En este caso, b se le da un valor negativo, porque la longitud de la base se mide desde el origen del ángulo en una dirección opuesta a la dirección en la cual se mide longitudinalmente la base.

Por convención, la longitud de la hipotenusa siempre es positiva. Por lo tanto, el coseno de un ángulo entre 90 y 180 es un valor negativo. Además, a medida que se acerca el ángulo $\theta = 180$, $\cos(\theta)$ se acerca a -1 .

La función del coseno sirve así como un índice útil de relación entre vectores. Cuando dos vectores tienen un ángulo muy pequeño entre ellos, el coseno del ángulo entre ellos es casi 1. Cuando los dos vectores están separados por 90, nada se proyecta de un vector al otro, y el coseno del ángulo entre ellos está cerca de 0. Cuando el ángulo entre ellos está entre 90 y 180, el coseno del ángulo es negativo, lo que indica que un vector apunta en la dirección opuesta, en cierta medida desde el otro. Se puede usar la ecuación 1.5 para encontrar el coseno del ángulo entre dos vectores en términos de sus componentes. Si dividimos ambos lados de la Ecuación 1.5 por la expresión $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$, tenemos:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|} \quad (1.6)$$

Pero se usan las ecuaciones 1.2 y 1.4, la ecuación 1.6 puede reescribirse como:

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{[(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)]^{1/2}} \quad (1.7)$$

La ecuación 1.7 tiene una relación directa con la fórmula del coeficiente de correlación. La ecuación 1.7, puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\gamma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{[(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2)]^{1/2}} \quad (1.8)$$

Esta ecuación 1.8 es equivalente a una de las formas en que el coeficiente de correlación de la muestra se da en la mayoría de los textos de estadísticas.

A continuación se deduce el coeficiente de correlación a partir de la ecuación 1.8: en primer lugar se realiza un cambio de variable $x_i = X_i - \bar{X}$ e $y_i = Y_i - \bar{Y}$, y tenemos:

$$\gamma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{[(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2)]^{1/2}} \quad (1.9)$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i Y_i - X_i \bar{Y} - \bar{X} Y_i + \bar{X} \bar{Y})}{[(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2)]^{1/2}} \quad (1.10)$$

$$\gamma_{XY} = \frac{(\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \bar{Y} - \sum_{i=1}^n \bar{X} Y_i + \sum_{i=1}^n \bar{X} \bar{Y})}{[(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2)]^{1/2}}. \quad (1.11)$$

Ahora se divide el numerador y el denominador de la ecuación 1.11) por n .

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \bar{Y}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{X} Y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{X} \bar{Y}}{n} \right)}{\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n} \right) \right]^{1/2}} \quad (1.12)$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \bar{X} \bar{Y} - \bar{X} \bar{Y} + \bar{X} \bar{Y} \right)}{\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n} \right) \right]^{1/2}} \quad (1.13)$$

La siguiente ecuación es especialmente útil cuando se conocen las medias de X e Y así como sus desviaciones típica, lo cual es relativamente frecuente.

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \bar{X} \bar{Y} \right)}{\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n} \right) \right]^{1/2}} \quad (1.14)$$

Por otro lado, se determina una expresión análoga a los términos del denominador de la ecuación 1.14:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n 2X_i \bar{X}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{X}^2}{n} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} + \frac{\bar{X}^2}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} + \frac{\bar{X}^2}{n} n \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - 2\bar{X} \bar{X} + \frac{\bar{X}^2}{n} n \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - 2\bar{X}^2 + \frac{\bar{X}^2}{n} n \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - \bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right)^2 \\
&= \frac{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n^2}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Análogamente, se cumple para la segundo término del denominador de la ecuación 1.14

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n} \\
&= \frac{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n^2}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Ahora se sustituye la ecuación 1.15 y la ecuación 1.16 en la ecuación 1.14

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \bar{X}\bar{Y}\right)}{\left[\left(\frac{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n^2}\right)\left(\frac{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n^2}\right)\right]^{1/2}} \quad (1.17)$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}\right)}{\left[\left(\frac{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n^2}\right)\left(\frac{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n^2}\right)\right]^{1/2}} \quad (1.18)$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(\frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n^2}\right)}{\left[\left(\frac{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n^2}\right)\left(\frac{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n^2}\right)\right]^{1/2}} \quad (1.19)$$

Si por cualquier circunstancia no se dispone de la información de estos estadísticos (medias y desviacion estandar) se podrá calcular γ_{XY} recurriendo a la expresión en puntuaciones directas. Así se obtiene lo que se quiere demostrar:

$$\gamma_{XY} = \frac{\left(n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i\right)}{\left[\left(n \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\sum_{i=1}^n X_i)^2\right)\left(n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2\right)\right]^{1/2}} \quad (1.20)$$

1.0.4. Proyección

En la figura 1.6, \mathbf{x} y \mathbf{y} son dos vectores con un ángulo θ entre ellos. El vector \mathbf{p} , llamado la proyección de \mathbf{x} sobre \mathbf{y} , se obtiene al proyectar una perpendicular de \mathbf{x} sobre una línea colineal con \mathbf{y} y dibujando un vector a ese punto, c y b son las longitudes de \mathbf{x} y \mathbf{p} respectivamente.

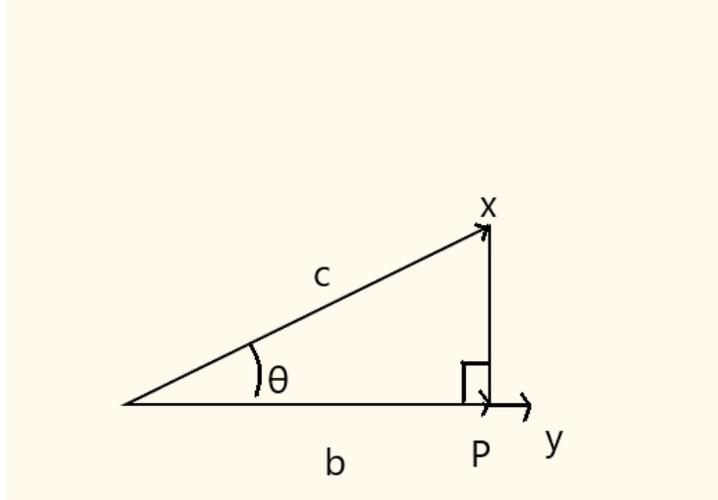


Figura 1.6: proyeccion

Como $\cos(\theta) = \frac{b}{c}$, entonces $b = c \cos(\theta)$ es la longitud de \mathbf{p} . Además, como sabemos que existe una biyección entre R^2 y los complejos(C), así tenemos \mathbf{x}' es el conjugado de \mathbf{x} , además por la ecuación 1.6 el vector $\mathbf{a} = \mathbf{x}'$, y el vector $\mathbf{b} = \mathbf{y}$, donde $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{x}'\| = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$ y $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}$, por lo tanto $c = \sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$ y sustituyendo los vectores mencionados en la ecuación 1.6, se tiene $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}}$; entonces $b = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}}$.

La proporción de longitud de \mathbf{y} debido a la longitud de \mathbf{p} es:

$$\frac{b}{\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}}.$$

La proyección de \mathbf{x} sobre \mathbf{y} es así $\mathbf{p} = \left(\frac{\mathbf{x}'\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}}\right)\mathbf{y}$.

El concepto de proyección es central en los cuadrados mínimos de la regresión de una variable sobre otra. Aquí \mathbf{p} es la parte predecible de \mathbf{y} debido a \mathbf{x} .

Tipos de Vectores Especiales

El vector nulo $\mathbf{0}$ es el origen en el sistema de coordenadas en el espacio y es definido por $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$

El vector suma $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ es usado cuando se desea sumar las componentes con otro vector \mathbf{a} como:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \mathbf{1a}$$

Note que $\mathbf{1a} \neq \mathbf{a1}$

Un vector normalizado es un vector con longitud igual a 1, cualquier vector dado diferente de cero, puede ser transformado en un vector normalizado, por la división de cada una de sus componentes por el valor de su longitud. En otras palabras, si \mathbf{v} es un vector, \mathbf{v} puede ser transformado en vector \mathbf{u} normalizado, tal que $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$, donde $\|\mathbf{u}\| = 1$

El vector unitario es frecuentemente usado como un vector base en un conjunto de vectores bases de los cuales los otros vectores ocupan el espacio y pueden ser derivados como una combinación lineal. El vector unitario i th en un espacio de n dimensiones es denotado \mathbf{e}_i , donde:

- $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$
- $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$
- $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$
-
- $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$

Note que cualquiera dos vectores unitarios diferentes son ortogonales $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = 0, i \neq k$

Subespacios de R^n

Definición 1.0.3 *Se denomina subespacio de R^n a un conjunto \mathbf{U} de vectores de R^n que cumple las siguientes propiedades:*

- *El vector nulo $\mathbf{0}$ está contenido en \mathbf{U} .*
- *Si \mathbf{X} e \mathbf{Y} están en \mathbf{U} , entonces $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ también está en \mathbf{U}*
- *Si \mathbf{X} está en \mathbf{U} , entonces $r\mathbf{X}$ también está en \mathbf{U} , siendo r cualquier escalar (número real).*

Combinación Lineal

Definición 1.0.4 Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial \mathbf{V} . Al igual que en R^n , un vector \mathbf{V} se denomina **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ si se puede expresar de la forma:

$$\mathbf{V} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son escalares, llamados coeficientes de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Al conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores se le designa por $L\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

Si se cumple que $\mathbf{V} = L\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, estos vectores se denomina sistemas de generadores de \mathbf{V} .

Ejemplo 1.0.7 El sistema generado por dos vectores \mathbf{v} y \mathbf{w} es el conjunto $L\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \{s\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \text{ tal que } s \text{ y } t \in R\}$ formado por todas las sumas de los productos por escalares de los vectores dados

Ejemplo 1.0.8 Si, $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{v}_1 = (2, 3)$, y $\mathbf{v}_2 = (3, 5)$

Solución

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{a} = 2(2, 3) + (-1)(3, 5)$$

$$\mathbf{a} = (4, 6) + (-3, -5)$$

$$\mathbf{a} = (1, 1)$$

Independencia Lineal

A veces ocurre que, para un subespacio \mathbf{U} de R^n , existen algunos sistemas generadores que son más apropiados que otros. Si $\mathbf{U} = L\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, entonces todo vector de \mathbf{U} se puede escribir como una combinación lineal de los X_i en, al menos, una forma. Nuestro interés aquí radica en los conjuntos generadores para los que todo vector de \mathbf{U} tiene exactamente una única representación lineal de estos vectores. Supóngase que dos combinaciones lineales son iguales:

$$r_1X_1 + r_2X_2 + \dots + r_kX_k = s_1X_1 + s_2X_2 + \dots + s_kX_k$$

Se busca una condición de los vectores X_i que garantice que esta representación es única, es decir $r_i = s_i = 0$. Teniendo en cuenta, un conjunto de vectores X_1, X_2, \dots, X_k se denomina **linealmente independiente** si satisface la siguiente condición:

$$\text{Si } t_1X_1 + t_2X_2 + \dots + t_kX_k = 0$$

Ejemplo 1.0.9 *Demostrar que el conjunto*

$$\{[1 \ 0 \ -2 \ 5]^T, [2 \ 1 \ 0 \ -1]^T, [1 \ 1 \ 2 \ 1]^T\}$$

de vectores de R^4 es linealmente independiente.

Solución:

Supóngase una combinación lineal nula:

$$r [1 \ 0 \ -2 \ 5]^T + s [2 \ 1 \ 0 \ -1]^T + t [1 \ 1 \ 2 \ 1]^T = 0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

igualando los elementos correspondientes se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones:

$$r + 2s + t = 0, s + t = 0, -2r + 2t = 0 \text{ y } 5r - s + t = 0$$

La única solución a dicho sistema es la trivial, $r = s = t = 0$

El significado de un conjunto linealmente independiente es que esta colección de vectores contiene una información no redundante.

Dimensión

Las rectas y los planos que pasan por el origen son subespacios de R^3 , al igual que el subespacio nulo 0 y el propio espacio R^3 . En el lenguaje geométrico, es habitual decir que R^3 es tridimensional, que los planos son bidimensionales y las rectas son unidimensionales. Por tanto la idea de dimensión proporciona una idea de “tamaño” de un subespacio de R^3 . A continuación se explica cómo definir la dimensión de cualquier subespacio de R^n y se demuestra que la lista anterior abarca a todos los subespacios de R^3 . Para hacerlo, se introduce uno de los más importantes conceptos de álgebra lineal.

Definición 1.0.5 *Si U es un subespacio de R^n , se denomina base U al conjunto X_1, X_2, \dots, X_k de vectores de U , si:*

- X_1, X_2, \dots, X_k es linealmente independiente.
- $U = L(X_1, X_2, \dots, X_k)$

1.0.5. Álgebra de Matrices

Definición 1.0.6 *Un conjunto rectangular de números se denomina matriz (el plural es matrices), y los números se denominan entradas (o elementos) de la matriz. Las matrices se designan habitualmente, mediante letras mayúsculas: A, B, C y así sucesivamente.*

Por tanto, son matrices.

Ejemplo 1.0.10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, las matrices pueden tener varias formas dependiendo del número de filas y columnas que contengan. En general, se dice que una matriz con m filas y n columnas es una matriz $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ o que es de dimensión $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Así las matrices A,B,C, mostradas anteriormente, son de dimensión 2×3 , 2×2 , 3×1 , respectivamente.

Una matriz de dimensión $1 \times n$, se denomina **matriz fila**, mientras que una de dimensión $n \times 1$ se denomina **matriz columna**.

Cada elemento de la matriz se identifica por la fila y la columna a la que pertenece. Las filas se enumeran de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha. Entonces el **elemento** (\mathbf{i}, \mathbf{j}) , de una matriz es el número que pertenece simultáneamente a la fila i y la columna j .

Ejemplo 1.0.11 *El elemento (1,2) de la siguiente matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es -1

Ejemplo 1.0.12 El elemento $(2, 3)$ de la siguiente matriz, es 6

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Operaciones de Matrices.

Adición de Matrices.

Definición 1.0.7 Si A y B son matrices de igual dimensión, su suma $A + B$ es la matriz formada al sumar sus elementos correspondientes. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, ésta toma la forma $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Nótese que la suma no está definida para matrices de diferente dimensión. (La operación es la adición y la suma el resultado de la operación).

Ejemplo 1.0.13 Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcular $A + B$

Solución

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2+1 & 1+1 & 3-1 \\ -1+2 & 2+0 & 0+6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 1.0.1 Si A , B y C son matrices de la misma dimensión, entonces:

- $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa).

- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa).
- La matriz cero 0 $m \times n$ (cada uno de sus elementos es cero).
- La opuesta de una matriz $A, m \times n$, (escrita como $-A$) se define como la matriz $m \times n$ obtenida al multiplicar cada elemento de A por -1 , esta se convierte en $-A = [-a_{ij}]$. De aquí se deduce que la igualdad $A + (-A) = 0$
- $k(A + B) = kA + kB$.
- $(k + p)A = kA + pA$.
- $(kp)A = k(pA)$.
- $1A = A$

Multiplicación por un escalar.

Definición 1.0.8 En general, si A es una matriz cualquiera y k es un número cualquiera, el producto kA es la matriz obtenida de A al multiplicar cada elemento de A por k . Si $A = [a_{ij}]$, esto es $kA = [ka_{ij}]$.

Ejemplo 1.0.14 Si $k = 5$ y

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcular $5A$

Solución

$$\begin{aligned} 5A &= \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 1 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot -1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 5 & 15 \\ -5 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Trasposición.

Definición 1.0.9 Si A es una matriz $m \times n$, la traspuesta de A , escrita A^T , es la matriz $n \times m$ cuyas filas corresponden a las columnas de A . En otras palabras, la primera fila de A^T es la primera columna de A , la segunda fila de A^T es la segunda columna de A , y así sucesivamente. (La asociación se denomina transposición y al resultado traspuesta).

Ejemplo 1.0.15 Escribir la matriz traspuesta de cada una de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución Se tiene

$$A^T = [1 \ 3 \ 2]$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.0.2 Sean A y B dos matrices de la misma dimensión y k un escalar.

- Si A es cualquier matriz $m \times n$, entonces A^T es una matriz $n \times m$.
- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$

Multiplicación de Matrices.

Si A es una matriz $m \times n$, y B es una matriz $n \times k$, el producto AB de A y B es la matriz $m \times k$, cuyo elemento (i, j) se calcula de la siguiente manera: Se multiplica cada elemento de la fila i , de A por el elemento correspondiente a la columna j de B y se suman los resultados y así sucesivamente cada fila de la matriz A por la cada columna de la matriz B .

Regla

Supóngase A y B tienen dimensión $m \times n$ y $n' \times p$ respectivamente:

$$A_{m \times n} B_{n' \times p}$$

El producto AB se puede realizar solamente cuando $n = n'$, en este caso, la matriz producto resultante, AB , es de dimensión $m \times p$. Cuando esto ocurre se dice que el producto AB está definido.

Ejemplo 1.0.16 Si

$$A = [1 \quad 2 \quad 3]$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

calcular A^2, AB, BA

Solución Si A es una matriz 1×3 , así se tiene que A^2 no está definida por la regla, y no se puede realizar el producto.

Si la matriz B es 3×1 , por la regla nos indica que el producto de AB está definido y se puede calcular AB

$$\begin{aligned} AB &= [1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} && (1.21) \\ &= [1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4] \\ &= [29] \end{aligned}$$

Ahora calculamos BA ya que está definido aplicando la regla y es una matriz 3×3

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 3] && (1.22) \\ BA &= \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 6 \cdot 1 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Nota Si se modifica el orden de los factores en la multiplicación de matrices, la matriz producto resultante puede cambiar (o puede no existir).

Matriz identidad En general, una matriz identidad I es una matriz cuadrada con unos en su diagonal principal y ceros en los demás elementos. Es importante señalar que la dimensión es $n \times n$ de la matriz identidad, que se designa por I_n , sin embargo, habitualmente estas matrices se escribe simplemente como I . La matriz identidad juega el papel de elemento neutro con respecto a la multiplicación de matrices en el sentido de que $AI = A$, siempre que los productos estén bien definidos.

Ejemplo 1.0.17 *Matrices identidad*

▪

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.0.3 *Supóngase que k es un escalar cualquiera y A, B, C son matrices de dimensión tal que se pueden realizar las operaciones indicadas.*

- $IA = A, BI = B$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC; A(B - C) = AB - AC$
- $(B + C)A = BA + CA; (B - C)A = BA - CA$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Matrices y ecuaciones lineales

De forma general, se considera cualquier sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \dots & & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Si , estas ecuaciones se convierten en la ecuación matricial $AX = B$.

Ésta es la denominada forma matricial del sistema de ecuaciones y B se le conoce como matriz de términos independientes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.0.6. Análisis univariante

Describir datos multivariantes supone estudiar cada variable y, además, las relaciones entre ellas. Se supone que el lector está familiarizado con el análisis descriptivo de una variable, y aquí se expone únicamente las fórmulas. El estudio univariante de la variable escalar x_j implica calcular su media:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (1.23)$$

Se calcula una medida de variabilidad con relación a la media, promediando las desviaciones entre los datos y su media. Si definimos las desviaciones

mediante $d_{ij} = (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$, donde el cuadrado se toma para prescindir del signo, se define la desviación típica por:

$$s_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_{ij}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n}} \quad (1.24)$$

y su cuadrado es la varianza,

$$s_{ij}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n} \quad (1.25)$$

Para comparar la variabilidad de distintas variables conviene construir medidas de variabilidad relativa que no dependan de las unidades de medida. una de estas medidas es el coeficiente de variación

$$CV_j = \sqrt{\frac{s_j^2}{\bar{x}_j^2}} \quad (1.26)$$

donde de nuevo se toman los cuadrados para prescindir del signo y suponemos que \bar{x}_j es distinto de cero.

Propiedades de la varianza

- $var(x) = E[x^2] - [E(x)]^2$
- $var(k) = 0$
- $var(ax) = a^2 var(x)$
- $var(ax + b) = a^2 var(x)$

A continuación, pasaremos al análisis multivariante de las observaciones.

Medidas de centralización: el vector de medias. La medida de centralización más utilizada para describir datos multivariantes es el vector de medias, que es un vector de dimensión p cuyas componentes son las medias de cada una de las p variables. Puede calcularse, como el caso escalar, promediando las medidas de cada elemento, que ahora son vectores:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Su expresión a partir de la matriz de datos es:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} X'1 \quad (1.28)$$

donde 1 representará siempre un vector de unos de la dimensión adecuada y (X' es equivalente a X^T).

La matriz de varianzas y covarianzas

Como se comentó, para variables escalares la variabilidad respecto a la media se mide habitualmente por la varianza, desviación típica. La relación lineal entre dos variables se mide por la covarianza entre las variables x_j y x_k se calcula por:

$$s_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) \quad (1.29)$$

y mide su dependencia lineal.

Propiedades de Covarianza

- $cov(x, a) = 0$
- $cov(x, x) = var(x)$
- $cov(x, y) = cov(y, x)$
- $cov(ax, by) = abcov(x, y)$
- $cov(x + a, y + b) = cov(x, y)$
- $cov(ax+by, cw+dv) = accov(x, w)+adcov(x, v)+bccov(y, w)+bdcov(y, v)$

Para una variable multivariante se define la matriz de varianza y covarianzas como:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' \quad (1.30)$$

Esta es una matriz cuadrada y simétrica que contiene en la diagonal las varianzas y fuera de la diagonal las covarianzas entre las variables. En efecto, al multiplicar los vectores:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} x_{i1} - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_{ip} - \bar{x}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} - \bar{x}_1 & \dots & x_{ip} - \bar{x}_p \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 & \dots & (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{ip} - \bar{x}_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{ip} - \bar{x}_p)(x_{ip} - \bar{x}_1) & \dots & (x_{ip} - \bar{x}_p)^2 \end{bmatrix} \quad (1.31)
\end{aligned}$$

Se obtiene la matriz de cuadrados y productos cruzados de las p variables en el elemento i . Al sumar para todos los elementos y dividir por n se obtiene las varianzas en la diagonal y las covarianzas fuera de ella. La matriz de varianzas y covarianzas, que se llama para simplificar matriz de covarianzas, es la matriz simétrica de orden p con forma:

$$S = \begin{bmatrix} s_1^2 & \dots & s_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{p1} & \dots & s_p^2 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Capítulo 2

Modelos de Ecuaciones Estructurales

Introducción

La estadística, en muchas investigaciones se aplica pensada en términos de modelos de observación individual. Por otro lado, las técnicas multivariantes como regresión múltiple o ANOVA (Análisis de Varianza) muestran que los coeficientes de regresión o los errores de varianza estimados conducen a la minimización de la suma de la diferencia de los cuadrados predichos y de la variable observable dependiente de cada caso. En análisis residual se visualiza discrepancia entre los valores ajustados y observados para todo miembro de la muestra.

Los métodos en este trabajo demandan una reorientación. Los procedimientos enfatizan las covarianzas en lugar de los casos.

En lugar de minimizar funciones de valores individuales observados y predicho, se minimiza la diferencia entre covarianza muestral y la covarianza predicha por el modelo. La covarianza observada menos la covarianza predicha forma los residuos.

Además, en muchos casos (por ejemplo, modelos de regresión) la minimización basada en la predicción individual y la minimización basada en la predicción y la matriz de covarianza observada conducen a los mismos parámetros estimados.

La hipótesis fundamental de la ecuación estructural proviene de la matriz de covarianza de la variable observada es una función de un conjunto de parámetros, si el modelo fuese correcto y si se conoce los parámetros, la matriz

de la covarianza de la población sería exactamente reproducida. Mucho de este trabajo es acerca de la ecuación que formaliza esta hipótesis fundamental:

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \quad (2.1)$$

En la ecuación 2.1, Σ es la matriz de covarianza de la población de la variable observada, θ es un vector que contiene los parámetros del modelo, y $\Sigma(\theta)$ es la matriz de covarianza escrita en función de θ . La simplicidad de esta ecuación solo es superada por la generalidad.

Esta proporciona una forma de incluir muchas técnicas estadísticas en muchas áreas en particular en las ciencias sociales, tales como: análisis de regresión, sistemas de ecuaciones simultáneas, análisis factorial confirmatorio, correlaciones canónicas, para el análisis de datos, ANOVA, análisis de covarianza y modelos de múltiples indicadores son casos especiales de la ecuación 2.1.

Se ilustra, en una ecuación de regresión simple:

$$y = \gamma x + \zeta \quad (2.2)$$

donde, γ (gamma) es el coeficiente de regresión, ζ (zeta) es la variable de perturbación incorrelacionada con x y el valor esperado de ζ , $E(\zeta)$, es cero, las variables y , x y ζ son variables aleatorias. Este modelo en términos de la ecuación 2.1 es:

$$\begin{bmatrix} VAR(y) & COV(x, y) \\ COV(x, y) & VAR(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 VAR(x) + VAR(\zeta) & \gamma VAR(x) \\ \gamma VAR(x) & VAR(x) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Donde $VAR(x)$ y $COV(x, y)$ se refiere a la varianza y la covarianza de la población de los elementos en paréntesis. En la anterior igualdad el lado izquierdo es Σ y el lado derecho es $\Sigma(\theta)$, con θ conteniendo a γ , $VAR(x)$, y $VAR(\zeta)$ como parámetros. La ecuación implica que cada elemento de la mano izquierda es igual a los correspondientes elementos de la mano derecha.

A continuación se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.0.1 $COV(x, y) = \gamma VAR(x)$ y $VAR(y) = \gamma^2 VAR(x) + VAR(\zeta)$.

Se podría modificar este ejemplo para crear una regresión múltiple al agregar variables exploratorias, o se podría sumar otras variables a la ecuación para hacer esta un sistema de ecuaciones simultáneas tales que se desarrollan

en la economía clásica. Ambos casos pueden ser representados como casos especiales de la ecuación 2.1.

En el lugar de un modelo de regresión, se considera dos variables aleatorias, x_1, x_2 , que son indicadores de un factor o (una variable aleatoria latente) llamada ξ (xi). La dependencia de la variable sobre el factor es $x_1 = \xi + \delta_1$ y $x_2 = \xi + \delta_2$, donde δ_1 y δ_2 son términos aleatorios, perturbadores sin correlación con ξ y con cada uno de los otros, y $E(\delta_1) = E(\delta_2) = 0$. La siguiente igualdad es una expresión consecuente de la ecuación 2.1:

$$\begin{bmatrix} VAR(x_1) & \\ COV(x_1, x_2) & VAR(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi + VAR(\delta_1) & \\ \phi & \phi + VAR(\delta_2) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Donde ϕ , (Phi) es la varianza de un factor latente, ξ , aquí θ consiste de tres elementos ϕ , $Var(\delta_1)$ y $Var(\delta_2)$. La matriz de covarianza de la variable observable es una función de esos tres parámetros. Se podría añadir indicadores y más factores latentes, permitidos para coeficientes relacionadas con las variables observables a los factores (“Factor de carga”), y permite correlacionar perturbaciones creando un interesante modelo general de análisis de factores.

Finalmente, un simple híbrido de los procedimientos, creando un caso simple de sistema de ecuaciones. La primera parte una ecuación de regresión $y = \gamma\xi + \zeta$, donde a diferencia de la regresión previa la variable aleatoria independiente es no observable, las ultimas dos ecuaciones son idénticas al factor de análisis, del ejemplo 2.0.1, se tiene que $x_1 = \xi + \delta_1$ y $x_2 = \xi + \delta_2$, se asume que ζ , δ_1 y δ_2 son incorrelacionados con ξ y con cada otro, y la esperanza de cada valor es cero. El resultado de un sistema de ecuaciones estructurales son una combinación de factores de análisis y tipos de modelos de regresión, pero está es una forma especial de la igualdad expresada en 2.1.

$$= \begin{bmatrix} VAR(y) & & \\ COV(x_1, y) & VAR(x_1) & \\ COV(x_2, y) & COV(x_2, x_1) & VAR(x_2) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \gamma^2\phi + VAR(\zeta) & & \\ \gamma\phi & \phi + VAR(\delta_1) & \\ \gamma\phi & \phi & \phi + VAR(\delta_2) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Estos ejemplos anuncian la naturaleza general del modelo que se trata. El énfasis es sobre el sistema de ecuaciones lineales. Por lineal se refiere a la relación entre todas las variables latentes y observables, pueden ser representada en ecuaciones estructurales lineales o ellas pueden ser transformadas a forma lineal. Las ecuaciones estructurales que son no lineales los parámetros son excluidos. Sin embargo, las funciones no lineales de los parámetros son comunes en la ecuación de la estructura de covarianzas, de la ecuación 2.1. El caso del último ejemplo ha tenido tres ecuaciones estructurales lineales:

- $y = \gamma\xi + \zeta$
- $x_1 = \xi + \delta_1$
- $x_2 = \xi + \delta_2$

Aún cada estructura de covarianza de la ecuación 2.5 de este modelo muestra que $COV(x_1, y) = \gamma\phi$ lo que significa que la $COV(x_1, y)$ es una función no lineal de γ y ϕ por lo tanto la ecuación estructural enlaza las variables observable, latentes y perturbaciones que son lineales, y no necesariamente las ecuaciones de estructura de covarianza. A continuación se provee de una breve descripción de los orígenes de el modelo.

2.1. Notación del Modelo:

Jores Kog (1973 – 1977), Wiley (1973), y Keesling (1972) desarrollaron la notación en la que se basan este trabajo. Joreskoy y Sorbones Lisrel (Relaciones con estructuras lineales), desarrollaron programas popularizando esto, y muchas referencias con la notación Lisrel y luego el programa Análisis de Estructuras Momentáneas (Analysis of Moment Structures, AMOS) que fue creado por Arbuckle (2003), permite al usuario que especifique, vea y modifique el modelo de estructura gráficamente por medio del uso de herramientas gráficas sencillas. Cada uno de estos programas ha logrado que los investigadores usen con mayor facilidad el modelo de ecuaciones estructurales. Se presenta la notación básica en esta sección y salvo los símbolos especializados para las unidades posteriores ya que ellos son necesarios. El modelo completo consiste de un sistema de ecuaciones estructurales. Las ecuaciones estructurales contienen variables aleatorias, parámetro, y algunas variables no aleatorias. Los tres tipos de variables aleatorias son: latentes, observable y perturbación o variable error. Las variables no aleatorias son variables

exploratorias cuyos valores siguen siendo los mismos en un muestreo aleatorio repetido. (variables Fija o no estocástica). Estas son menos comunes que las variables aleatorias exploratorias. Los enlaces entre las variables son resumidas en los parámetros estructurales.

Definición 2.1.1 *Los parámetros estructurales son constantes invariantes que proporciona la relación causal entre variables.*

Los parámetros estructurales pueden describir los enlaces causales entre variables no observables, entre variables observables, o entre variables no observables y observables.

Los sistemas de ecuaciones estructurales tienen los mejores sistemas: Modelos de variables latentes y el modelo medible (medición).

2.1.1. Modelo de Variable Latente:

Las variables aleatorias latentes representan conceptos unidimensionales en su más pura forma. Otros términos son las variables no observables o variables no medibles y factores. Las variables observables o indicadores de una variable latente contienen aleatoriedad o sistema de errores medibles, pero la variable latente es libre de estos.

Dado que todas las variables latentes corresponden a conceptos, son variables hipotéticas. Los conceptos y variables latentes, sin embargo, varían en su grado de abstracción. Como se muestra a continuación:

Ejemplo 2.1.1 *Inteligencia, clase social, poder y expectativas*

Son variables latentes muy abstractas que son muy importantes en la teoría de las ciencias sociales fundamentales. También importante pero menos abstracto son las variables como:

Ejemplo 2.1.2 *Ingreso, educación, tamaño de la población y edad (años).*

El último tipo de variable latente son directamente medible, mientras que el anterior es capaz de comenzar solamente a medirse indirectamente.

Ejemplo 2.1.3 *Un ejemplo que contiene ambos tipos de variables, es la hipótesis de Emile Durkheim, de la inversa relación entre la cohesión social y suicidio. La cohesión social se refiere a un grupo solidario. El suicidio es*

directamente observable, sin embargo esté indirectamente se convierte en inteligible cuando uno considera que algunos son disfrazados o mal calificados como alguna otra forma demente. Así la medición de suicidio puede no ser directa, como inicialmente aparece, en este trabajo no hay distinción entre directa e indirectamente observable, para los modelos de variables latentes. Analíticamente ellos pueden ser tratados igualmente.

El modelo de variables latentes abarcan las ecuaciones estructurales que resumen la relación entre algunas variables latentes. Esta parte del modelo es llamado la “ecuación estructural” o “modelo causal”, este tipo de práctica puede ser engañosa. Todas las ecuaciones en el modelo tanto los de la variable latente y esas del modelo medible describe las relaciones estructurales, aplicar estructura a solo la parte de la variable latente del modelo completo sugiere que el modelo de medición no es estructural. Se usa la relación de política democrática en la industrialización de los países desarrollados para introducir la notación de modelos de variables latentes.

Investigadores internacionales de desarrollo no están de acuerdo acerca de si la industrialización es positivamente asociada con políticas democráticas en países tercer mundistas. La alternativa entre la dictadura y régimen electoral en algunas de esas sociedades hacen que sea difícil discernir si cualquier asociación general exista. La política democrática se refiere al grado de política derechistas (por ejemplo, imparcialidad de las elecciones) y políticas liberales (por ejemplo, libertad de prensa) en un país. Industrialización es el grado en que la sociedad caracteriza la economía por procesos mecánicos manufactureros. Esto es algunas de las consecuencias de la industrialización (por ejemplo: riqueza de la sociedad, población educada, los avances en los niveles de vida que se considera que mejoren las posibilidades de la democracia). Sin embargo para mantener el modelo simple. No se incluye esas variables que intervienen, supongamos en el siguiente ejemplo que tenemos tres variables aleatorias latentes:

Ejemplo 2.1.4 *La política democrática 1965 y 1960, la industrialización 1960, se asume que la política democrática en 1965 es una función de la política activa de 1960 y la industrialización.*

El nivel de industrialización 1960 también afecta el nivel de la política democrática 1960, no se dice nada acerca de los determinantes de la industrialización que se encuentra fuera del modelo de industrialización es una

variable latente (“Independiente”) exógena y simbolizada como ξ (xi). Esta es exógena porque sus causas se encuentra fuera del modelo.

La variable latente política democrática es endógena, ella es determinada por variables dentro del modelo. Cada variable latente endógena es representada por η_i (eta). Política democrática en (1960) es representada por η_1 . El modelo corriente es:

$$\eta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \zeta_1 \quad (2.6)$$

Política democrática en 1965 es denotada por η_2 . Las variables latentes endógenas solamente se explican parcialmente por el modelo. La componente inexplicable es representada por ζ (zeta) la cual es la perturbación aleatoria en la ecuación. Los términos exógena y endógena son especificado en el modelo. Esto puede ser que una variable exógena y en otro modelo es endógena. O una variable se muestra como exógena, en realidad, puede estar influenciada por una variable en el modelo. Independientemente de sus probabilidades, la conversión es para referirse a variables como exógena o endógenas basadas en su representación en un modelo particular.

$$\eta_2 = \beta_{21}\eta_1 + \gamma_{21}\xi_1 + \zeta_2 \quad (2.7)$$

donde

- η_1 : Es la política democrática 1960.
- η_2 : Es la política democrática 1965.
- ξ_1 : Industrialización (variable exógena)
- γ_{11} (Parámetro)
- β_{21} (Parámetro)
- γ_{21} (Parámetro)
- ζ_1, ζ_2 : son perturbaciones aleatorias.

Observación 1 η_1 es una variable endógena en la ecuación 2.6
 η_1 es una variable exógena en la ecuación 2.7.

Las ecuaciones son lineales en las variables y lineales en los parámetros. Nosotros podemos algunas veces estimar ecuaciones que no son lineales en las variables y lineales a los parámetros como en análisis de regresión. Los errores aleatorios, ζ_1 , ζ_2 , se esperan que los valores de la media sea cero y son incorrelacionado, con la variable exógena, industrialización ξ_1 . Una constante es ausente de la ecuación porque las variables son desviadas de su media. Esta desviación deberá simplificar manipulaciones algebraica pero no afecta el análisis general.

Los coeficientes β_{21} (beta) es el parámetro estructural que indica los cambios en los valores esperados de η_2 , después de un aumento de una unidad en η_1 y la participación de la constante de ξ_1 . Los coeficientes de regresión son γ_{11} , γ_{21} tiene una interpretación análoga. El coeficiente β_{21} es asociado a una variable latente endógena, mientras que, γ_{11} , γ_{21} son asociados a la variable latente exógenas. Las ecuaciones 2.6, 2.7 resulta que son reescritas en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La cual es más compacto escribir como:

$$\eta = \beta\eta + \Gamma\xi + \zeta \quad (2.9)$$

La ecuación 2.9 es la representación general de la matriz de la ecuación estructural para el modelo de variables latentes.

Modelos de ecuaciones estructurales de variables latentes En la ecuación 2.9, se asume:

- $E(\eta) = 0$
- $E(\xi) = 0$
- $E(\zeta) = 0$
- ζ no es correlacionado con ξ .
- $(I - \beta)$ no es singular.

En el siguiente cuadro se realiza un resumen:

Cuadro 2.1: Notación para los modelos de variables latentes

Símbolo	Nombre	Dimensión	Definición
η	eta	$m \times 1$	variable latente endógenas
ξ	xi	$n \times 1$	variable latente exógena
ζ	zeta	$m \times 1$	errores latentes
β	beta	$m \times m$	coeficiente matriz de la variable endógena
Γ	gamma	$m \times n$	coeficiente matriz de la variable exógena
Φ	phi	$n \times n$	$E(\xi\xi')$ matriz covarianza de ξ
Ψ	psi	$m \times m$	$E(\zeta\zeta')$ matriz covarianza de ζ

El cuadro(2.1) resume la notación de los modelos relativos a variables latentes, incluyendo el nombre de cada símbolo, dimensión y definición. Comenzando con la primera variable, η es un vector $m \times 1$ de la variable aleatoria latente endógena.

En el ejemplo 2.1.4: la industrialización y política democrática, $m = 2$. El vector ξ es $n \times 1$, este representa las n variables latentes exógenas, si allí como en más casos, ξ es un vector de variables aleatorias. Ocasionalmente, uno o más de las ξ , no son aleatorios. Para los ejemplos corrientes n es uno, ya que solo industrialización ξ_1 es exógena. Los errores en la ecuación o las perturbaciones son representados por ζ , es un vector $m \times 1$. Un ζ_i es asociado con cada η_i , con $i = 1$ hasta m .

El ejemplo 2.1.4 tiene dos variables ζ_i . El vector ζ generalmente contiene variables aleatorias. Como en análisis de regresión, la perturbación ζ_i incluye esas variables que influyen sobre η_i , pero son excluidas de la ecuación η_i . Se asume que esos numerosos factores omitidos se fusionaron en ζ_i tiene $E(\zeta) = 0$ y son incorrelacionada con la variable exógena ξ . De lo contrario, los estimadores inconsistentes de los coeficientes son probables. También se asume que ζ_i es homocedástica y no autocorrelacionada. Para aclarar esta suposición, supongamos que agrego un índice a ζ_i de modo que ζ_{ik} se refiere al valor de ζ_i para la k -ésima observación y ζ_{il} es ζ para la l th observación.

La homocedasticidad es que la $VAR(\zeta_i)$ es constante através de casos(es decir $E(\zeta_{ik}^2) = VAR(\zeta_i)$ para todo k).

La suposición de no autocorrelación significa que ζ_{ik} es no correlacionada con ζ_{il} para todo k y l , donde $k \neq l$. (es decir $COV(\zeta_{ik}, \zeta_{il}) = 0$, para todo $k \neq l$). Correcciones de la heterocedasticidad o autocorrelación de perturbaciones son bien conocidas por los modelos de econometría apenas estudiado por modelos de ecuaciones estructurales con variables latentes.

La homocedasticidad y los supuestos de autocorrelación no significa que las perturbaciones de dos ecuaciones diferentes necesitan no estar correlacionados ni que ellas necesitan tener la misma varianza. Es decir $E(\zeta_{ik}^2) = VAR(\zeta_i)$ no es lo mismo que $E(\zeta_i^2) = E(\zeta_j^2)$, ni tampoco $COV(\zeta_{ik}, \zeta_{il}) = 0$, significa que $COV(\zeta_i, \zeta_j) = 0$, donde ζ_i y ζ_j son ecuaciones separadas. Las Matrices coeficientes son β y Γ . La Matriz β es una matriz coeficientes $m \times m$ de la variable latente endógena. Sus elementos típicos es β_{ij} , donde i y j refieren a la posición de las filas y columnas.

El modelo supone que $(I - \beta)$ es no singular así existe $(I - \beta)^{-1}$. Esta suposición permite que la ecuación 2.9 puede ser escrita en forma reducida, resolviendo algebraicamente como que solamente aparece η sobre el lado izquierdo para ser reducida.

La Matriz Γ es una Matriz coeficientes $m \times n$ de variables latentes exógenas, sus elementos son simbolizados como γ_{ij} .

Para el ejemplo 2.1.4 de la industrialización y la política democrática.

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \xi = [\xi_1] \quad (2.10)$$

La diagonal principal de β es siempre cero. Esto permite despejar η_i del lado de la mano derecha de la i th ecuación para la cual es la variable dependiente. Es decir, se asume que una variable no es una causa inmediata e instantánea de si misma. Un cero en β también indica la ausencia de un efecto de una variable latente endógena sobre otra. Que un cero aparece en la posición (1, 2) de β en la ecuación 2.10 indica que η_2 no afecta a η_1 .

La matriz Γ en la ecuación 2.10 es 2×1 ya que existen dos variables latentes endógenas y una variable latente exógena, ya que ξ_1 afecta ambas η_1

y η_2 , Γ no contiene cero elementos. Dos matrices de covarianza son parte del modelo variable latente en tabla 2.1. Una matriz de covarianza es una matriz de correlación estandarizada con la varianza de una variable por la diagonal principal y la covarianza de todas los pares de variable fuera de la diagonal.

La matriz de covarianza $n \times n$ de la variable latente exógena (es ξ) o es Φ con elementos ϕ_{ij} . Toda matrices de covarianzas son simetricas.Si la varianza de las variables ξ son iguales a uno, entonces Φ es una matriz de correlación. En el ejemplo 2.1.4 de la Industrialización y política democrática solo una variable aparece en ξ , como Φ es un escalar (es decir Φ_{11}) que es igual a varianza de ξ_1 .

La matriz de covarianza $m \times m$ de los errores en la ecuación es Φ con elementos(Φ_{ij}) cada elemento de la diagonal principal de Φ (Φ_{ij}) es la varianza de las correspondientes variables η_i que no es explicada para las exploraciones de las variables incluidas es la i th ecuación. En el ejemplo corriente Ψ es 2×2 . El elemento(1,1) es la varianza de ξ_1 , El elemento (2,2) es la varianza de ξ_2 y los elementos fuera de la diagonal (1,2) y (2,1) son ambos iguales a la covarianza de ξ_1 con ξ_2 . En este ejemplo se asume que los elementos fuera de la diagonal son cero.

La matriz de covarianza de η es una función de β , Γ , Φ y Ψ . Este no tiene un símbolo especial.

Los lectores familiarizados con textos de econometría notaran la similitud entre las ecuaciones estructurales de los modelos de variables latentes, de tabla 2.1, y la representación general del sistema simultánea de ecuaciones (.eg., $\beta y + \Gamma x = \mu$, en Johnston 1984, 50).

Una diferencia es que ambas variables endógenas y exógenas pueden ser escritas como el lado de la mano izquierda, del modelo solamente ζ sobre el lado de la mano derecha:

$$\begin{aligned} \beta^* \eta + \Gamma^* \xi &= \zeta \\ \text{con } \beta^* &= I - \beta \\ \text{y} \\ \Gamma^* &= -\Gamma \end{aligned}$$

La mayor parte del tiempo, algunos símbolos que otros ζ representan el

error en la ecuación (eg., μ). Esa representación alternativa importa poco. Otra diferencia es que más representaciones econométricas reemplazan η y x reemplazan a ξ . Esta diferencia es más que justo cambio de símbolos. En los tratamientos clásicos en econometría asume que las variables observables y y x son medible perfectamente, de la variable latente η y ξ . Los modelos con ecuaciones estructurales con variable latentes no más tienen esta suposición.

De hechos, la segunda mejor parte de esos modelos consisten de ecuaciones estructurales enlazan las variables latentes (la η y ξ) para las variables medibles (la y y x). Esta parte del sistema es un modelo medible.

2.1.2. Modelo Medible

Como las variables latentes, las variables observables tienen una variedad de nombres incluyendo variables manifiestas, medibles, indicatoras, y proxies. Se usa estos términos intercambiables. Los modelos de variables latentes de industrialización y política democrática como se describe hasta ahora exclusivamente, en términos de variables no observables. Una prueba de esta teoría es solamente posible si recojo medidas observables de estas variables latentes. Una estrategia es el uso de indicadores simples o variables proxy de política democrática e industrialización. Otra opción es para constructo e índice con dos o más variables indicatoras para cada uno de los conceptos.

El análisis empírico es de esos indicadores observables o índices, y las investigaciones trata los resultados como pruebas de las relaciones entre las variables latentes. Los supuestos subyacentes de las precedentes estrategias es que las variables observables están perfectamente correlacionada con sus variables latentes que miden. En la mayoría de los casos esto no es cierto. Casi todas las medidas de factores abstractos tales como políticas democráticas tienden asociarse perfectamente lejos del factor. Los modelos medibles de ecuaciones estructurales representa el enlace entre las variables latentes y observables como un imperfecto en vez de uno determinista.

De este ejemplo 2.1.4, seleccionamos tres indicadores de industrialización en 1960: Producto nacional bruto (GNP) per capita (x_1), consumo de energía inanimada per capita (x_2) y el porcentaje de la fuerza laboral en industria (x_3). Para la política democrática se tienen los mismo cuatro indicadores para 1960 y 1965: calificación de experto de la libertad de prensa (y_1 en 1960, y_5 en 1965), la libertad de la política de oposición

(y_2, y_3, y_6) , la imparcialidad de las elecciones (y_3, y_7) , y la eficacia de la legislatura elegida (y_4, y_8) así cada variable latente es medible con algunas variables observables. Las ecuaciones (2.11) (2.12) proporciona un modelo medible de esas variables.

$$\begin{aligned}x_1 &= \lambda_1 \xi_1 + \delta_1 \\x_2 &= \lambda_2 \xi_2 + \delta_2 \\x_3 &= \lambda_3 \xi_3 + \delta_3\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= \lambda_4 \eta_1 + \varepsilon_1 & y_2 &= \lambda_5 \eta_1 + \varepsilon_2 \\y_3 &= \lambda_6 \eta_1 + \varepsilon_3 & y_4 &= \lambda_7 \eta_1 + \varepsilon_4 \\y_5 &= \lambda_8 \eta_2 + \varepsilon_5 & y_6 &= \lambda_9 \eta_2 + \varepsilon_6 \\y_7 &= \lambda_{10} \eta_2 + \varepsilon_7 & y_8 &= \lambda_{11} \eta_2 + \varepsilon_8\end{aligned}\tag{2.12}$$

Al igual que en el modelo de variables latentes, las variables del modelo medible se desvían de sus medias, las variables x_i ($i=1, 2,3$) representan las tres medidas de ξ_1 industrialización, las variables y_1 a y_4 son medidas de η_1 , la política democrática 1960 y y_5 a y_8 son las medidas de η_2 democracia en 1965, note que todas las variables manifiestas dependen de las variables latentes. En algunos casos los indicadores pueden causar variables latentes.

Los λ_i son coeficientes de magnitud de los cambios esperados en las variables observable para un cambio de unión en la variable latente. Esos coeficientes son coeficientes de regresión para los efectos de las variables latentes sobre las variables observables. Nosotros debemos asignar una escala a las variables latentes para interpretar completamente los coeficientes.

Típicamente, analizar la escala de un conjunto de variables latentes es igual a uno de sus indicadores o estandarizar la varianza de la variable latente a uno.

Los δ_i y ε_i son variables de errores de medición para x_i y y_i respectivamente. Ellas son perturbaciones que afectan la relación entre la variable latente y observable. Los supuestos son que los errores de medición tienen valor esperado de cero, que ellos nos están correlacionado con todos $\xi, \eta, \zeta, \delta_i$ y ε_j , no están correlacionados para todo i y j .

Una correlación de δ_i y ϵ_j con algún ξ o η es conducir a incoherentes estimadores de parámetros de una manera análoga a una perturbación correlacionada con una variable exploratoria en el análisis de regresión. Algunas veces en análisis factor δ_i y ϵ_j son llamados factores únicos, cada δ_i y ϵ_j es dividido en componentes específicos y no específicos, se hará inferencia a δ y ϵ como errores de medición. Finalmente se asume que cada δ_i y ϵ_j son homocedasticidad y no autocorrelación a través de observaciones para el modelo de las variables latentes.

Las ecuaciones 2.11 y 2.12 pueden ser escritas mas compacta en la forma matricial de la forma siguiente:

$$x = \Lambda_x \xi + \delta \quad (2.13)$$

$$y = \Lambda_y \eta + \epsilon \quad (2.14)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \Lambda_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \xi = [\xi_1], \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} \quad \Lambda_y = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ 0 & \lambda_8 \\ 0 & \lambda_9 \\ 0 & \lambda_{10} \\ 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \\ \epsilon_7 \\ \epsilon_8 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Las ecuaciones 2.13 y 2.14 también se muestra en la parte superior de la tabla 2.2, las cuales proporcionan la notación de un modelo medible. Las variables aleatorias x son indicadores de la variable exógena latente (ξ). Las variables aleatorias y son indicadores de la variable endógena latente (η). En general, x es $q \times 1$ (donde q es el número de indicadores de ξ) y y es $p \times 1$ (donde p es el número de indicadores de η).

Las Matrices Λ_y y Λ_x contienen λ_i parámetros, los cuales son coeficientes estructurales de enlace entre la variable latente y la variable manifestante (observable). Las Matrices Λ_x es $q \times n$ (donde n es el número de ξ) y Λ_y es $p \times m$ (donde m es el número de η) que influyen x_i, y_i , cuando x, ξ, y y η son usados en el modelo tal como 2.15 y 2.16, los doble subíndices puede ser confuso desde cada λ_{ij} , puede referirse a dos parámetros diferentes. Por lo tanto se usa un simple subíndice consecutivos números λ en esos casos.

Los vectores de errores de medición para x es δ y δ es $q \times 1$. El vector error para y , ϵ es $p \times 1$ generalmente δ y ϵ contiene vectores de variables aleatorias.

Las ultimas dos matrices, θ_δ y θ_ϵ , son matrices de covarianzas de los errores de medición. La Diagonal principal contiene las varianzas de errores asociados con los indicadores. Los elementos fuera de la diagonal son las covarianzas de los errores de medición para los diferentes indicadores. La matriz θ_δ es $q \times q$ y tienen varianzas de error y sus covarianzas de variable x , y θ_y es matriz $p \times p$ que contiene los errores de varianza y sus covarianzas de la variable y .

En el ejemplo 2.1.4 se asume que los errores de medición de los indicadores de industrialización (x_1 a x_3) son no correlacionados. Así que θ_δ es una matriz diagonal. Esta suposición es menos defendible para θ_ϵ porque se tiene el mismo conjunto de indicadores en dos momentos. Esto es probable que la medición de errores en indicadores en 1960 es correlacionado con los errores en mediciones del mismo indicador 1965. Además las mediciones en 1960 de y_2 y y_4 y las de 1965 de y_6 y y_8 son del mismo origen de datos.

Los errores correspondientes a mediciones pueden ser positivamente correlacionados debido a un perjuicio sistemático presente en la fuente. Por lo tanto los elementos fuera de la diagonal de θ_ϵ pueden no ser cero (4,2), (5,1), (6,2), (7,3), (8,4) y (8,6).

Este ejemplo revela algunos de las mejores características de ecuaciones estructurales con variables latentes que son distintos al enfoque de la regresión estándar. Los modelos son más realistas en permitir la medición de errores en las variables observables. Ellos permiten medir los errores aleatorios en ϵ y δ , y se introducen diferencia sistemática de escala con los coeficientes λ . El error de medición de una variable puede correlacionarse con otra. Indicadores múltiples puede medir a una variable latente. Además las investigaciones pueden analizar las relaciones entre variable no observables por errores medible.

Todas estas características se acercan más a probar las hipótesis expuestas en las teorías.

2.1.3. Modelos Medibles de Ecuaciones Estructurales

$$x = \Lambda_x \xi + \delta$$

$$y = \Lambda_y \eta + \epsilon$$

Suponiendo $E(\xi) = 0$, $E(\eta) = 0$, $E(\epsilon) = 0$ y $E(\delta) = 0$

ϵ no esta correlacionado con η , ξ , δ

δ no esta correlacionado con η , ξ , ϵ

Cuadro 2.2: Notación para los modelos Medibles

Símbolo	Nombre	Dimensión	Definición
y	-	$p \times 1$	Indicador observado de η
x	-	$q \times 1$	Indicador observado de ξ
ϵ	epsilon	$p \times 1$	errores medibles de y
δ	delta	$q \times 1$	errores medibles de x
Λ_y	lambda y	$p \times m$	coeficiente relacionado de y con η
Λ_x	lambda x	$q \times n$	coeficiente relacionado de x con η
θ_ϵ	theta-epsilon	$p \times p$	$E(\epsilon\epsilon')$ matriz covarianza de ϵ
θ_δ	theta-delta	$q \times q$	$E(\delta\delta')$ matriz covarianza de δ

Covarianza Es un concepto central de los modelos. Efectivamente, otro nombre por lo general técnicas de ecuaciones estructurales, análisis de la estructura de la covarianza. Revisemos dos aspectos de covarianza. Una es álgebra de covarianza la cual ayuda a las propiedades derivados de las variables latentes y modelos medible. La otra incluye los factores que influyen en la covarianza muestral que puede afectar la estimación de parámetros. Se considera primero álgebra de covarianza.

Algebra Covarianza

El cuadro 2.3 proporciona un resumen de las definiciones y reglas comunes de álgebra de covarianza. En el cuadro 2.3 la $E(\cdot)$ se refiere a los valores esperados de la expresión dentro del paréntesis. La mitad superior del cuadro 2.3 ambos define la covarianza y la varianza. La mayúsculas X_1 , X_2 y X_3 significa la variable aleatoria original en lugar de las formas de desviación media. Cuando X_1 y X_2 tiene una asociación lineal positiva, la $COV(X_1, X_2)$ es positiva. Si ellas están inversamente relacionados con $COV(X_1, X_2)$ es negativa, pero esta es cero sino existe una asociación lineal. Note que la definición de covarianza se emplea letras Mayúsculas “COV” para el significado de covarianza poblacional.

La matriz de covarianza poblacional de las variables observables es Σ se discute la covarianza de la muestra en breve. La varianza es la covarianza de una variable con si misma. La $VAR(X_1)$ en mayúscula representa la varianza de la población de X_1 . La diagonal principal de Σ contiene la varianza de las variables observadas.

Cuadro 2.3: Definición y reglas comunes de la covarianza

Definición
$COV(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$ $= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$ $VAR(X_1) = COV(X_1, X_1)$ $E[(X_1 - E(X_1))^2]$
REGLAS
c es una constante X_1, X_2, X_3 son variables aleatorias $COV(c, X_1) = 0$ $COV(cX_1, X_2) = cCOV(X_1, X_2)$ $COV(X_1 + X_2, X_3) = COV(X_1, X_3) + COV(X_2, X_3)$

Algunos ejemplos ayudan a ilustrar las reglas de covarianza.

En los ejemplos se asume que todas las perturbaciones tiene valores esperados de cero y que todas las variables aleatorias se desvían de sus medias.

A menos que se diga lo contrario la x , y minúscula, representa forma de desviación de la variable aleatoria original X , Y . A continuación se muestra los siguientes ejemplos 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7:

Ejemplo 2.1.5 *Para el primer ejemplo, se supone que se conoce la covarianza de una variable latente, ξ_1 , con una variable observable x_1 , Si se agrega una constante a x_1 , la*

$$\begin{aligned} COV(\xi_1, X_1 + c) &= COV(\xi_1, x_1) + COV(\xi_1, c) \\ &= COV(\xi_1, x_1) \end{aligned}$$

Así la covarianza de una variable latente y una variable observable no se altera si una constante se agrega (suma) a una variable observable. Este resultado es importante dado que rara vez tenemos líneas de base ampliamente acordadas (puntos ceros) para medida de conceptos en ciencias sociales. Se muestra que la medida cambia por algún valor de una constante, está no influye en la covarianza que tienen con la variable latente.

Algunos ejemplos ilustran otros puntos. Supongamos que c es la media de X_1 en su forma original. Entonces $x_1 + c$ lleva a X_1 . El ejemplo precedente muestra que la covarianza de cualquier variable aleatoria con otra es el mismo, independiente de si la variable están desviada o en forma original. Sin embargo si la escala es cambiada a cx_1 , esta cambia la covarianza a $cCOV(\xi_1, x_1)$.

Ejemplo 2.1.6 *Se aborda un problema de medición.*

En psicometría y presentaciones de otras ciencias sociales, a menudo se argumenta que dos indicadores cada uno positivamente relacionado con el mismo concepto, debería tener una covarianza positiva.

Suponga que tenemos dos (2) indicadores cada relación con el mismo ξ_1 tal que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 \xi_1 + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_2 \xi_1 + \delta_2 \\ COV(\xi_1, \delta_1) &= COV(\xi_1, \delta_2) = 0 \\ \lambda_1 \quad y \quad \lambda_2 &> 0 \end{aligned}$$

Debe la $COV(x_1, x_2)$ Ser positiva?

$$\begin{aligned} COV(x_1, x_2) &= COV(\lambda_1 \xi_1 + \delta_1, \lambda_2 \xi_2 + \delta_2) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \phi_{11} \end{aligned}$$

Para ningún Cero ϕ_{11} , los indicadores de x_1, x_2 deben tener una covarianza positiva (ya que ϕ_{11} . Es una covarianza, esta es positiva para toda no constante ξ_{11}) como una segunda parte consideramos x_1 y x_2 como indicadores de ξ_{11} tal que:

$$\xi_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \delta_1$$

$COV(x_1, \delta_1) = 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$?

Debe ser $COV(x_1, x_2) > 0$?

Las variables x_1, x_2 son exógenas. Sus covarianza no es determinada sin el modelo tal que esta puede ser positiva, cero o negativas, aun si ambos x_1, x_2 se relaciona positivamente a ξ_1 .

Ejemplo 2.1.7 *Si la variable latente es expuesta a discriminación (ξ_1) y los indicadores son razas (x_1), sex (x_2), a través x_1 y x_2 indicadores expuestos a la discriminación. O no se debe esperar una correlación positiva a la variable latente podría ser interacción social (ξ_1) y los indicadores tiempo usado con amistad (x_1) y tiempo usado con la familia (x_2).*

Estos indicadores pueden aun tener covarianza negativa. Este simple ejemplo 2.1.7 muestra declaraciones generales sobre la necesidad de indicadores que el mismo concepto debe ser asociado positivamente requiere calificación. La definición covarianza y las, reglas, también aplica a Matrices y vectores por ejemplo, si c' es un vector de constantes que se ajusta en la multiplicación con x , entonces $COV(x, c') = 0$. Entonces $VAR(x) = COV(x, x') = \Sigma$, donde los tres símbolos representa la matriz de covarianza poblacional de x , típicamente se usa Σ , algunas veces suscribe para referirse a variable específicas (ejemplo Σ_{xy} = Matriz de Covarianza x con y).

2.1.4. Covarianza Muestral

Hasta ahora he limitado la discusión de covarianza poblacional y varianzas. En la práctica, estimadores muestrales de la varianza y covarianza todos están disponibles. El estimador muestral imparcial de covarianza es

$$COV(X, Y) = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{N - 1} \right) \quad (2.17)$$

donde $COV(X, Y)$ representa el estimador muestral de la covarianza entre N valores de X y Y .

Los X_i y Y_i representa valores de X y Y de la i -ésima observación. La \bar{X} y \bar{Y} son medias muestrales.

La matriz covarianza muestral es calculada como:

$$S = \left(\frac{1}{N - 1} \right) Z'Z \quad (2.18)$$

Donde Z es una matriz de desviación $N \times (p+q)$ (de la media) puntuaciones de la variable observada $p+q$. La matriz S es cuadrada y simétrica con la varianza muestral de las variables observables con su diagonal principal y la covarianza muestral fuera de la diagonal. La matriz de covarianza muestral es crucial para estimar los modelos de ecuaciones estructurales. En Lrel y EQs, y otros programas computacionales para el análisis de estructuras de covarianza, la covarianza o correlación de la muestra a menudo es el único dato en el análisis. La estimación de parámetros depende de funciones de varianza y covarianzas.

Ejemplo 2.1.8 *En análisis regresión simple los estimadores ordinarios de mínimos cuadrados (OLS) para los coeficientes de regresión es la razón de la covarianza muestral de y y x entre la varianza de x , es decir $\left[\frac{cov(x, y)}{var(x)} \right]$.*

En los sistemas de ecuaciones estructurales más generales los estimadores de muchas funciones resultan más cumplidas. Para ambas la situaciones simple y compleja, que afectan elementos de la matriz de covarianza muestral, S tienen potencial de afectar los parámetros estimados. Aunque, en promedio, la matriz de covarianza muestral S es igual a la matriz covarianza poblacional Σ , en algunas muestras conducen S más cerca de Σ que otras. Además de que los cambios de muestreo para S , otros factores pueden afectar sus elementos. Uno es la relación no lineal entre las variables. La covarianza muestral o correlación son medidas de asociación lineal. Las covarianzas como las correlaciones pueden dar impresiones engañosas de la asociación entre dos variables que tiene una relación curvilínea.

En algunas áreas sustantivas la investigación está lo suficientemente desarrollada como para alertar a los investigadores sobre posibles alteraciones no lineales en el campo, y este conocimiento se puede incorporar a un modelo.

Ejemplo 2.1.9 *La teoría de la transición demográfica sugiere que las tasas de mortalidad en los países disminuyen, siguen un patrón curvilíneo típico.*

Otro ejemplo es :

Ejemplo 2.1.10 *Las ganancias inicialmente aumentan con la edad, luego eventualmente se estabilizan o incluso disminuyen a medida que las personas envejecen. La situación más común es cuando se desconoce la forma exacta de la relación.*

Diagramas de dispersión, parcelas parciales (Belsley, Kuh, y Welsch 1980), las comparaciones de las ecuaciones se ajustan a las transformaciones de las variables, o dispositivos relacionados ayudan a detectar la no linealidad en la variable observada ecuaciones tales como modelos de regresión.

Detección de no linealidades en modelos con variables latentes es un área relativamente poco desarrollada. McDonald (1967a, 1967b) sugiere algunos procedimientos para explorar no linealidades en el factor análisis, pero aún queda mucho por hacer para que los procedimientos todos los tipos de modelos de ecuaciones estructurales.

Un segundo factor que puede afectar las covarianzas y las correlaciones de la muestra son valores atípicos. Los valores atípicos son observaciones con valores que son distintos o distantes de la mayor parte de los datos.

Los valores atípicos pueden tener efectos grandes o pequeños en un análisis. Los valores atípicos que conducen a cambios sustanciales son observaciones influyentes. Cuando hay casos influyentes, las covarianzas proporcionan un error de resumen de la asociación entre la mayoría de los casos. La detección de valores atípicos puede comenzar con el examen de las distribuciones univariadas de las variables observadas.

Para ilustrar esto, se muestra el siguiente:

Ejemplo 2.1.11 *Se toma datos de Haavelmo (1953) Su objetivo es analizar la propensión marginal a consumir como función del ingreso con datos agregados de los EE. UU. Es decir, él busca estimar la proporción del ingreso disponible de los EE. UU. Invertido en los gastos de los consumidores en lugar de invertir en los gastos de inversión.*

Dos variables en su análisis es el ingreso disponible per cápita (ingreso) y los consumidores de EE. UU. Gastos per cápita (consumo), tanto en dólares constantes como por cada año desde 1922 hasta 1941, se muestran a continuación en la siguiente figura.

Año	Ingreso	Consumo
1922	433	394
1923	483	423
1924	479	437
1925	486	434
1926	494	447
1927	498	447
1928	511	466
1929	534	474
1930	478	439
1931	440	399
1932	372	350
1933	381	364
1934	419	392
1935	449	416
1936	511	463
1937	520	469
1938	477	444
1939	517	471
1940	548	494
1941	629	529

Figura 2.1: Tabla de Ingreso-Consumo

Los cálculos para determinar la matriz de varianza covarianza son hechos con el paquete matlab para $n = 20$.

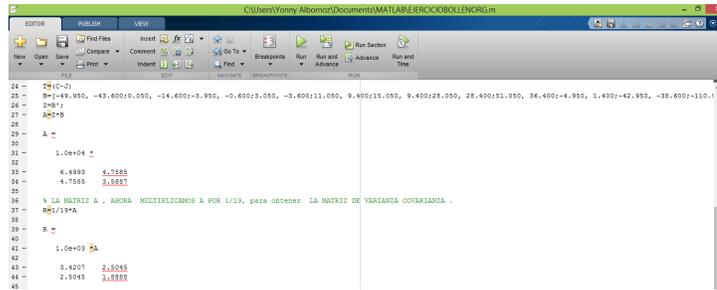


Figura 2.2: matrizcv1

Donde S es la matriz de varianza-covarianza.

$$S = \begin{pmatrix} 3421 & 2504 \\ 2504 & 1889 \end{pmatrix}$$

La siguiente figura muestra la dispersión entre el ingreso y el consumo

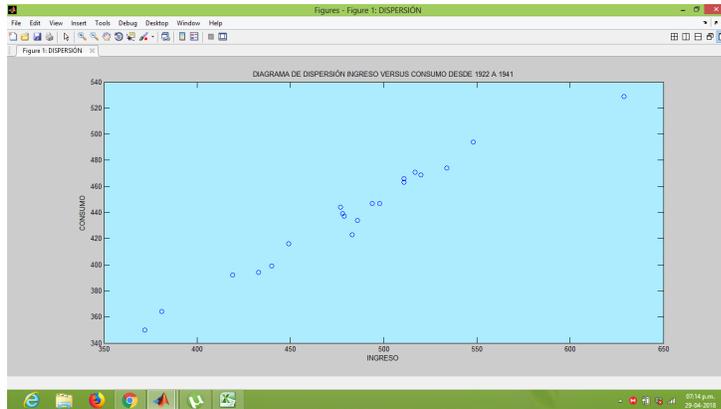


Figura 2.3: Dispersión

El valor de ingreso de 630 es el más alto, y es el más distante de los otros valores. Para el consumo, el valor más alto, es 530, está menos distante de los otros valores de la muestra. Ambos de estos valores más altos son para 1941, que sugiere que esta observación tenga especial atención en análisis posteriores.

Una transformación de las variables podría cambiar el estado atípico de este año, pero para cumplir con el análisis de Haavelmo, se quedan con los datos originales.

Con solo dos variables, un diagrama de dispersión puede ayudar a identificar valores atípicos del diagrama de dispersión del consumo por ingreso.

Ahora se suprime el valor atípico del año 1941 de los datos dados en la figura 2.1. Y se procede a realizar el cálculo con matlab para $n = 19$.

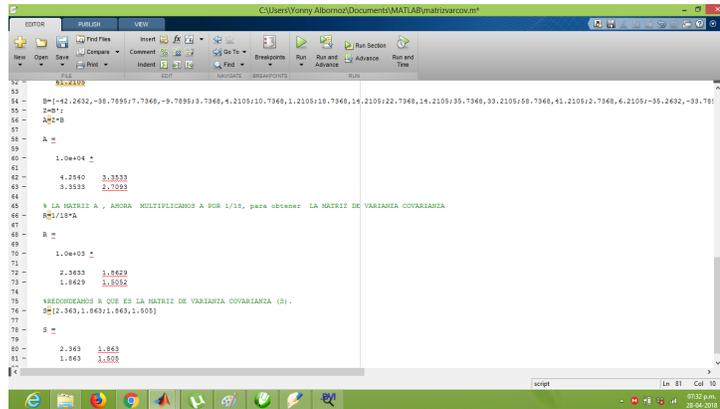


Figura 2.4: matrizvc2

Donde S_1 es la matriz de varianza-covarianza.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2363 & 1863 \\ 1863 & 1505 \end{pmatrix}$$

Cuando se suprime el dato del año 1941, hay importantes caídas en las varianzas y covarianza.

¿Significa esto que la observación de 1941 tiene un efecto grande en todas las estimaciones que son funciones de la matriz de covarianza?

No necesariamente, ya que depende de cómo estos elementos se combinan para formar la estimación. Por ejemplo, el coeficiente de correlación es la covarianza de dos variables divididas por el producto de sus desviaciones estándar. Suprimir la observación de 1941, caso de consumo e ingresos cambia la correlación apenas en absoluto ($r = 0,985$ frente a $r_1 = 0,988$). Si el objeto de estudio fuera la correlación, concluiría que este valor atípico no fue influyente. Pero no se puede generalizar el efecto en las correlaciones a los efectos en otras estimaciones que son diferentes funciones de los elementos de S .

El ejemplo 2.1.11 de consumo e ingreso es atípico ya que solo contiene dos variables. La aplicación estándar implica muchas más variables. Los diagramas de dispersión bivariados a menudo pueden identificar casos desviados, pero no siempre revelan valores atípicos multidimensionales (Daniel y Wood 1980, 50-53).

La detección de valores atípicos multidimensionales no es un problema completamente resuelto.

2.1.5. Análisis de Ruta (Path)

El análisis de ruta de Sewall Wright (1918, 1921) es un metodología para analizar sistemas de ecuaciones estructurales. Las aplicaciones Contemporáneas enfatizan tres componentes del análisis de ruta:

- Diagrama de Path análisis
- Descomposición de covarianzas y correlaciones en términos de parámetros del modelo.
- Las distinciones entre directo, indirecto y total efectos de una variable sobre otra. Se Trata cada uno de estos a su vez.

Diagramas de Path (Ruta)

Un diagrama de ruta es una representación pictórica de un sistema simultáneo de ecuaciones. Una de las principales ventajas de un diagrama de ruta es que presenta una imagen de las relaciones que se supone que tienen. Para muchos investigadores esta imagen puede representar las relaciones más claramente de las ecuaciones. Para comprender los diagramas de ruta, es necesario definir los símbolos involucrados.

La siguiente figura 2.5 proporciona los símbolos principales:

- Las variables observable están encerradas en cuadros.
- Las variables no observadas o latentes están en un círculo, con la excepción de los términos de perturbación que no están encerrados. Sin embargo (El paquete Amos si encierra las perturbaciones en circulo.)
- Las flechas rectas de una sola cabeza representan relaciones causales entre las variables conectadas por las flechas.
- Una flecha curva de dos puntas indica una asociación entre dos variables. Las variables pueden estar asociadas a cualquier serie de razones.

La asociación puede deberse a ambas variables dependiendo de una tercera variable, o las variables pueden tener un efecto de relación causal, pero esto permanece sin especificar.

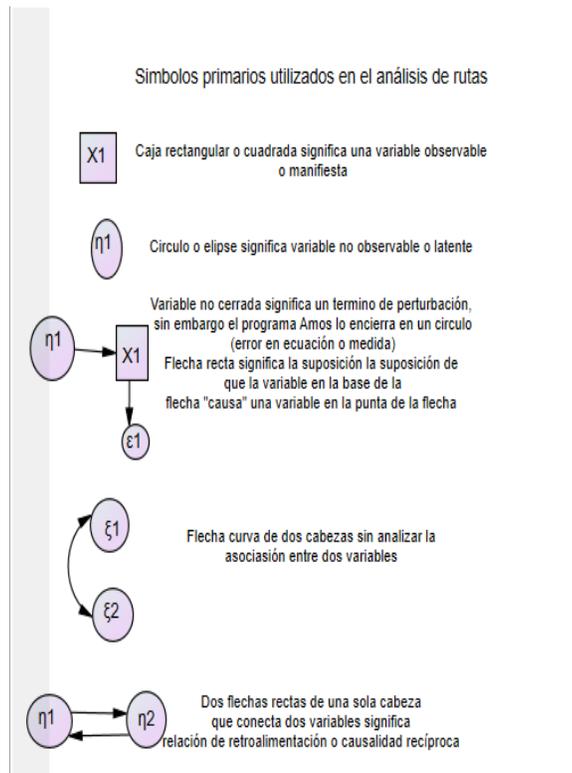


Figura 2.5: Símbolos

Ejemplo de Diagrama de path.

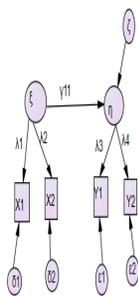


Figura 2.6: Diagrama path

El diagrama de ruta en la Figura 2.6 es equivalente a la siguiente simultaneidad del sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}\eta &= \gamma_{11}\xi + \zeta \\ x_1 &= \lambda_1\xi + \delta_1 \\ x_2 &= \lambda_2\xi + \delta_2 \\ y_1 &= \lambda_3\eta + \epsilon_1 \\ y_2 &= \lambda_4\eta + \epsilon_2\end{aligned}$$

Asumiendo:

$$\begin{aligned}COV(\xi, \delta_1) &= 0; COV(\xi, \delta_2) = 0; COV(\xi, \epsilon_1) = 0; COV(\xi, \epsilon_2) = 0 \\ COV(\xi, \zeta) &= 0; COV(\eta, \epsilon_1) = 0; COV(\eta, \epsilon_2) = 0; COV(\delta_1, \delta_2) = 0 \\ COV(\delta_1, \epsilon_1) &= 0; COV(\delta_1, \epsilon_2) = 0; COV(\delta_2, \epsilon_1) = 0; COV(\delta_2, \epsilon_2) = 0 \\ COV(\epsilon_1, \epsilon_2) &= 0; COV(\delta_1, \zeta) = 0; COV(\delta_2, \zeta) = 0; COV(\epsilon_1, \zeta) = 0 \\ COV(\epsilon_2, \zeta) &= 0\end{aligned}$$

Intencionalmente se a escrito todas las suposiciones para términos de perturbación ya que la misma información se muestra explícitamente en el diagrama de ruta. De hecho, todas las relaciones están representadas en el diagrama de ruta. Por ejemplo, el hecho de que no haya una flecha que conecte δ_1 y δ_2 o ξ y ϵ_1 es equivalente a la suposición de una covarianza cero entre estas variables. Por lo tanto, los diagramas de ruta son otro medio de representar sistemas de ecuaciones.

Descomposición de varianza y correlación.

El análisis de ruta permite escribir la covarianza o correlación entre dos variables como funciones de los parámetros del modelo. Una forma de hacer esto es con álgebra de covarianza. Para ilustrar esto, considere el modelo simple en la siguiente figura 2.7. Representa una sola variable latente (ξ_1) que tiene cuatro indicadores x_1 a x_4 . Todos los errores de medición δ_1 a δ_4 no están correlacionados, a excepción de δ_2 y δ_3 , se supone que los errores de medición (δ_i) son no correlacionado con ξ y $E(\delta_i) = 0$ para todo i .

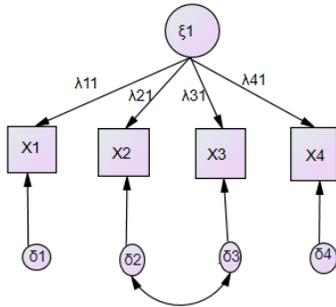


Figura 2.7: Diagramas de ruta de una variable latente simple con cuatro indicadores

La descomposición de $COV(x_1, x_4)$, es:

$$\begin{aligned} COV(x_1, x_4) &= COV(\lambda_{11}\xi_1 + \delta_1, \lambda_{41}\xi_1 + \delta_4) \\ &= \lambda_{11}\lambda_{41}\phi_{11} \end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación anterior se desprende de las ecuaciones para x_1 y x_4 definido en el diagrama de ruta 2.7. Esto muestra que la $COV(x_1, x_4)$ es una función del efecto de ξ_1 en x_1 y x_4 (es decir, λ_{11} y λ_{41}) y la varianza

de la variable latente ξ_1

Para modelos complicados, esta álgebra de covarianza puede ser tediosa. Una alternativa es usar álgebra matricial para descomponer covarianzas (o correlaciones) en los parámetros del modelo.

Ejemplo 2.1.12 *Considere la matriz de covarianza Σ para las variables X . La matriz de covarianza para X es el valor esperado de XX' , donde $X = \Lambda_x \xi + \delta$:*

$$\begin{aligned} XX' &= (\Lambda_x \xi + \delta)(\Lambda_x \xi + \delta)' \\ &= (\Lambda_x \xi + \delta)(\xi' \Lambda_x' + \delta') \\ &= \Lambda_x \xi \xi' \Lambda_x' + \Lambda_x \xi \delta' + \delta \xi' \Lambda_x' + \delta \delta' \\ E(XX') &= \Lambda_x E(\xi \xi') \Lambda_x' + \Lambda_x E(\xi \delta') + E(\delta \xi') \Lambda_x' + E(\delta \delta') \\ \Sigma &= \Lambda_x \phi \Lambda_x' + \theta_\delta \end{aligned}$$

En este caso Σ es la matriz de covarianza de X , se descompone en términos de los elementos en Λ_x , ϕ y θ_δ , como se muestra en el capítulo 3, las covarianzas para todas las variables observadas pueden descomponer en el modelo parámetros de manera similar. Estas descomposiciones son importantes porque muestren que los parámetros están relacionados con las covarianzas y diferentes valores de parámetros conducen a diferentes covarianzas.

Efectos totales, directos e indirectos.

El análisis de ruta distingue tres tipos de efectos: directo, indirecto y efecto total.

- El efecto directo es la influencia de una variable sobre otra que no está mediado por ninguna otra variable en un modelo de ruta.
- Los efectos indirectos de una variable están mediados por al menos una variable intermedia.
- Los efectos totales es la suma de los efectos directos e indirectos.

$$EfectosTotales = EfectosDirectos + EfectosIndirectos$$

La descomposición de los efectos siempre es con respecto a un modelo específico. Si el sistema de ecuaciones se altera incluyendo o excluyendo variables, las estimaciones de los efectos totales, directos e indirectos pueden cambiar.

Para hacer que estos tipos de efectos sean más concretos, considere el modelo introducido en la sección de notación de modelo que relaciona la industrialización de 1960 con la democracia política de 1960 y 1965 en los países en desarrollo.

Las ecuaciones para este modelo están en 2.8, 2.15, 2.16 y en los supuestos en la discusión que rodea estas ecuaciones. El modelo de ruta para estas ecuaciones y suposiciones está representado en Figura 2.8. Aquí ξ_1 es la industrialización con indicadores x_1 a x_3 . La variable η es la política democrática de 1960 con sus cuatro medidas, y_1 a y_4 y η_2 es la democracia medida por y_5 a y_8 .

A continuación se muestran algunos ejemplos de los efectos.

Ejemplo 2.1.13 *Efecto directo es el efecto de η_1 a η_2 es decir, β_{21} . Un cambio de una unidad en η_1 en 1 conduce a un esperado cambio directo neto de β_{21} en η_2 de ξ_1 . No hay variables de mediación entre η_1 y η_2 . El efecto directo de ξ_1 en η_2 es γ_{21} , mientras que λ_8 es el efecto directo de η_1 en y_5 .*

Para ilustrar los efectos indirectos, se considera:

Ejemplo 2.1.14 *La influencia de ξ_1 en η_2 . Las variable interviniente en este caso es η_1 . Este cambio de γ_{11} en η_1 conduce a un esperado cambio de β_{21} en η_2 . Por lo tanto, el efecto indirecto de ξ_1 en η_2 es $\gamma_{11}\beta_{21}$. Siguiendo un procedimiento similar, el efecto indirecto de η_1 en y_7 es $\beta_{21}\lambda_{10}$.*

Ejemplo 2.1.15 *El efecto total de una variable en otra es la suma de su efecto directo y efectos indirectos. Por ejemplo, el efecto total de ξ_1 en η_2 es:*

$$EfectosTotales = EfectosDirectos + EfectosIndirectos = \gamma_{21} + \gamma_{11}\beta_{21}$$

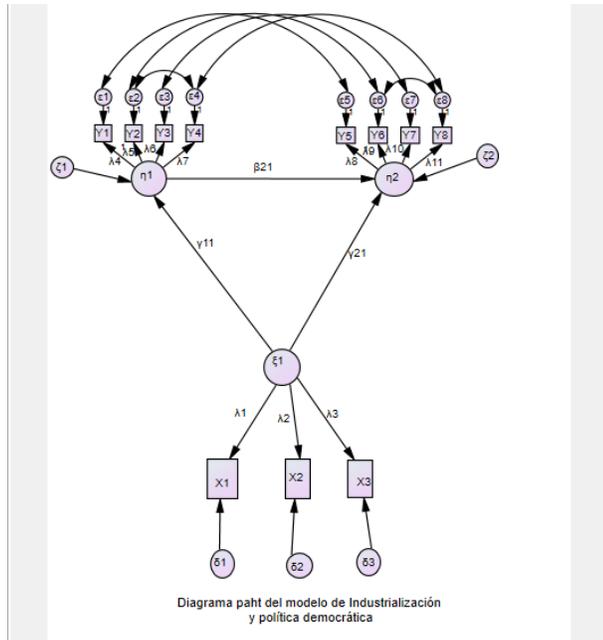


Figura 2.8: Diagramas de path del Modelo de Industrialización y política democrática

Ejemplo 2.1.16 *El efecto total sobre y_8 es:*

$$\begin{aligned} \text{EfectosTotales} &= \text{EfectosDirectos} + \text{EfectosIndirectos} \\ &= 0 + (\gamma_{21}\lambda_{11} + \gamma_{11}\beta_{21}\lambda_{11}) \end{aligned}$$

Ya que ξ_1 no tiene efecto directo sobre y_8 , el efecto total comprende solo los efectos indirectos.

La consideración de cada tipo de efecto conduce a una comprensión más completa de la relación entre las variables que si esa distinción no se hubiese hecho.

En un análisis de regresión típico, el coeficiente de regresión es una estimación del efecto directo de una variable. Si se ignora el efecto indirecto que una variable puede tener a través de otra variable se puede estar muy equivocados en la evaluación de su efecto general.

Por ejemplo, si en la Figura 2.8 afirmamos que el efecto de la industrialización ξ_1 sobre la democracia política de 1965 (η_2) es γ_{21} , se pasa por alto un efecto indirecto posiblemente grande de $\gamma_{11}\beta_{21}$.

Capítulo 3

Modelos de Ecuaciones Estructurales con Variables Observadas

Los modelos basados en regresión son comunes en las ciencias sociales. Pueden consistir en una única ecuación orientada a explicar una variable endógena (dependiente) o modelos de multiecuaciones con un número de variables endógenas y relaciones recíprocas. Estos “modelos econométricos clásicos”, como se les llama a veces, tienen en común el supuesto de que las variables endógenas y exógenas se observan directamente sin error de medición. Si se permite el error de medición, se supone que sólo se produce en variables endógenas que no sirven como variables explicativas en cualquier ecuación. Así, con pocas excepciones, se observan y y x Para igualar el correspondiente η y ξ .

En este capítulo se examina los modelos de ecuaciones estructurales con Variables observables. Se hace por dos razones. En primer lugar, son los más comunes modelos de ecuaciones estructurales. De hecho, muchos lectores tendrán cierta experiencia con la estimación de regresión o modelos de análisis de trayectoria de este tipo. En segundo lugar, estos modelos son un caso especial de los procedimientos de ecuación estructural más generales con variables latentes. Los principales temas de este capítulo son modelo de especificación, la matriz de covarianza implícita, la identificación y la estimación se repiten para los otros modelos.

3.0.1. Especificación del Modelo

La ecuación 3.1 es una representación general de ecuaciones estructurales con variables observadas (modelo econométrico clásico):

$$y = \beta y + \Gamma x + \zeta \quad (3.1)$$

Donde,

β : matriz de coeficientes $m \times m$.

Γ : matriz de coeficiente $m \times m$.

y : vector de variable endógena $p \times 1$.

x : vector de variable exógena $q \times 1$.

ζ : vector de errores de la ecuación $q \times 1$.

Dado que las perturbaciones ζ representan errores aleatorios en las relaciones entre las y y las x , estos modelos se denominan a veces errores en los modelos de ecuaciones. La suposición estándar es que los errores (ζ) son no correlacionado con x .

El modelo de medición implícita para las ecuaciones estructurales con variables observables es: $y = \eta$

$x = \xi$ donde y : $p \times 1$ vector de variables manifiestas (observadas)

x : $q \times 1$ vector de variables manifiestas (observadas)

En pocas palabras, se supone que x e y representan exactamente las latentes ξ y η y sólo se utiliza un indicador para cada variable latente. El número de y variables es igual al número de η variables ($p = m$) y el número de x variables es igual al número de ξ variables ($q = n$).

Los dos tipos principales de ecuaciones estructurales con variables observadas son recursivas y no recursivas.

Definición 3.0.1 *Los modelos recursivos son sistemas de ecuaciones que no contienen ninguna relación de causalidad recíproca o bucles de retroalimentación.*

Cuando esto es cierto, es posible escribir β como una matriz triangular inferior. Además, la matriz de covarianza de los errores de las ecuaciones Ψ es diagonal.

Las perturbaciones para una ecuación no están correlacionadas con las perturbaciones de las otras ecuaciones. Por ejemplo, si y_1 causa y_2 , y_2 no

puede afectar y_1 tampoco directamente a través de una cadena de otras variables. Además, la perturbación ζ_1 para la ecuación y_1 no está correlacionada con ζ_2 para la ecuación y_2 .

La figura 3.1 proporciona dos ejemplos hipotéticos de modelos recursivos.

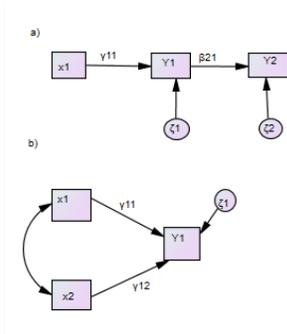


Figura 3.1: Dos ejemplos de modelos de ecuaciones estructurales recursivas

El diagrama de trayectoria para un ejemplo empírico se encuentra en la Figura 3.2. Y se muestra a continuación:

Ejemplo 3.0.1 *Los datos son a partir de un estudio del sentimiento sindical entre los trabajadores textiles no sindicalizados del sur (McDonald y Clelland, 1984). Las variables son años en la fábrica textil (x_1), edad (x_2) la*

diferencia (o sumisión) al apoyo de los gerentes (y_1) al activismo laboral (y_2) y al sentimiento hacia las uniones (y_3).

Además de formular la relación entre las actitudes de los trabajadores, el modelo evalúa por separado la influencia de la antigüedad y la edad. Especifica que la edad (x_2) afecta a la deferencia (o sumisión) a los directivos (y_1) y la actitud hacia el activismo (y_2) pero no el sentimiento sindical (y_3). La antigüedad (x_1) afecta sólo al sentimiento de unión (y_3). El orden causal entre las variables endógenas que McDonald y Clelland hipotetizaron es que La deferencia (y_1) influye en las actitudes hacia el activismo (y_2) y los sindicatos (y_3) y que el activismo afecta al sentimiento sindical. Los perturbaciones (ζ) no están correlacionadas entre las ecuaciones.

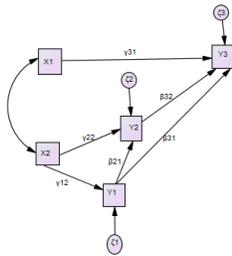


Figura 3.2: Modelo de sentimiento del sindicato para los trabajadores textiles del sur

La ecuación matricial para el modelo es dado que β es triangular inferior y es diagonal, el modelo de sentimiento de unión es recursivo.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ 0 & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

El segundo tipo principal de ecuación estructural con variables observadas es no recursivo.

Definición 3.0.2 *Los modelos no recursivos contienen causalidad recíproca, retroalimentación Bucles, o tienen alteraciones correlacionadas.*

A diferencia de los modelos recursivos, β no es triangular inferior, o la matriz no es diagonal. Dos ejemplos se encuentran en Figura 3.3.

Se utilizó un ejemplo empírico de la relación entre medidas objetivas de la situación socioeconómico y la percepción que tiene un individuo de su situación. Hay cinco variables: ingreso (x_1), prestigio ocupacional (x_2), ingreso subjetivo (y_1) el prestigio ocupacional subjetivo (y_2) y el estatus social subjetivo global (y_3). Las dos primeras variables (x_1 y x_2) son medidas de Ingresos y prestigio ocupacional. Los indicadores y_1 e y_2 son el ingreso percibido y el prestigio ocupacional percibido, respectivamente.

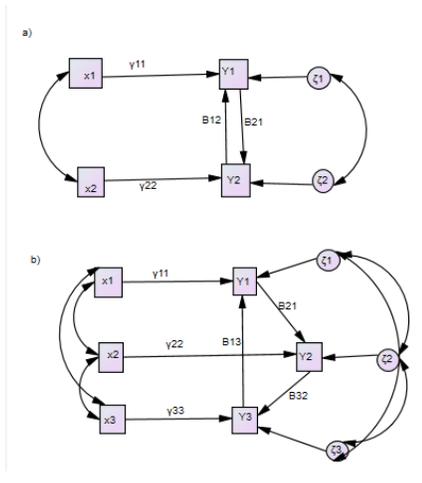


Figura 3.3: Dos ejemplos de modelos de ecuaciones estructurales no recursivos

Estos no deben ser los mismos que x_1 y x_2 ya que los ingresos reales de los individuos y las ocupaciones pueden variar de su evaluación de su posición social en estas dos variables. La última variable, y_3 es la evaluación global que los individuos hacen de su estatus social. Al igual que y_1 e y_2 , se trata de una medida subjetiva. Un modelo posible para estas variables es que el ingreso real x_1 afecta directamente al prestigio ocupacional real x_2 afecta directamente al prestigio ocupacional subjetivo y_2 , y que el y_1 es el prestigio ocupacional subjetivo y_2 influyen directamente entre sí, así como el nivel socioeconómico global subjetivo y_3 . Estas ideas están incorporadas en el diagrama de trayectoria de la Figura 3.4 El β , Γ , ψ y ϕ , para este modelo

son:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Un modelo diferente al recursivo, β no se puede escribir como una matriz inferior triangular, y Ψ es no diagonal.

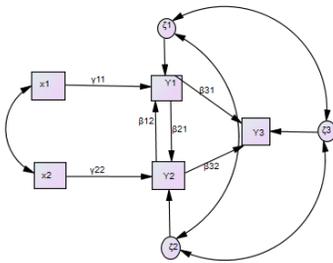


Figura 3.4: Ejemplo de modelos no recursivo de estados objetivo y subjetivo

3.0.2. Matriz de Covarianza Implícita

Como se indicó en el capítulo 2, la hipótesis básica del modelo de ecuación estructural general es :

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \quad (3.5)$$

Donde Σ es la matriz de covarianza poblacional de y , x y $\Sigma(\theta)$ es la matriz de covarianza escrita en función de los parámetros del modelo libre en θ .

La ecuación 3.5 implica que cada elemento de la matriz de covarianza es una función de uno o más parámetros del modelo. Derivo la especialización de 3.5 para modelos de variables observadas en esta sección. La relación de Σ a $\Sigma(\theta)$ es básico para la comprensión de la identificación, la estimación y las evaluaciones del ajuste del modelo.

Se ensambla $\Sigma(\theta)$ en tres partes:

- la matriz de covarianza de y
- La Matriz de covarianza de x con y
- La matriz de covarianza de x . SE considerar Primero $\Sigma_y y(\theta)$, la matriz de covarianza implícita de y :

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy}(\theta) &= E(yy') \\ &= E[(I - \beta)^{-1}(\Gamma x + \zeta)((I - \beta)^{-1}(\Gamma x + \zeta))'] \\ &= E[(I - \beta)^{-1}(\Gamma x + \zeta)(x'\Gamma' + \zeta')(I - \beta)^{-1}] \\ &= (I - \beta)^{-1}(E(\Gamma x x'\Gamma') + E(\Gamma x \zeta') + E(\zeta x'\Gamma') + E(\zeta \zeta'))(I - \beta)^{-1'} \\ &= (I - \beta)^{-1}(\Gamma \Phi \Gamma' + \Psi)(I - \beta)^{-1'} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Donde Φ matriz de covarianza de x

Ψ matriz de covarianza de ζ

La matriz de covarianza implícita de x ,

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx}(\theta) &= \Phi \\ &= \Sigma_{xx}(\theta) = E(xx') = \Phi \end{aligned} \quad (3.7)$$

La parte final de la matriz de covarianza implícita es $\Sigma_{xy}(\theta)$, el implícito Covarianza de x con y : $\Sigma_{xy}(\theta) = E(xy')$

$$\begin{aligned} &= E[x((I - \beta)^{-1}(\Gamma x + \zeta))'] \\ &= \Phi\Gamma'(I - \beta)^{-1'} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Después de reunir las ecuaciones 3.6 a 3.8, la matriz de covarianza implícita de y y x es

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} (I - \beta)^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)(I - \beta)^{-1'} & (I - \beta)^{-1}\Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma'(I - \beta)^{-1'} & \Phi \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Se ilustra la ecuación 3.9 con un ejemplo hipotético que es un modelo de cadena causal $x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2$ [véase la figura 3.1 (a) para el diagrama de trayectoria]:

$$y_1 = \gamma_{11}x_1 + \zeta_1 \quad (3.10)$$

$$y_2 = \beta_{21}y_1 + \zeta_2 \quad (3.11)$$

donde $COV(\zeta_1, x_1)$, $COV(\zeta_1, \zeta_2)$ y $COV(x_1, \zeta_2)$ son ceros. Las matrices de estos modelos son:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & 0 \\ 0 & \psi_{22} \end{bmatrix}; \Phi = [\phi_{11}] \quad (3.13)$$

Sustituyendo la ecuación 3.12 y 3.13 en la ecuación 3.9 y usando 3.9 conduce a la ecuación 3.5

$$\Sigma = \Sigma(\theta) \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} VAR(y_1) & & \\ COV(y_2, y_1) & VAR(y_2) & \\ COV(x_1, y_1) & COV(x_1, y_2) & VAR(x_1) \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11} & & \\ \beta_{21}(\gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11}) & \beta_{21}(\gamma_{11}^2 \phi_{11} + \psi_{11}) & \\ \gamma_{11} \phi_{11} & \beta_{21} \gamma_{11} \phi_{11} & \phi_{11} \end{array} \right] =$$

El lado izquierdo de la ecuación 3.14 es la matriz de covarianza poblacional de y_1 , y_2 y x_1 , mientras que el lado derecho representa cada varianza y covarianza en términos de los parámetros del modelo desconocido.

Sólo la mitad inferior se muestra de cada matriz. Los elementos por encima de la diagonal principal son los mismos como los que están debajo. En general, una matriz de covarianza para $p + q$ variables es $(\frac{1}{2})(p + q)(p + q + 1)$ elementos no redundantes.

Para este ejemplo, Son $(6 = (\frac{1}{2})(3)(4))$ elementos, lo que implica seis ecuaciones.

Por ejemplo la ecuación 3.14 muestra que:

$$VAR(y_1) = \gamma_{11}^2 \phi_{11} \text{ y } COV(x_1, y_1) = \gamma_{11} \phi_{11}$$

Las Seis ecuaciones hacen clara la dependencia de las varianzas de la población y Covarianzas en los parámetros del modelo.

Los mismos pasos podrían ser seguidos para mostrar la relación de Σ a $\Sigma(\theta)$ para el ejemplo de sentimiento sindical, los ejemplos objetivos y percibidos de estatus social así como para cualquier otra ecuación estructural con variables observadas. Sustituya β , Γ , Ψ y Φ en el modelo 3.9. El sentimiento sindical Y los modelos de estatus social, cada uno con cinco variables, tiene $(15 = ((\frac{1}{2})(5)(6))$ elementos no redundantes en sus matrices de covarianza, lo que implica 15 ecuaciones para el modelo. En la práctica $(I - \beta)^{-1}$, la cual es requerida para la ecuación 3.9 requiere un tedioso cálculo cuando β es grande. Si los investigadores están interesados relativamente en pocos elementos de la matriz de covarianza, el álgebra de covarianza proporciona una derivación alternativa.

El analista simplemente utiliza manipulaciones algebraicas de las ecuaciones estructurales (Si es necesario) y las reglas del álgebra de covarianza revisadas en el capítulo dos. Por ejemplo, las ecuaciones estructurales para la ecuación del ingreso percibido (y_1) y la ecuación percibida de prestigio ocupacional (y_2) son vista en ecuación 3.3.

$$y_1 = \beta_{12}y_2 + \gamma_{11}x_1 + \zeta_1 \tag{3.15}$$

$$y_2 = \beta_{21}y_1 + \gamma_{22}x_2 + \zeta_2 \tag{3.16}$$

Escriba las ecuaciones para que estén en forma reducida. Es decir, las únicas variables en el lado derecho deben ser variables exógenas. La reducción de la ecuación 3.15 es la siguiente ecuación:

$$y_1 = (1 - \beta_{12}\beta_{21})^{-1}(\gamma_{11}x_1 + \beta_{12}\gamma_{22}x_2 + \zeta_1 + \beta_{12}\zeta_2) \quad (3.17)$$

[La ecuación 3.17 sigue a la sustitución del lado derecho de la ecuación 3.16 Para y_2 en la ecuación 3.15 y resolución para y_1 La covarianza del ingreso objetivo (x_1) y del ingreso percibido (y_1) es

$$\begin{aligned} &= COV(x_1, y_1) = COV(x_1, (1 - \beta_{12}\beta_{21})^{-1}(\gamma_{11}x_1 + \beta_{12}\gamma_{22}x_2 + \zeta_1 + \beta_{12}\zeta_2)) \\ &= (1 - \beta_{12}\beta_{21})^{-1}(\gamma_{11}\phi_{11} + \beta_{12}\gamma_{22}\phi_{12}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Una serie similar de pasos conduce a cualquiera de la otra varianza o covarianza de las ecuaciones. En resumen, una vez que se especifica un modelo, las varianzas y covarianzas son funciones de los parámetros del modelo. Intenta establecer valores únicos para estos parámetros introduce la identificación del problema.

3.0.3. Identificación

La identificación es un tema relevante para todos los modelos de ecuaciones estructurales. En esta primera parte de la sección, se ofrece algunas observaciones generales sobre el tema. Se sigue esto con comentarios específicos y reglas para la identificación de ecuaciones estructurales con variables observadas. Las investigaciones de identificación comienzan con una o más ecuaciones conocidos y desconocidos. Por parámetros “conocidos”, no se refiere a que se conocen los valores exactos de los parámetros. Más bien, se refiere a los parámetros que se sabe que se identifican. Generalmente, estos parámetros son características poblacionales de la distribución de las variables observadas como sus varianzas y covarianzas para las cuales los estimadores de muestra consistentes. Están fácilmente disponibles y para los cuales la identificación no suele ser un problema.

Los parámetros “desconocidos” son los parámetros cuyo estado de identificación no se sabe. El investigador debe establecer si existen valores únicos. Los parámetros desconocidos provienen del modelo de ecuaciones estructurales. La identificación se demuestra mostrando que los parámetros desconocidos son funciones de los parámetros identificados y que estas funciones

conducen a soluciones únicas. Si esto se puede hacer, los parámetros desconocidos son identificados de otra manera, uno o más parámetros no están identificados. Así, el objetivo es resolver los parámetros desconocidos en términos de los conocidos por ser identificados los parámetros.

Se ilustra esto con un simple,

Ejemplo 3.0.2 *Supongamos que $VAR(y)$ es el Parámetro identificado, θ_1 y θ_2 , son los parámetros desconocidos, y la ecuación que relaciona esto es : $VAR(y) = \theta_1 + \theta_2$, la cuestión de la identificación es:*

- *Si de esta ecuación se desprenden valores únicos de θ_1 y θ_2 . Claramente, con dos incógnitas en una ecuación, θ_1 y θ_2 , no se identifican.*
- *Para cualquier valor de $VAR(y)$, un conjunto infinito de valores de θ_1 y θ_2 satisfacen la ecuación $VAR(y) = \theta_1 + \theta_2$.*
- *Sin embargo, la adición de una segunda ecuación de $\theta_1 = \theta_2$ sería asegurar la identificación con cada parámetro igual a $\frac{VAR(y)}{2}$. Ya que $\frac{VAR(y)}{2}$ es un valor único para cualquier valor dado de $VAR(y)$, θ_1 y θ_2 son Parámetros identificados.*

Los mismos principios generales se aplican a los modelos de ecuaciones estructural más complicadas. Los parámetros conocidos son identificados como los elementos de Σ , la matriz de covarianza poblacional de las variables observadas. Los parámetros cuyo estado de identificación es desconocido se encuentran en θ , donde θ contiene el t libre y (no redundantes) parámetros restringidos de β , Γ , Φ y Ψ . La ecuación que relaciona Σ con θ es la hipótesis de estructura de covarianza, $\Sigma = \Sigma(\theta)$, que se presentó en la última sección. Si un parámetro desconocido en θ puede ser escrito como una función de uno o más elementos de Σ , ese parámetro es identificado.

Si se identifican todos los parámetros desconocidos en θ , entonces el modelo es identificado. Una definición alternativa de identificación comienza considerando dos Vectores $t \times 1$ θ_1 y θ_2 , cada uno de los cuales contiene valores específicos para los parámetros desconocidos en θ . Puedo formar las matrices de covarianza implícitas, $\Sigma(\theta_1)$ y $\Sigma(\theta_2)$ para cada uno de estos vectores de

solución. Si el modelo es todas las soluciones θ_1 y θ_2 donde $\Sigma(\theta_1) = \Sigma(\theta_2)$ debe tener $\theta_1 = \theta_2$, si un par de vectores θ_1 y θ_2 existe tal que $\Sigma(\theta_1) = \Sigma(\theta_2)$ y $\theta_1 \neq \theta_2$, entonces θ no está identificado.

La sobre identificación de un parámetro se refiere a un exceso de identificación de información.

Ejemplo 3.0.3 *Supongamos que para el parámetro desconocido ϕ_{11} se tienen $\phi_{11} = VAR(x_1)$ y $\phi_{11} = COV(x_1, y_1)$ donde $VAR(x_1)$ y $COV(x_1, y_1)$ son idénticas cualquiera de estas igualdades solo establecería la identificación de ϕ_{11} . En conjunto, ϕ_{11} está sobreidentificado. Una posible fuente de confusión es pensar que debido a que ϕ_{11} tiene dos ecuaciones, asume dos valores diferentes. Esto no es verdad. En la población la $VAR(x_1)$ y $COV(x_1, y_1)$ tienen el mismo valor cuando el modelo es correcto de modo que ϕ_{11} toma sólo un valor.*

Un modelo es sobre identificado cuando cada parámetro es identificado y por lo menos un parámetro es sobre identificado . Un modelo se identifica exactamente cuando cada parámetro se identifica, pero ninguno está sobre identificado. Una distinción similar es hecho para las ecuaciones. En la práctica, el término identificó modelos (o ecuaciones) se refiere a modelos (o ecuaciones) exactamente identificados y sobre identificados. Un modelo (o ecuación) no identificado tiene al menos un parámetro que no puede ser identificado.

Generalmente, los parámetros identificados en un modelo puede ser estimado consistentemente, aunque esto no es cierto para parámetros no identificados. Algunas veces funciones de parámetros no identificados son identificados.

En el ejemplo 3.0.2 anterior con la ecuación única de $VAR(y) = \theta_1 + \theta_2$ la suma de $\theta_1 + \theta_2$ se identifica, aunque los parámetros individuales $\theta_1 + \theta_2$ no son. Tales funciones identificadas de parámetros no identificados a menudo pueden estimarse constantemente, aunque esto no es cierto para el parámetros individuales no identificados.

Como se desprende de la discusión anterior, la identificación es posible a partir de la información sobre la distribución de las variables observadas y y x . Si las variables tienen una distribución multinormal, entonces los parámetros

que caracterizan la distribución de las variables observadas son la población (μ) y la matriz de covarianza de la población (Σ). Éstos son de segundo orden de la distribución. El tercer y más alto orden los momentos son cero o las funciones de los momentos de orden inferior. Son redundantes y no proporcionan ninguna información que pueda ayudar en el modelo identificación. Para las variables que no están distribuidas de forma multinormal, el orden superior momentos de la distribución pueden ayudar a identificar los parámetros. Yo no Considere este tema aquí (véase Bentler 1983). De los momentos primer y segundo orden , he demostrado que el momento de segundo orden Σ , está en el centro de la hipótesis de la estructura de covarianza, $\Sigma = \Sigma(\theta)$, y he definido la Identificación de θ , en términos de los elementos de Σ .

Por ahora, ignoro el momento de primer orden μ ya que todas las variables están en forma de desviación y μ no es estructurado como una función de θ . Más adelante, cuando estimo las constantes de regresión de ecuaciones, haré uso de μ . Así que para mis propósitos, la matriz de covarianza poblacional de las variables observadas, Σ , contiene los parámetros conocidos por ser identificados de los cuales debemos demostrar los parámetros desconocidos en θ pueden ser identificados. La identificación no es un problema de muy pocos casos. Se define en términos de los parámetros de población. La matriz de covarianza poblacional es la fuente de la información identificada. Los parámetros se refieren a población, no a valores muestrales. Así que no importa cuán grande sea la muestra, un parámetro no identificado sigue sin identificarse.

Como es evidente, la identificación de modelos en ecuaciones estructurales con variables observadas no es posible sin imponer restricciones a los parámetros del modelo. Un investigador puede especificar que todos los elementos de Γ , Φ , Ψ y β son libres en un intento de “dejar que los datos nos dicen “ cómo estas variables son relacionada. Desafortunadamente, esto pide más de los datos de lo que puede ofrecer ya que tal modelo está subidentificado y los verdaderos valores de los parámetros no puede distinguirse de un infinito número de falsos. Para los datos decirnos las relaciones, debemos restringir los parámetros antes de datos para hablar. Las restricciones más comunes establecen algunos elementos de Γ, Φ, Ψ y β a cero o alguna otra constante. Otros imponen igualdad o desigualdad restricciones sobre los parámetros.

Aunque no es obvio, ya he impuesto dos restricciones necesarios para su identificación. Ambos aparecen en la ecuación 3.1, que es la ecuación

estructural

$$y = \beta y + \Gamma x + \zeta$$

, primero, la diagonal principal de β es fija a cero. Si esto no se hiciera, cada variable endógena se mostraría como teniendo un efecto directo sobre sí misma. Sigo la convención estándar de establecer la diagonal de β a cero de modo que la variable dependiente de cada ecuación aparezca en el lado izquierdo con un coeficiente implícito de uno. Esto a veces se conoce como la convención de normalización, y sin ella, los modelos de ecuaciones estructurales serían subidentificados.

Una segunda convención de identificación que a menudo se da por sentado es que la matriz de coeficientes para ζ en la ecuación 3.1 siempre es una matriz de identidad. Esto significa que cada zeta aparece en una sola ecuación con un coeficiente de uno. El vector ζ contiene variables que a diferencia de y y x no pueden ser directamente observado. Estas variables latentes deben tener una escala para hacerlas interpretables. Dos maneras de hacerlo son fijando la varianza de la variable latente a una constante (por ejemplo, a uno) o escalándola a una de las variables observadas por establecer su coeficiente en uno, pero basta con decir que los normalmente se les da una escala estableciendo sus coeficientes en sus respectivas ecuaciones a uno en lugar de fijar su varianza a algún valor constante. Estas dos restricciones de identificación son tan rutinariamente utilizadas que muchos de los analistas no son conscientes de que están estimando la regresión o modelo econométrico. En la mayoría de los casos, estas convenciones no son suficiente para identificar modelos de multiecuación, y otra información debe ser llevado a la especificación.

Una ilustración de un modelo identificado es un ejemplo macroeconómico de Haavelmo's (1953). Algunos de sus datos fueron examinados en el capítulo 2. El Interés de Haavelmo's es la propensión marginal a consumir. Esta es la parte de Ingreso que va a la compra de bienes de consumo. Él trata el ingreso disponible agregado (y_1) como igual a los gastos de inversión (x_1) Más gastos de consumo (y_2). Los gastos de consumo (y_2) son un función del ingreso disponible (y_1) más un término de perturbación. Los dos sistema de ecuaciones.

$$y_1 = y_2 + x_1 \tag{3.19}$$

$$y_2 = \beta_{21}y_1 + \zeta_2 \tag{3.20}$$

Donde la $cov(\zeta_1, x_1)$ es cero, la primera ecuación es idéntica β , Γ , Ψ y Φ son:

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta_{21} & 0 \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \psi_{22} \end{bmatrix}; \Phi = [\phi_{11}] \quad (3.22)$$

Más adelante en este capítulo, estimaré este modelo con los datos de Haavelmo's, pero por ahora, examino su identificación. Para ello, sustituya 3.21 y 3.22

En 3.9. Esto lleva a:

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} (1 - \beta_{21})^{-2}(\phi_{11} + \psi_{22}) & & \\ (1 - \beta_{21})^{-2}(\beta_{21}\phi_{11} + \psi_{22}) & (1 - \beta_{21})^{-2}(\beta_{21}^2\phi_{11} + \psi_{22}) & \\ (1 - \beta_{21})^{-1}\phi_{11} & (1 - \beta_{21})^{-1}\phi_{11}\beta_{21} & \phi_{11} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Cuando un modelo incluye una identidad [vea 3.21], las matrices Σ y $\Sigma(\theta)$ son singulares. Prácticamente toda la discusión de identificación y estimación supone que estas matrices son no singulares. Una solución simple es eliminar las variables que son combinaciones lineales de otras variables y use un subconjunto de variables linealmente independientes para formar Σ y $\Sigma(\theta)$. En 3.23 hago esto eliminando y_2 y la segunda fila y columna de $\Sigma(\theta)$ que corresponden a y_2 . El resultado es un 2×2 $\Sigma(\theta)$ y Σ . La hipótesis de la estructura de covarianza $\Sigma = \Sigma(\theta)$ tiene tres parámetros desconocidos ($\theta' = [\beta_{21}, \psi_{22}, \phi_{11}]'$) El modelo se identifica si podemos escribir cada elemento de θ como una función sólo de los elementos de Σ .

Considere las tres ecuaciones tomadas de $\Sigma = \Sigma(\theta)$:

$$\begin{aligned} VAR(x_1) &= \phi_{11} \\ COV(x_1, y_1) &= (1 - \beta_{21})^{-1}\phi_{11} \\ VAR(y_1) &= (1 - \beta_{21})^{-2}(\phi_{11} + \psi_{22}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

La solución de ϕ_{11} es obvia, y las manipulaciones conducen a :

$$\begin{aligned}
\phi_{11} &= VAR(x_1) \\
\beta_{21} &= 1 - \frac{VAR(x_1)}{COV(x_1, y_1)} \\
\psi_{11} &= \left[\frac{VAR(x_1)}{COV(x_1, y_1)} \right]^2 VAR(y_1) - VAR(x_1)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

La ecuación 3.25 demuestra que el modelo de dos ecuaciones de Haavelmo es identificado.

Aunque las manipulaciones algebraicas de la ecuación $\Sigma = \Sigma(\theta)$ pueden ayudar a la Identificación, pierde su practicidad a medida que el modelo aumenta en complejidad. Considere el sentimiento sindical o el estatus socio-económico ejemplos con cinco variables observadas y 15 ecuaciones. Intentando resolver los parámetros desconocidos a través de medios algebraicos sería propenso a errores y lento. Afortunadamente, otros procedimientos están disponibles para evaluar la identificación.

3.0.4. Regla t

La prueba más fácil de aplicar es una condición necesaria pero no identificación. Esta condición necesaria es perfectamente general y puede ser aplicado a todos los modelos discutidos en esta unidad, así como a todos los modelos tratado posteriormente. La regla t para la identificación es que el número de elementos de la matriz de covarianza de las variables observadas deben ser mayor o igual que el número de parámetros desconocidos en θ :

$$y \leq \left(\frac{1}{2}\right)(p+q)(p+q+1) \tag{3.26}$$

En la discusión de identificación ignoro las restricciones de desigualdad en los parámetros que pueden ayudar en la identificación. Como mencioné anteriormente, supongo que Σ y $\Sigma(\theta)$ son no singulares.

Donde $p+q$ es el número de variables observadas y t es el número de parámetros libres en θ . El lado derecho de la ecuación 3.26 es el número de elementos no redundantes en Σ . Cada una de estas varianzas o covarianzas es conocido por ser identificado, y la ecuación 3.9 muestra que cada una es una función de uno o más de los t elementos en θ .

Esto lleva a $\left(\frac{1}{2}\right)(p+q)(p+q+1)$ ecuaciones en t incógnitas. Si el número de incógnitas excede el número de ecuaciones, la identificación de θ no es

posible. Por ejemplo el desarrollo estado socioeconómico , ecuaciones: 3.3 y 3.4 se tiene 15 desconocidos y $(\frac{1}{2})(p+q)(p+q+1)$ Es 15 para que la regla t se cumpla. El ejemplo sentimiento sindical véase la ecuación 3.2 también satisface la regla t.

Esta condición necesaria de identificación es extremadamente útil nos permite descubrir rápidamente modelos subordinados. Su principal limitación es cumplir con las condiciones necesarias que no garantiza la identificación. Afortunadamente, se han ideado reglas adicionales de identificación para ecuaciones con variables observadas que toman formas particulares.

Reglas Nulas B.

En un modelo de multiecuación donde ninguna variable endógena afecta a ninguna otra endógena, la matriz \mathbf{B} es cero. Un ejemplo es las dos ecuaciones del modelo:

$$\begin{aligned} y &= \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \zeta_1 \\ y &= \gamma_{21}x_1 + \gamma_{23}x_3 + \zeta_2 \\ COV(x_i, \zeta_j) &= 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La matriz \mathbf{B} es cero puesto que y_1 no afecta a y_2 , ni tampoco y_2 afecta a y_1 . Para establecer la identificación de cualquier modelo donde \mathbf{B} es cero, muestro que los parámetros desconocidos en Γ, Φ, Ψ , son funciones de los identificados parámetros de Σ . Sustituyendo $\beta=0$ en la ecuación 3.9 y dividiendo Σ en cuatro partes conduce a

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma(\theta) \\ \begin{bmatrix} \Sigma_{yy} & \Sigma_{yx} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{xx} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi) & \Gamma\Phi \\ \phi\Gamma' & \Phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

El cuadrante inferior derecho de 3.28 revela que $\phi = \Sigma_{xx}$ por lo que ϕ sea identifica. El uso del cuadrante inferior izquierdo

$$\begin{aligned} \Phi\Gamma' &= \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xx}\Gamma' &= \Sigma_{xy} \\ \Gamma' &= \Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \end{aligned} \quad (3.29)$$

El segundo paso de la ecuación 3.29 se deriva de la sustitución Σ_{xx} en lugar de Φ y el último se produce por la premultiplicación de ambos lados por Σ_{xx}^{-1} , donde Σ_{xx} debe ser no singular. La línea de fondo confirma que Γ es una función de conocidos a ser identificados por covarianza y se identifica así mismo. Finalmente, el cuadrante superior izquierdo de la ecuación 3.27 resuelto para ello se crea Ψ :

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \Sigma_{yy} - \Gamma\Phi\Gamma' \\
 &= \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy} \\
 &= \Sigma_{yy} - \Sigma_{yx}\Sigma_{xx}^{-1}\Sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Así, cuando $\mathbf{B}=0$, Φ , Γ , y Ψ puede escribirse cada uno como funciones de la las matrices de covarianza identificadas de las variables observadas y están por lo tanto identificado. Me refiero a esta condición de identificación como la Regla Nula \mathbf{B} . Si las perturbaciones de una ecuación no están correlacionadas con las otras ecuaciones en un sistema (es decir, es diagonal), entonces estas ecuaciones pueden ser tratados como separados, o “sin relación”.

Si no es diagonal para que la las perturbaciones de al menos dos ecuaciones están correlacionadas, entonces tal modelo es a veces llamado “regresiones aparentemente no relacionadas” (ver Kmenta 1986).

En cualquier caso, los parámetros desconocidos en Γ, Ψ y Φ se identifican. La Regla Nula \mathbf{B} es una condición suficiente para la identificación de un modelo. Esto significa que si \mathbf{B} es nulo, se identifican los parámetros desconocidos. Sin embargo, la Regla Nula \mathbf{B} no es necesaria para la identificación.

Regla Recursiva

Al igual que la regla nula \mathbf{B} , la regla recursiva es una condición suficiente para la identificación del modelo, pero no es necesario. A diferencia de la regla nula \mathbf{B} , la regla recursiva no requiere $\mathbf{B}=0$. Para aplicar la regla recursiva, la matriz \mathbf{B} debe ser triangular, y la matriz Ψ debe ser diagonal. Más la descripción exacta de la condición para \mathbf{B} es que la matriz puede escribirse como una matriz triangular inferior. Esta calificación es necesaria ya que en modelos, el subíndice o el ordenamiento de las variables y pueden enmascarar una Triangular \mathbf{B} . Si ambas condiciones se mantienen, entonces el modelo es identificado.

El ejemplo 3.0.1 del modelo de sentimiento sindical proporciona la siguiente información. El \mathbf{B} es triangular inferior, y Ψ es diagonal ver la ecuación 3.2. Sus tres ecuaciones son:

$$y_1 = \gamma_{12}x_2 + \zeta_1 \quad (3.31)$$

$$y_2 = \beta_{21}y_1 + \gamma_{22}x_2 + \zeta_2 \quad (3.32)$$

$$y_3 = \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \gamma_{31}x_1 + \zeta_3 \quad (3.33)$$

Una propiedad de todos los modelos recursivos es que para una ecuación dada, el término perturbación no está correlacionado con las variables explicativas. Esto no es sorprendente para las variables explicativas exógenas ya que se asume que ζ es no correlacionado con x . En ejemplo 3.0.1, en las ecuaciones del sentimiento sindical, la $COV(x_2, \zeta_2)$, $COV(x_2, \zeta_1)$ y $COV(x_1, \zeta_3)$ son ceros. Sin embargo, las covarianzas de la perturbación son ceros y las variables endógenas, que son variables explicativas en una ecuación, es menos obvio. Para ilustrar cómo ocurre, considere la ecuación 3.34.

$COV(\zeta_2, y_1)$ es:

$$\begin{aligned} COV(\zeta_2, y_1) &= COV(\zeta_2, \gamma_{12}x_2 + \zeta_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Así que ζ_2 no está correlacionada con y_1 y x_2 , las dos variables explicativas de la segunda ecuación. De manera similar, para la tercera ecuación $COV(\zeta_3, y_1)$ y $COV(\zeta_3, y_2)$ son cero. El cero para $COV(\zeta_3, y_1)$ se sigue ya que y_1 es una función de x_2 y ζ_1 , y ambos no están correlacionados con ζ_3 .

Un cero para $COV(\zeta_3, y_2)$ se produce porque y_2 es una función de x_2, ζ_1 y ζ_2 , los cuales no están correlacionadas con ζ_3 . En general para la i -ésima ecuación en cualquier modelo recursivo, ζ_i no está correlacionado con las variables endógenas que son variables explicativas en esa ecuación. Esto se debe a que estas variables endógenas son funciones de las variables exógenas y las perturbaciones de otras ecuaciones, ambas no correlacionadas con ζ_i . Se utiliza esta propiedad para demostrar que \mathbf{B} , Γ , Φ , y Ψ en modelos recursivos son identificados. Intuitivamente, si todas las variables explicativas de una ecuación no están correlacionadas con la perturbación, entonces es como una ecuación de regresión estándar y se identifican tales ecuaciones. Se establece la identificación de estos parámetros más rigurosamente en breve.

Se trata una ecuación a la vez y usando una notación ligeramente diferente. La i -ésima ecuación de un modelo recursivo es

$$y_i = [\beta'_i | \gamma'_i] z_i + \zeta_i \quad (3.35)$$

Donde los y_i es la variable dependiente y ζ es el termino perturbación de la i th ecuación. La β'_i es el vector fila de \mathbf{B} , eliminando todos los valores cero y dejando sólo parámetros libres; los γ'_i es similarmente definido por Γ , y z_i es el subconjunto de las variables en y y x que tienen efectos directos sobre y_i . En otras palabras, el vector columna z_i contiene solo aquellas variables y_i de la ecuación y $[\beta'_i | \gamma'_i]$ contiene sus coeficientes. Como ejemplo, en la ecuación del modelo de sentimiento sindical 3.33, z'_3 es $[y_1 y_2 x_1]'$, β'_3 es $[\beta_{31} \beta_{32}]$, y γ'_3 es $[\gamma_{31}]$. Luego multiplicamos a ambos lados de la ecuación 3.35 por z'_i y tomando esperanzas conduce a:

$$\sigma'_{y_i z_i} = [\beta'_i | \gamma'_i] \Sigma_{z_i z_i} + \sigma'_{\zeta_i z_i} \quad (3.36)$$

Donde $\sigma'_{y_i z_i}$ es el vector fila covarianza de y_i con su variable explicativa, $\Sigma_{z_i z_i}$ es la matriz covarianza no singular de z_i y $\sigma'_{\zeta_i z_i}$ es el vector de covarianza de ζ_i con la variable explicativa de la i th ecuación. Como se muestra anteriormente ζ_i es incorrelacionado con la variable explicativa para la i th ecuación como $\sigma'_{\zeta_i z_i}$ es cero. Eliminando el ultimo termino de la ecuación 3.36, se resuelve para $[\beta'_i | \gamma'_i]$ y resulta

$$[\beta'_i | \gamma'_i] = \sigma'_{y_i z_i} \Sigma_{z_i z_i}^{-1} \quad (3.37)$$

Las covarianzas de las variables observable $\sigma'_{y_i z_i}$ y $\Sigma_{z_i z_i}^{-1}$ son identificados, y dado que $[\beta'_i | \gamma'_i]$ es una función de identificar parámetros, esta también es identificada.

Para establecer la identificación de ψ_{ii} , se postmultiplica a ambos lados de la ecuación 3.35 por y'_i y tomamos esperanzas. Después simplificamos esto:

$$VAR(y_i) = [\beta'_i | \gamma'_i] \Sigma_{z_i z_i} \begin{bmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} + \psi_{ii} \quad (3.38)$$

Se resuelve la ecuación 3.38 para ψ_{ii} y sustituyendo en la ecuación 3.37 en $[\beta'_i | \gamma'_i]$

$$\psi_{ii} = VAR(y_i) - \sigma'_{y_i z_i} \Sigma_{z_i z_i}^{-1} \sigma_{z_i y_i} \quad (3.39)$$

La ψ_{ii} es una función de identidad de varianza y covarianza y así es identificada. Este resultado es suficiente para mostrar que \mathbf{B} , Γ , Φ y Ψ son identificados en los modelos recursivos. En la ecuación 3.37 prueba que para la i th ecuación, la i th fila en los parámetros libres en \mathbf{B} y Γ son identificados, y la ecuación 3.39 muestra lo mismo para ψ_{ii} .

Dado esas relaciones para todas las ecuaciones, \mathbf{B} , Γ y Ψ son identificadas. Además ya que $\Phi = \Sigma_{xx}$ para todos los modelos de este capítulo, este también es identificado. Así todos los parámetros en los modelos recursivos son identificados. Ya que la regla recursiva es una condición suficiente para la identificación del modelo, esto es posible si \mathbf{B} es no triangular o para Ψ que es no diagonal. Y el modelo aún será identificado. Esta conduce a las nuevas reglas de identificación.

Rango y Condiciones de Orden

Excepto por la t -regla, la otra regla de identificación coloca restricciones una sobre \mathbf{B} o Ψ . Los modelos no recursivos fracasan al satisfacer esas restricciones y debe tener su identificación establecidas en alguna otra manera. En esta sección se presenta las condiciones de orden y rango que aplican a muchos sistemas no recursivos. Como la regla nula de \mathbf{B} y la regla recursiva, las condiciones de identificación de rango y orden de estos modelos que asumen no medición del error y que asumen que todas las variables exógenas (x) no correlacionada con los errores (ζ) en la ecuación. Ellas difieren de estas reglas anteriores en algunas maneras, sin embargo. Primero, la aplicación de las condiciones de rango y orden donde \mathbf{B} asume cualquier forma tanto como $(I - \mathbf{B})$ es no singular. Segunda ellas ayudan a determinar la identificación de una ecuación en un tiempo. De el \mathbf{B} nula y de las reglas recursivas, la identificación de todo el modelo es establecido si las condiciones se han cumplido. Para mostrar la identificación de un modelo con el rango y las condiciones de orden, cada ecuación debe encontrar las condiciones. Un tercio de diferencia, la cual es más sutil, es que el rango y las condiciones de orden asumen que Ψ no contienen restricciones. Es decir los elementos de Ψ no están obligados a un valor fijo (por ejemplo 0) o obligados a cualquier otro. Esto tiene la ventaja que si todas las ecuaciones de un modelo encuentran el rango y las condiciones de orden conocemos todos los elementos de Ψ son identificados y pueden ser estimados. La desventaja es que si se tiene conocimiento de ciertos elementos de Ψ debería ser restringidos este conocimiento no es utilizado. Efectivamente, estas son limitaciones sobre Ψ que pueden ayudar a identificar uno o más parámetros. Que no lo haría de lo contrario será identificado como un modelo recursivo verdadero. La condición de orden es la aplicación

más fácil. Si el solo tipo de restricción en una ecuación es la variable excluida, entonces la condición de orden puede declararse como sigue: Una condición necesaria para una ecuación sera identificada como el número de variables excluidas de la ecuación que será por lo menos $p - 1$. Para entender lo básico de esta regla , consideremos una simple ecuación de un modelo:

$$y_i = [\beta'_i | \gamma'_i] z_i + \zeta_i \quad (3.40)$$

La ecuación 3.40 tiene la misma notación de la ecuación 3.35 de la sección del modelo recursivo. La mayor diferencia es que se tiene todas las y , x en z_i excepto los y_i . El vector β'_i es igual a la i th fila de \mathbf{B} excluyendo los coeficientes normalizados de cero y es $1 \times (p - 1)$. El γ'_i es $1 \times (q)$ y es igual a la i -ésima fila de Γ Después de multiplicar a ambos lados 3.40 por x' y tomamos esperanzas.

$$\sigma'_{y_i x} = [\beta'_i | \gamma'_i] \Sigma_{z_i x} \quad (3.41)$$

Si β'_i y γ'_i son unicamente funciones de los elementos de covarianza identificados como $\sigma'_{y_i x}$ y $\Sigma_{z_i x}$, ellos son identificados. Una condición necesaria pero no suficiente de esta es que el número ecuaciones implícita por 3.41 sea menor o igual a las incognitas, de parámetros libres en $[\beta'_i | \gamma'_i]$. El número de ecuaciones es el número de elementos en $\sigma'_{y_i x}$ el cual es q . Este sigue desde q covarianzas con y_i resultados desde la q variables en x . El número de incognitas en β'_i es $(p - 1)$, y en γ'_i este es q , ya que no hay lugar a esas restricciones sobre esos vectores. Claramente, con q ecuaciones en $(p - 1) + q$ incognitas, β'_i y γ'_i no pueden ser identificados. Las $(p - 1) + q$ incognitas deben ser reducidas a q . Una condición necesaria para la identificación es que $p - 1$ restricciones dan lugar sobre los elementos de β'_i y γ'_i . La restricción más común es establecer algunos elementos a cero para que se omita la variable correspondiente de la ecuación. Si las variables excluidas son el único tipo de restricción, entonces $(p - 1)$ variables deben ser excluidas de la i -ésima ecuación para hacer posible la identificación. Esta es la condición de orden.

Si se usa el ejemplo objetivo y subjetivo estatus socio económico como una ilustración. La ecuación matriz de este modelo es:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & 0 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Suponga que para la primera ecuación β_{12} y γ_{12} no fueron restringidos a cero:

$$y_1 = \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3 + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \zeta_1 \quad (3.43)$$

Esta es de la forma 3.40. Luego, multiplicamos a ambos lados por la variable exógena y tomamos la esperanza.

$$\begin{aligned} COV(y_1, x_1) &= \beta_{12}COV(y_2, x_1) + \beta_{13}COV(y_3, x_1) + \gamma_{11}VAR(x_1) \\ &+ \gamma_{12}COV(x_2, x_1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} COV(y_1, x_2) &= \beta_{12}COV(y_2, x_2) + \beta_{13}COV(y_3, x_2) + \gamma_{11}COV(x_1, x_2) \\ &+ \gamma_{12}VAR(x_2) \end{aligned} \quad (3.45)$$

El resultado son dos ecuaciones con cuatro incógnitas ($\beta_{12}, \beta_{13}, \gamma_{11}, \gamma_{12}$), y es Claro que no es posible una solución única para estos parámetros. El orden requiere una condición ($p - 1$) o dos exclusiones de la primera ecuación. La especificación original de $(\beta_{13}) = 0$ y $\gamma_{12} = 0$ satisfice estos requerimientos así que la primera ecuación original cumple con esta condición necesaria de identificación.

Una forma de verificar la condición de orden para todas las ecuaciones en un modelo es formar una matriz, digamos, C , que es $[(I - \mathbf{B}) \mid -\Gamma]$. Luego para cada fila, contar el número de elementos cero. Si una fila tiene ($p - 1$) o más ceros, cumple la condición solicitada. Por el ejemplo estatus socioeconómico objetivo y subjetivo, C es:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & 0 & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 & -\gamma_{22} \\ -\beta_{31} & -\beta_{32} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cada fila de C tiene ($p - 1$) o dos exclusiones, como cada ecuación satisfice la condición de orden.

La condición de orden es una manera trivial de descartar las ecuaciones poca identificadas para los modelos no recursivos con Ψ libre. Como una condición necesaria pero no suficiente, paso la condición de orden no se garantiza la identificación. Poca identificación puede ocurrir si esta es posible produzca una nueva ecuación con la misma forma pero diferentes parámetros

de la vieja ecuación, pero usando una combinación lineal de las otras ecuaciones en un modelo. Un tal ejemplo ocurre cuando dos o más ecuaciones tienen restricciones idénticas. Las siguientes dos ecuaciones proporciona una ilustración:

$$y_1 = \beta_{12}y_2 + \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \zeta_1 \quad (3.46)$$

$$y_2 = \beta_{21}y_1 + \gamma_{22}x_2 + \zeta_2 \quad (3.47)$$

Supongase que nosotros excluimos a x_2 de ambas ecuaciones ($\gamma_{12} = \gamma_{22} = 0$). La matriz C es:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

La condición de orden de ambas ecuaciones es cumplido desde cada ecuación ha 1 (= $p - 1$) exclusión. Multiplicamos la segunda fila de C por una constante llamada a y agregamos esto a la primera fila:

$$C = \begin{bmatrix} 1 - \beta_{21}a & -\beta_{12} + a & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

luego, se divide cada elemento de la primera fila por $(1 - a\beta_{21})$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12}^* & -\gamma_{11}^* & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

donde

$$\begin{aligned} -\beta_{12}^* &= \left(\frac{-\beta_{12} + a}{1 - a\beta_{21}} \right) \\ & y \\ -\gamma_{11}^* &= \frac{-\gamma_{11}}{(1 - a\beta_{21})} \end{aligned}$$

La primera ecuación representada por la primera fila de C^* tiene la misma forma y variables excluidas como se muestra en la primera fila de C de la ecuación 3.48. Un conjunto infinito de valores de β_{12}^* y γ_{11}^* pueden no ser producidos los valores verdaderos β_{12} y γ_{11} . Como β_{12} y γ_{11} no son identificados, sin embargo a través de la condición de orden la primera ecuación es

sastifecha. Se aplico un procedimiento a la segunda ecuación. Se multiplica la primera fila de C de la ecuación 3.48 por a y sumamos esto en la segunda fila:

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{21} + a & 1 - a\beta_{12} & -a\gamma_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Esta nueva segunda fila de C^* tiene una forma diferente a la segunda fila de C . La posición $(2, 3)$ de C^* es $-a\gamma_{11}$, mientras que los correspondiente elemento de C es cero. Siempre que $-\gamma_{11}$ o a son no cero, no valor de a conduce a la misma forma de la misma fila de C .

Así la nueva segunda ecuación indistinguible de el viejo uno no puede ser producido de una combinación lineal de la primera ecuación. La segunda ecuación es identificada. Aunque en este sistemas de dos ecuaciones es fácil determinar si es posible nueva ecuaciones impostoras, en sistema de multi-ecuaciones más complejos el procedimiento de arriba es más difícil de aplicar.

La condición de rango de la identificación cumple el mismo propósito con menos esfuerzo. La regla de rango comienza con C (*esdecir* $[(I - \mathbf{B}) | -\Gamma]$). Para comprobar la identificación de la i -ésima ecuación, se elimina todas las columnas de C que no tengan ceros en la i -ésima fila de C . Usa las columnas restantes para formar una nueva matriz, C_i .

Una condición necesaria y suficiente para la identificación de la i -ésima ecuación es que el rango de C_i es igual a $(p - 1)$.

Esta es la condición de rango. Como una ilustración, considere el modelo de dos ecuaciones en las ecuaciones 3.46 y 3.47. La matriz C está en 3.48. Se examina la identificación de la primera ecuación. El único cero en la primera fila está en la cuarta columna, por lo que las tres primeras columnas se eliminan y C_1 es

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

El rango de una matriz o un vector es el número independiente de filas y columnas. Con ambos elementos ceros de C_1 , su rango es cero. Con un rango menor a uno, la primera ecuación es no identificada como fue mostrada anteriormente. De la segunda ecuación de C en la ecuación 3.48, C_2 es:

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Excepto cuando γ_{11} es cero, el rango de C_2 , lo cual satisfice la condición de rango, y la segunda ecuación es identificada. La condición de rango también puede ser chequeada por ejemplo el estatus objetivo y subjetivo. La C para este modelo en la ecuación 3.45. Para la primera ecuación, C_1 es:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

A menos que $\gamma_{22} = 0$, C_1 tiene dos filas y columnas independientes, como su rango es 2 el cual satisfice la condición de rango. Del mismo modo, C_2 y C_3 también tienen un rango de 2, y así todas las ecuaciones son identificadas. Sistemas de ecuaciones con idénticas relaciones son tratadas del mismo modo, excepto que la ecuación que representa la identidad no requiere la condición de rango y orden ya que esta es identificada por definición. Se ilustra esto con Haavelmo's modelo marginal propenso a consumir.

Ver las ecuaciones 3.19 a 3.23. La C de este modelo es:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila es la ecuación identidad, la cual es identificada.

La matriz C_2 es

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El rango es uno, el cual satisfice la condición de rango, así la ecuación es identificada. La exclusión de restricciones son los tipos más comunes de restricciones colocados sobre los elementos \mathbf{B} y Γ . Esos representan la ausencia de una variable de una ecuación por su establecimiento correspondiente del coeficiente en \mathbf{B} o Γ a cero. Se limita la discusión de rango y la condición de

orden a la exclusión de restricciones, pero otros tipos son posibles. Por ejemplo, suponga que la influencia de dos variables exógenas en una ecuación son desconocidas pero estas se asumen iguales. O una función lineal de dos o más parámetros igual podría conocer una constante. Inecuaciones o limitaciones no lineales también son posibles. Estos tópicos no se tratan aquí, pero la referencia de lectura es Fisher(1966) y Johnston (1984). También recordemos que la condición de rango y orden asumen que no está colocada restricción sobre Ψ . Si Ψ es restringido, esto es aún posible para identificar el modelo, incluso si esta condición de rango y orden fallan.

Por ejemplo, si se aplica la condición de orden en el ejemplo de unión de sentimientos, la última ecuación falla. Aún esta ecuación es identificada. La razón es que el modelo de unión de sentimientos es recursivo tal que Ψ es restringido. Como se muestra en la sección de modelos recursivos y \mathbf{B} triangular habilita el modelo a ser identificado. Así cuando las restricciones son colocadas sobre Ψ , la regla de orden no es más necesaria, y la regla de rango no es más necesaria y suficiente para identificación. La condición de rango y orden establece el estado de identificación de las ecuaciones. Si cada ecuación cumple la regla de rango, entonces el modelo es identificado como un todo. Ambas condiciones tienen la ventaja que ellos no requieren una forma especial de la matriz \mathbf{B} . Ellas no asumen restricciones para la matriz Ψ . Así puede ser una desventaja si la restricción adicional sobre \mathbf{B} , Ψ o la matriz apropiada de Γ .

Resumen de Reglas de Identificación El cuadro 3,1 resumen las reglas de identificación en esta sección. La regla t, la regla nula \mathbf{B} y las reglas recursivas son condiciones para la identificación del modelo como un todo. La primera es solamente una condición necesaria, pero la segunda y la tercera son condiciones suficientes. La regla t es la regla más general y aplicada a todos los modelos discutidos en este capítulo. La regla \mathbf{B} nula es apropiada siempre y cuando $\mathbf{B} = 0$, a pesar de toda la forma de Ψ . La regla recursiva es solamente apropiada con modelos de matrices triangulares \mathbf{B} y matrices diagonales Ψ . Finalmente, el rango y las condiciones de orden establecen el estado de identificación de la ecuación. Si cada ecuación cumple la regla del orden, entonces el modelo es identificado como un todo. Ambas condiciones permiten cualquier matriz no singular $(I - \mathbf{B})$ y asume no restricción de la matriz Ψ . Aunque esas reglas cubran más modelos de ecuaciones estructurales con variables observables, ellas no son exhaustivas. Reglas de identificación de bloques recursivos y algunos otros modelos son disponibles (ver e.g., Fox,

1984, 247 – 251; Bekker y Pollock 1986)

Cuadro 3.1: Reglas De Identificación Para Ecuaciones Estructurales Con Variables Observables Asumiendo No Medición Del Error $y = \beta y + \Gamma x + \zeta$

Regla Identificación	Evaluación	Requerimientos	CondNeces	CondSufic
t-Regla	modelo	$t \leq \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)$	si	no
Regla Nula β	modelo	$\beta = 0$	no	si
Regla Recursiva	modelo	β triangular Ψ diagonal	no	si
Condición de Orden	ecuación	Restricciones $\geq (p-1)$ Ψ libre	si	no
Condición de Rango	ecuación	Rango($C_i = p-1$) Ψ libre	si	si

3.1. Estimación

Los procedimientos de estimación se obtienen de la relación de la matriz de covarianza de las variables observables para los parámetros estructurales. Anteriormente se demostró que $\Sigma(\theta)$ es:

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} (I - \beta)^{-1}(\Gamma\Phi\Gamma' + \Psi)(I - \beta)^{-1'} & (I - \beta)^{-1}\Gamma\Phi \\ \Phi\Gamma'(I - \beta)^{-1'} & \Phi \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Si el modelo de ecuación estructural es correcto y los parámetros de la población son conocidos, entonces Σ es igual a $\Sigma(\theta)$. Por ejemplo, se considera la ecuación estructural simple:

$$y_1 = x_1 + \zeta_1 \quad (3.56)$$

En la ecuación 3.56 se tiene un conjunto de γ_{11} igual a 1. La matriz de covarianza de la población para y_1 y x_1 es

$$\Sigma = \begin{bmatrix} VAR(y_1) & COV(y_1, x_1) \\ COV(x_1, y_1) & VAR(x_1) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

La matriz Σ en terminos de parámetros estructurales es:

$$\Sigma(\theta) = \begin{bmatrix} \phi_{11} + \psi_{11} & \phi_{11} \\ \phi_{11} & \phi_{11} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Suponiendo que el modelo es correcto y que los parámetros de la población son conocidos, cada elemento en la ecuación 3.57 debería ser igual a los elementos de la ecuación 3.58. El parámetro ϕ_{11} es sobreidentificado ya que este es igual $VAR(x_1)$ y $COV(x_1, y_1)$. En la practica, no se conoce la varianza ni covarianza poblacional o los parámetros. La tarea es la forma de estimación muestral de los parámetros desconocidos basados en la estimacion muestral de la matriz de covarianza. La matriz muestral de covarianza , S , para y_1, x_1 es:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} VAR(y_1) & COV(y_1, x_1) \\ COV(x_1, y_1) & VAR(x_1) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

A la vez se selecciona el valor de ϕ_{11} y ψ_{11} (representado por $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$) la matriz de covarianza implícita, $\hat{\Sigma}$, puede ser formada al sustituir $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ en la ecuación 3.58.

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{11} + \hat{\psi}_{11} & \hat{\phi}_{11} \\ \hat{\phi}_{11} & \hat{\phi}_{11} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Para ilustrar este proceso, suponga que \mathbf{S} es:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Se procede a elegir $\hat{\phi}_{11} = 7$ y $\hat{\psi}_{11} = 3$ y sustituimos en la ecuación 3.60, tenemos:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

La matriz residual($\mathbf{S} - \hat{\Sigma}$)

$$(\mathbf{S} - \hat{\Sigma}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Aunque este conjunto de estimadores conduce a un partido perfecto para la muestra $var(y_1)$ el adaptar es menos adecuado para $cov(x_1, y_1)$ y la $var(x_1)$. La $\hat{\Sigma}$ sobre predice esos elementos. Consideremos los nuevos con $\hat{\phi}_{11} = 5$ y $\hat{\psi}_{11} = 5$. La $\hat{\Sigma}$ es ahora:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

La matriz residual($\mathbf{S} - \hat{\Sigma}$)

$$(\mathbf{S} - \hat{\Sigma}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Aunque estos valores no conducen a una combinación perfecta de $\hat{\Sigma}$ con \mathbf{S} , el segundo conjunto de valores parece conducir a uno más apropiado que el primero. El mismo proceso, pero más complejo, ocurre para los modelos de ecuaciones estructurales con variables observables. Los parámetros desconocidos en β , Γ , Φ y Ψ son estimados como la matriz de covarianza implícita $\hat{\Sigma}$ esta cerca de la matriz de covarianza muestral \mathbf{S} . Para conocer cuando nuestros estimadores son lo más cercanos posible. se debe definir cercano, es decir, se requiere una función que es para minimizar. Muchas diferentes funciones son apropiadas para para la posible tarea. Las funciones apropiadas $F(\mathbf{S}, \Sigma(\theta))$ son basadas en \mathbf{S} . La matriz de covarianza muestral, y $\Sigma(\theta)$, la matriz de covarianza implícita de parámetros estructurales. Si las estimaciones de θ es un sustituto de $\Sigma(\theta)$, esta conduce a una matriz de covarianza implícita, $\hat{\Sigma}$. El valor de la función apropiada para $\hat{\theta}$ es $F(\mathbf{S}, \hat{\Sigma})$. La función apropiada presenta las siguientes propiedades:

- $F(\mathbf{S}, \Sigma(\theta))$ es un escalar.
- $F(\mathbf{S}, \Sigma(\theta)) \geq 0$
- $F(\mathbf{S}, \Sigma(\theta)) = 0$ si y solo si $\Sigma(\theta) = (\mathbf{S})$
- $F(\mathbf{S}, \Sigma(\theta))$ es continua en \mathbf{S} y $\Sigma(\theta)$.

Segun Browne (1984, 66), la función apropiada minimizada que sastiface esas condiciones conducen a estimadores consistente de θ . Se presenta tres de tales funciones:

- maximum likelihood (ML)(máxima probabilidad)
- unweighted least squares (ULS)(mínimos cuadrados no ponderados)
- generalized least squares (GLS)(mínimos cuadrados generalizados)

El uso de esos métodos apropiados se extienden para todos los modelos en este trabajo.

Además en esta sección se presenta $(\mathbf{S} - \hat{\Sigma})$ como un indicador de desviación adecuada y se intenta reducir la diferencia entre cada elemento de $\hat{\Sigma}$ y en \mathbf{S} . Para la fecha la función apropiada más usada para los modelos de ecuaciones estructurales es la función maximum likelihood (ML). La función apropiada para minimizar es:

$$F_{ML} = \log |\Sigma(\theta)| + \text{tr}(\mathbf{S}\Sigma^{-1}(\theta)) - \log |\mathbf{S}| - (p + q). \quad (3.66)$$

Generalmente, se asume que $\Sigma(\theta)$ y \mathbf{S} son definidas positivas lo cual significa que ellas son no singulares. De otra manera, esto debería ser posible para el log de cero, que es indefinido cuando aparezca en F_{ML} . Para verificar que F_{ML} es cero cuando $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$, sustituyendo $\hat{\Sigma}$ en $\Sigma(\theta)$ y $\hat{\Sigma} = \mathbf{S}$ en la ecuación 3.66. En este caso

$$F_{ML} = \log |\mathbf{S}| + \text{tr}(I) - \log |\mathbf{S}| - (p + q).$$

donde $\text{tr}(I) = p + q$, y $F_{ML} = 0$, así, cuando se tiene un modelo predice perfectamente el valor de la matriz de covarianza muestral, un perfecto indicador viene por cero. Para promover la demostración de la operación de esta función se regresa a la ecuación estructural, $y = x_1 + \zeta_1$. La \mathbf{S} y $\Sigma(\theta)$ están en la ecuación 3.57 y 3.56. Luego sustituimos $\hat{\Sigma}$ por $\Sigma(\theta)$, F_{ML} es:

$$F_{ML} = \log(\hat{\psi}_{11}\hat{\phi}_{11}) + \hat{\psi}_{11}^{-1}(\text{var}(y_1) - 2\text{cov}(x_1, y_1) + \text{var}(x_1)) + \hat{\phi}_{11}^{-1}\text{var}(x_1) - \log[\text{var}(y_1)\text{var}(x_1) - (\text{cov}(y_1, x_1))^2] - 2 \quad (3.67)$$

Una condición necesaria para la minimización de F_{ML} es que $\hat{\psi}_{11}$ y $\hat{\phi}_{11}$ sean escogidas tales que las derivadas parciales de F_{ML} con respecto a $\hat{\psi}_{11}$ y $\hat{\phi}_{11}$ sea cero. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F_{ML}}{\partial \hat{\phi}_{11}} = \hat{\phi}_{11}^{-1} - \hat{\phi}_{11}^{-2}\text{var}(x_1) \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial F_{ML}}{\partial \hat{\psi}_{11}} = \hat{\psi}_{11}^{-1} - \hat{\psi}_{11}^{-2}(\text{var}(y_1) - 2\text{cov}(y_1, x_1) + \text{var}(x_1)) \quad (3.69)$$

ajustando las ecuaciones 3.68 y 3.69 a cero y resolviendo $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ lleva a

$$\hat{\phi}_{11} = \text{var}(x_1) \quad (3.70)$$

$$\hat{\psi}_{11} = var(y_1) - 2cov(y_1, x_1) + var(x_1) \quad (3.71)$$

Una condición suficiente para que estos valores a minimizar a F_{ML} es que la matriz formada tome las segundas derivadas parciales de la función de ajuste con respecto a $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ será definida positiva. Esta matriz es:

$$\begin{bmatrix} -\hat{\phi}_{11}^{-2} + \hat{\phi}_{11}^{-3}var(x_1) & 0 \\ 0 & -\hat{\psi}_{11}^{-2} + 2\hat{\psi}_{11}^{-3}(var(y_1) - 2cov(y_1, x_1) + var(x_1)) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Ajustando $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ a los valores a las ecuaciones 3.70 y 3.71 simplificando se muestra que 3.72 es definida positiva para los valores positivos de $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$. Así la solución para minimizar los parámetros en las ecuaciones 3.70 y 3.71 es F_{ML} .

Ejemplo 3.1.1 *Supóngase que se tiene valores muestrales de $var(y_1) = 10$, $cov(x_1, y_1) = 5$, y $var(x_1) = 8$. Los estimadores $\hat{\phi}_{11}$, $\hat{\psi}_{11}$ ambos serán iguales a cero.*

El ejemplo ilustra un caso donde las soluciones explicitas para los parámetros estructurales los cuales minimiza la existencia F_{ML} . En general, F_{ML} es la función no lineal más complicada de los parámetros estructurales, y soluciones explicitas no son siempre encontradas.

Mínimos cuadrados no ponderados (ULS). La función de ajuste ULS es:

$$F_{ULS} = \left(\frac{1}{2}\right)tr[(\mathbf{S} - \Sigma(\theta))^2] \quad (3.73)$$

Aunque no sea obvio, F_{ULS} minimiza la mitad de la suma de cuadrados de cada elemento en la matriz residual $(\mathbf{S} - \Sigma(\theta))$. Una analogía con la regresión de mínimos cuadrados ordinarios es evidente. En ULS la suma de cuadrados de el término residual se minimiza. El error es la discrepancia entre la Variable dependiente observada y la predicha por el modelo. Con F_{ULS} minimizamos la suma de cuadrados de cada elemento en la matriz residual $(\mathbf{S} - \Sigma(\theta))$. La matriz residual en este caso consiste en las diferencias entre las varianzas muestrales y las covarianzas y las correspondientes. predicho por el modelo. Para aclarar el funcionamiento de esta función, considere la ecuación estructural. $y_1 = x_1 + \zeta_1$ La \mathbf{S} y $\Sigma(\theta)$ para este modelo están en ecuaciones 3.59 y 3.58. Sustituyendo $\hat{\Sigma}$ por $\Sigma(\theta)$, F_{ULS} es:

$$F_{ULS} = \frac{1}{2}((var(x_1) - \hat{\phi}_{11} - \hat{\psi}_{11})^2 + 2(cov(y_1, x_1) - \hat{\phi}_{11})^2 + (var(x_1) - \hat{\phi}_{11})^2) \quad (3.74)$$

Como la ecuación 3.74 deja claro, las estimaciones para $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ se seleccionan para reducir las discrepancias cuadradas entre la $var(y_1)$ y $(\hat{\phi}_{11} + \hat{\psi}_{11})$, $cov(y_1, x_1)$ y $\hat{\phi}_{11}$, y $var(x_1)$ y $\hat{\phi}_{11}$. Una condición necesaria para la minimización de F_{ULS} es que $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ se muestran como la derivada parcial de la función adecuada con respecto a $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ igual a cero. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial F_{ULS}}{\partial \hat{\phi}_{11}} = -var(y_1) - 2cov(y_1, x_1) - var(x_1) + 4\hat{\phi}_{11} - \hat{\psi}_{11} \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial F_{ULS}}{\partial \hat{\psi}_{11}} = -var(y_1) + \hat{\phi}_{11} + \hat{\psi}_{11} \quad (3.76)$$

Ajustando las ecuaciones 3.75 y 3.76 a cero y resolviendo las dos ecuaciones para $\hat{\phi}_{11}$ y $\hat{\psi}_{11}$ en términos de la covarianza y varianza de y_1 y x_1 resultados en:

$$\hat{\phi}_{11} = \frac{var(x_1) + 2cov(y_1, x_1)}{3} \quad (3.77)$$

$$\hat{\psi}_{11} = var(y_1) - \frac{var(x_1) + 2cov(y_1, x_1)}{3} \quad (3.78)$$

La matriz formada al tomar la segunda derivadas parciales de la función ajustada con respecto a $\hat{\psi}_{11}$ y $\hat{\phi}_{11}$ es definida positiva como, se ajusta $\hat{\psi}_{11}$ igual a la ecuación 3.77 y $\hat{\phi}_{11}$ igual a la ecuación 3.77 minimizan a F_{ULS} .

Capítulo 4

Aplicaciones de los Modelos de Ecuaciones Estructurales

En este capítulo se utilizó la base de datos de la tesis [8].

La población bajo estudio es de 8430 estudiantes, se aplicó un muestreo por conglomerado en dos etapas, cuya muestra es de 391 estudiantes, recopilada de la tesis antes mencionada.

Se aplicó el Alcohol Use Disorders Identification, versión en español Test AUDIT. En este análisis empleamos tanto los puntos de corte recomendados para evaluar el CRDA en adultos ($AUDIT \geq 8$) y para jóvenes adolescentes ($AUDIT \geq 3$), para detectar el consumo riesgoso de alcohol, el cuál fue desarrollado por la Organización Mundial de la Salud (OMS) como un método simple de "screening" del consumo excesivo de alcohol y como un apoyo en la evaluación breve.

Puede ayudar en la identificación del consumo excesivo de alcohol como causa de la enfermedad presente. También proporciona un marco de trabajo en la intervención para ayudar a los bebedores, con consumo perjudicial o de riesgo, a reducir o cesar el consumo de alcohol y con ello puedan evitar las consecuencias perjudiciales de su consumo.

Su validez y confiabilidad se han establecido también en poblaciones diversas que incluyen la población adolescentes en varias partes del mundo (Chung et al., 2002)(Knight et al.,2003) Las 3 primeras preguntas del AUDIT exploran la frecuencia y la cantidad de consumo, las preguntas 4, 5 y 6 síntomas de dependencia, la 7, 8, 9 y 10 exploran las consecuencias negativas asociadas a su consumo.

Cada pregunta del AUDIT, tiene de 3 a 5 posibles respuestas, cada res-

puesta tiene un valor numérico que va de 0 hasta 2 ó 4 puntos. La sumatoria de los puntos de cada respuesta da un puntaje total con un máximo posible de 40 puntos.

De 0 – 7 puntos se refleja niveles de consumo seguros de alcohol para estudiantes mayores iguales a 21 años, mientras que puntajes ≥ 8 indica presencia del CRDA. Así mismo, para la población de adolescentes un puntaje en el AUDIT ≥ 3 puntos indica, de manera, confiable la presencia de este problema CRDA, según diversos estudios de (Chung et al, 2002; Knight et al., 2003)

A continuación se Verifica la normalidad univariante de cada una de las variables:

Frecuencias

[Conjunto_de_datos1] C:\Users\Yonny Albornoz\Documents\ArticuloAudit\base de datos2MODELOS ESTRUCTURALES - copia.sav

		Estadísticos									
		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
N	Válidos	391	391	391	391	391	391	391	391	391	391
	Perdidos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Error tip. de la media		,048	,067	,048	,044	,029	,020	,033	,034	,045	,052
Desv. tip.		,948	1,333	,942	,862	,566	,390	,646	,674	,883	1,024
Asimetría		,568	1,448	1,376	2,244	3,863	3,687	3,232	3,262	3,183	2,781
Error tip. de asimetría		,123	,123	,123	,123	,123	,123	,123	,123	,123	,123
Curtois		-,139	,858	,722	4,636	16,057	15,297	12,684	11,937	9,438	6,548
Error tip. de curtois		,246	,246	,246	,246	,246	,246	,246	,246	,246	,246

```
FRECUENCIAS VARIABLES=frecuenciac sintomas consecuencias AUDIT
/FORMAT=NOTABLE
/STATISTICS=STDDEV SEMEAN SKEWNESS SESKEW KURTOSIS SEKURT
/ORDER=ANALYSIS.
```

Figura 4.1: normuni

Según Curran, West y Finch (1996) las variables en la figura 4.1 presentan un normalidad moderada.

El siguiente modelo fue determinado a través de la aplicación del paquete Amos.

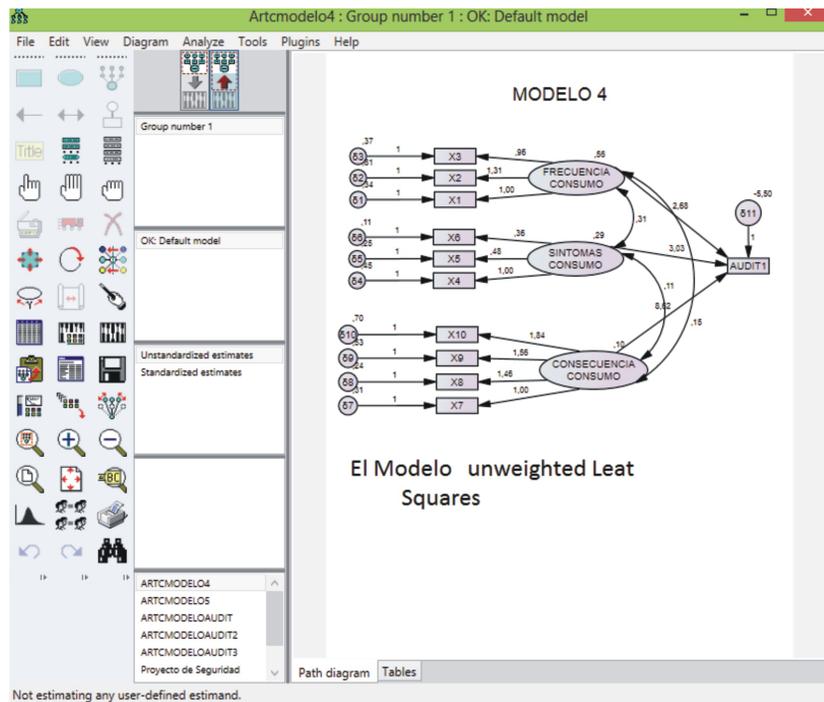


Figura 4.2: Modelo4

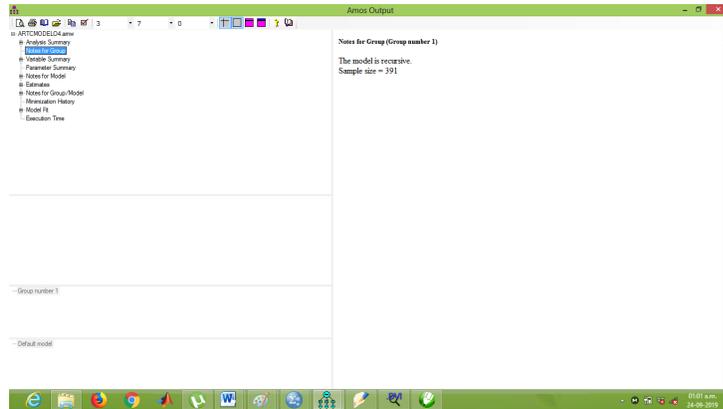


Figura 4.4: salida

La siguiente figura muestra los tipos de variables presentes en el modelo.

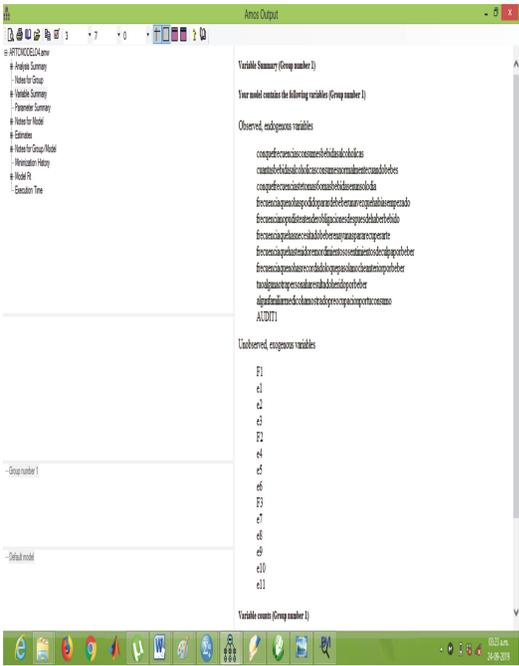
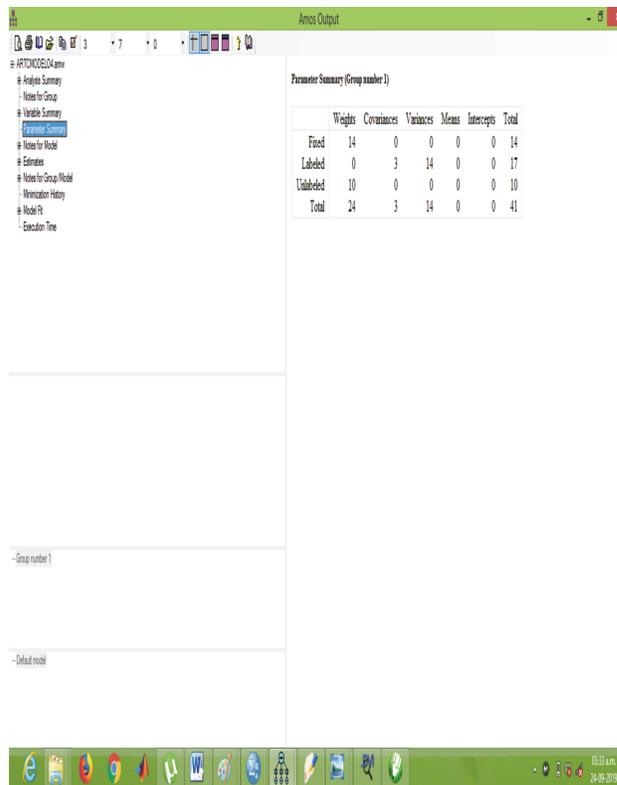


Figura 4.5: output2

Variable counts (Group number 1)	
Number of variables in your model:	25
Number of observed variables:	11
Number of unobserved variables:	14
Number of exogenous variables:	14
Number of endogenous variables:	11

Figura 4.6: output3

A continuación se muestra el resumen de parámetros



The screenshot shows the Amos Output window with a tree view on the left and a table on the right. The tree view includes: # RTCMOESL4.amv, # Analysis Summary, # Notes for Group, # Variable Summary, # Parameters Summary (highlighted), # Notes for Model, # Estimates, # Notes for Group/Model, # Modification History, # Model Fit, and # Execution Time. The table on the right is titled 'Parameter Summary (Group number 1)' and contains the following data:

	Weights	Covariances	Variances	Means	Intercepts	Total
Fixed	14	0	0	0	0	14
Labeled	0	3	14	0	0	17
Unlabeled	10	0	0	0	0	10
Total	24	3	14	0	0	41

Figura 4.7: output4

A continuación se muestra el modelo por defecto.

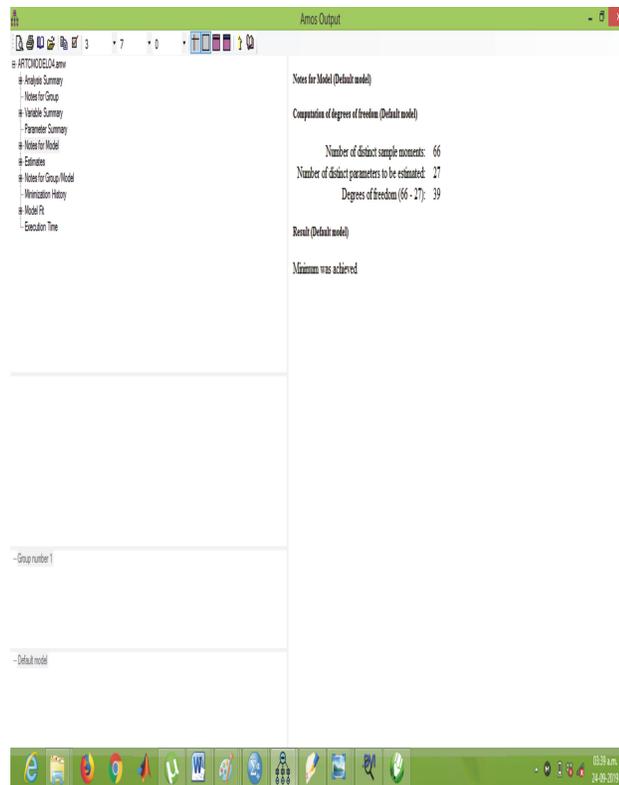


Figura 4.8: output5

Covariances: (Group number 1 - Default model)

	Estimate	S.E.	C.R.	P	Label
F1 <--> F2	,310				
F2 <--> F3	,114				
F1 <--> F3	,151				

Variances: (Group number 1 - Default model)

	Estimate	S.E.	C.R.	P	Label
F1	,556				
F2	,295				
F3	,102				
e1	,340				
e2	,813				
e3	,374				
e4	,446				
e5	,251				
e6	,114				
e7	,315				
e8	,237				
e9	,532				
e10	,701				
e11	-5,499				

Figura 4.10: output7

$$S = \begin{bmatrix} 0,556 & & \\ 0,310 & 0,295 & \\ 0,151 & 0,114 & 0,102 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Las covarianzas son positivas nos indican, que existe una relación directa entre las variables.

La covarianza síntomas y frecuencia de consumo es (0,310), indica una relación directa entre los síntomas de consumo y su frecuencia de consumo.

La covarianza consumo de riesgoso y frecuencia de consumo es (0,151), indica una relación directa entre el consumo riesgoso y la frecuencia de consumo.

La covarianza consumo riesgoso y síntomas de consumo es (0,114), indica una relación directa entre consumo riesgoso y los síntomas de consumo

La varianza de frecuencia de consumo es de (0,556).

La varianza de síntomas de consumo es de (0,295).

La varianza de consumo riesgoso es de (0,102).

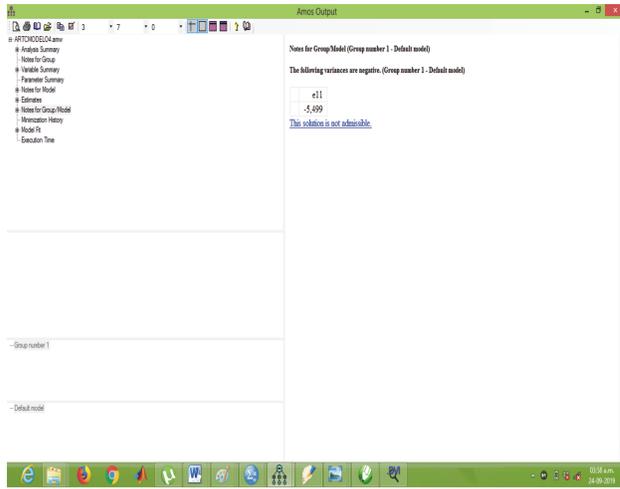


Figura 4.11: output8

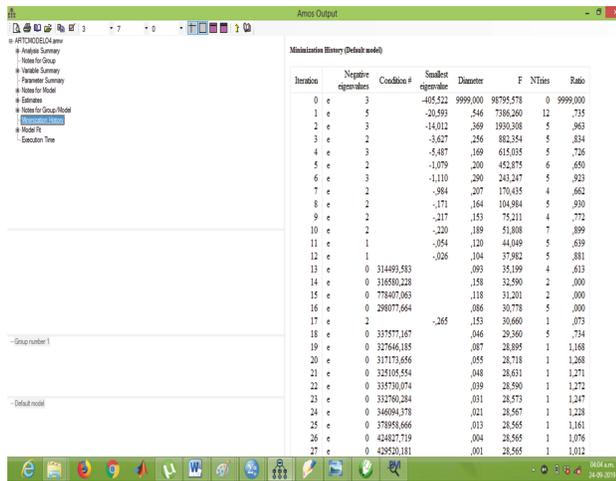


Figura 4.12: output11

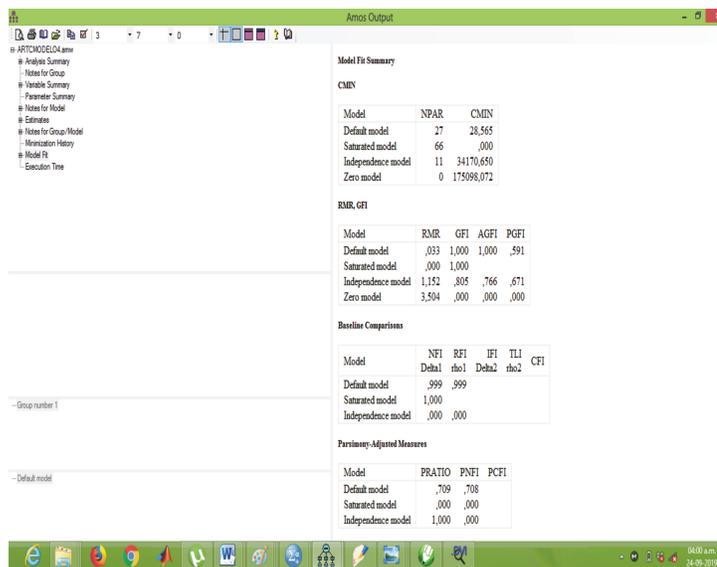


Figura 4.13: output9

En la figura 4.13 se muestra los valores de los índices siguientes, veamos la información que cada uno nos suministra:

- El índice de error cuadrático medio (RMR) mide las varianzas y covarianzas de la muestra y si estas difieren de las estimaciones obtenidas, en este caso su valor es de 0,033 este indica un ajuste casi perfecto.
- El índice de Bondad y Ajuste (GFI) es 1,00 este indica que el modelo no debe ser ajustado.
- El índice Ajustado de Bondad de Ajuste (AGFI) es una extensión de (GFI) y su valor es de 1,00 muestra un mejor ajuste.
- El índice de Bondad de Ajuste de Parsimonia (PGFI) es un índice sugerido por Mulaik y colaboradores, que constituye una modificación de (GFI) y considera los grados de libertad disponibles para probar el modelo, se encuentra en un rango de 0,5 a 0,7, su magnitud es de 0,591 y se encuentra en un rango aceptable.

CONCLUSIONES

Este trabajo, se desarrollo los modelos de ecuaciones estructurales, se comenzó con elementos matemáticos que fundamentan los modelos de ecuaciones estructurales. Y luego se aborda una introducción a dichos modelos. Se aplicó el paquete AMOS a la base de datos de la tesis [8], y se obtuvo los siguientes resultados:

- El modelo es Recursivo.
- Se obtuvo la estimación de los parámetros.
- La correlación F_1F_3 es débil.
- La correlación F_2F_3 es débil.
- El índice de error cuadrático medio (RMR) indica un ajuste casi perfecto.
- El índice de Bondad y Ajuste (GFI) indica que el modelo no debe ser ajustado.
- El índice Ajustado de Bondad de Ajuste (AGFI) es una extensión de (GFI) y este muestra un mejor ajuste.
- El índice de Bondad de Ajuste de Parsimonia (PGFI) es un índice sugerido por Mulaik y colaboradores, que constituye una modificación de (GFI) y considera los rango aceptable.
- Se generan modelos predictivos.

Por otro lado el paquete AMOS que tiene las siguientes ventajas :

- Es un programa muy intuitivo.

- Tiene una representación gráfica bastante buena.
- Tiene una gran variedad de estadísticos de bondad de ajustes.

Esto hace que la interpretación de los resultados sea bastante sencilla y rápida.

Por otro lado tiene ciertas desventajas tales como:

- La introducción del modelo en el programa es bastante tediosa y lenta.
- Este programa solo te deja realizar el ajuste por los métodos clásicos de estimación, sin tener en cuenta los nuevos métodos.

Bibliografía

- [1] René Escalante F. Curso Introductorio de Matlab. *Editorial Equinoccio Universidad Simón Bolívar*, Venezuela (2006).
- [2] G. Glass y J. Stanley. Métodos Estadísticos Aplicados a las Ciencias Sociales. *Editorial Prentice-Hall*, México (1986).
- [3] Bernard Kolman . Álgebra Lineal Con Aplicaciones Y Matlab .*Prentice Hall*, México (1999).
- [4] G. Nakos, D. Joyner. Álgebra Lineal.*International Thomson Editores, S.A. de C.V.*, USA (1999).
- [5] Dennis G.Zill. Álgebra y Trigonometría.*McGRAW-HILL/INTERAMERICANA,S.A.*, México (1992).
- [6] A. Bollen. Structural Equations With Latent Variables. *JOHN WILEY & SONS*,, New York(1989).
- [7] A. MULAİK.LINEAR CAUSAL MODELING WITH STRUCTURAL EQUATIONS.*Taylor & Francis Group, an Informa business*, London New York(2009).
- [8] P. Boada , S. Moya.Factores predictivos en el consumo de alcohol de los estudiantes de la Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre, Cumaná.(Tesis de Licenciatura de Trabajo Social)(2015).

METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	Introducción A Los Modelos De Ecuaciones Estructurales y sus Aplicaciones
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Albornoz Torres <u>Yonny</u> Jesús	CVLAC	8029313
	e-mail	yonnalbor@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Estadística <u>Multivariante</u> , Modelos de Ecuaciones Estructurales, Aplicaciones.

Figura 4.14: metadatos1

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Area	Sub área
Ciencias Sociales	Modelos De Ecuaciones Estructurales

Resumen (abstract):

En este trabajo se desarrolla los modelos de ecuaciones estructurales. Este es utilizado para contratar modelos que proponen relaciones causales entre las variables presentes en particular en un fenómeno social. Además son una familia de los modelos estadísticos multivariantes que permiten estimar el efecto y las relaciones entre múltiples variables. Este trabajo está estructurado en cuatro capítulos. En el Primer capítulo comienza con un fundamento matemático que ayuda a los interesados de las ciencias Sociales a seguir el estudio de los modelos de ecuaciones estructurales. El segundo capítulo hace una introducción a los modelos de ecuaciones estructurales, tales como: la notación de modelos, los modelos de variable latente, los modelos medibles, la varianza muestral y el análisis de rutas. En el tercer capítulo se aborda los modelos de ecuaciones estructurales con variables observables, donde se desarrolla temas como: la especificación del modelo, la matriz de covarianza implícita, la identificación, la regla t y la estimación. En el cuarto capítulo se desarrolla las aplicaciones de los modelos estructurales.

Figura 4.15: metadatos2

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
	ROL	C <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> S <input checked="" type="checkbox"/> T <input type="checkbox"/> U <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	C <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> S <input type="checkbox"/> T <input type="checkbox"/> U <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	C <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> S <input type="checkbox"/> T <input type="checkbox"/> U <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Lenguaje: SPA
| _____

Figura 4.16: metadatos3

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Ascenso	<u>Application/Tex</u>

Alcance:

Espacial: Nacional
(Opcional) _____

Temporal: Intemporal
(Opcional) _____

Título o Grado asociado con el trabajo:

Asociado

Nivel Asociado con el Trabajo: Asociado

Área de Estudio: Ciencias - Estadística

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado: Universidad de Oriente

Figura 4.17: metadatos4

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CUN°0915

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
SISTEMA DE BIBLIOTECA
RECIBIDO POR *[Firma]*
FECHA *5/8/09* HORA *5:30*
Cordialmente,
[Firma]
JUAN A. BOLANOS CUNEL
Secretario

C.C: Rector, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Gerencia Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Telefermedad, Coordinación General de Postgrado.

JARC/YDC/marje

Apartado Correo 094 / Teléfono: 4008042 - 4008044 / 8008043 Teléfono: 4008043 / Cumaná - Venezuela

Figura 4.18: metadatos5

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso- 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009): "los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario para su autorización".



Albornoz Torres Yonny Jesús
AUTOR

Figura 4.19: metadatos6